

GABRIEL VIGUIER

Algèbre et géométrie de l'équation de Riccati

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 9 (1945), p. 1-64

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1945_4_9__1_0

© Université Paul Sabatier, 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE DE L'ÉQUATION DE RICCATI.

par Gabriel VIGUIER.

Parmi les équations différentielles, l'équation de Riccati est l'une des plus remarquables car « la simple connaissance d'une solution particulière permet son intégration complète ». A côté de cela, si l'on remarque qu'il est facile de la rattacher à l'équation linéaire homogène du second ordre et à la dérivée schwarzienne du troisième ordre, on conçoit aisément que l'étude d'une telle équation ne peut qu'amener des problèmes nombreux et complexes.

L'intégrale générale de l'équation de Riccati dépendant homographiquement de la constante d'intégration, il en résulte des conséquences géométriques innombrables.

C'est la géométrie différentielle projective, étudiée par M. Elie CARTAN [A], et c'est aussi, comme l'entrevoit M. A. BUHL [B], l'existence « d'univers projectifs avec des gravifiques projectives » analogues aux gravifiques einsteiniennes. Tous ces développements géométriques dépendent initialement de la notion de transformation homographique, c'est-à-dire dans le cas d'une variable, d'une équation différentielle de Riccati.

Dans le premier chapitre de notre étude, nous nous attachons aux formes canoniques de l'équation de Riccati écrite d'abord sous sa forme classique :

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0.$$

Puis nous utilisons les transformations étudiées par L. RAFFY [C] et plus tard, par M. René LAGRANGE [D]. Ces auteurs obtenaient les formes :

$$(b) \quad u' + u^2 = X(x)$$

$$(c) \quad t'' = Xt, \text{ en posant } u = \frac{d \log t}{dx}$$

Mais dans les deux cas, la fonction $X(x)$ n'est pas explicitée. Nous nous attachons, grâce à des notations appropriées, à donner la forme remarquable :

$$(d) \quad u' + u^2 = \varphi' + \varphi^2 - PR$$

où φ est une fonction de x dépendant de deux des coefficients P , Q et R .

Nous devons préciser que la variable d'intégration est conservée dans tous nos développements pour éviter les difficultés de quadrature qui se présentent dans de tels changements (voir les exemples de M. J. DRACH [E]).

Ces données étant admises comme base de nos calculs, nous établissons une famille de formes canoniques (E) du type (d) dépendant d'une fonction arbitraire, et nous étudions quelques cas d'intégrabilité élémentaires.

Nous terminons ce premier chapitre en mettant (a) sous la forme schwarzienne du troisième ordre :

$$(e) \quad \{\eta\}_x = \{\xi\}_x + 2PR$$

et sous la forme linéaire du second ordre :

$$(f) \quad \frac{Y''}{Y} = \frac{F''}{F} - PR$$

où ξ et F sont deux fonctions connues de la variable x .

Les trois chapitres qui suivent contiennent quelques applications géométriques de l'équation de Riccati, que l'on peut rapprocher de l'étude des courbes du plan projectif faite par G. HALPHEN [F] et plus tard par M. Elie CARTAN.

Le champ est encore vaste pour de nouvelles recherches. Par exemple, la considération du problème, dans l'espace et sur des courbes gauches, conduit, non plus à une seule, mais à trois équations de Riccati et notre étude des courbes planes peut être regardée comme projection d'un phénomène spatial plus général.

Ce qui permet alors de se demander si la véritable canonisation géométrique de l'équation de Riccati n'est point dans l'espace et non dans le plan.

Notre présent mémoire est seulement le point de départ de riches propriétés géométriques de l'équation de Riccati dont nous ne quittons guère les bases.

Ceci n'empêche pas qu'il serait aisé de relier nos recherches à d'autres particulièrement savantes, ayant trait à l'équation de Riccati considérée de points de vue très différents.

Un géomètre roumain, M. N. ABRAMESCU [G] vient d'étudier tout récemment, des courbes planes telles que le lieu du centre de la conique osculatrice soit une parabole. Il trouve que ces courbes sont déterminables par l'équation de Riccati.

$$y' = y^2 + x$$

Joli problème, à la manière de G. HALPHEN, rajeuni par M. Elie CARTAN, mais problème purement analytique pour Pierre BOUTROUX [H] qui s'efforce d'étudier la même équation de Riccati en lui assignant pour équation dite « asymptotique » :

$$y' = y^2 + 1, \text{ avec l'intégrale immédiate: } y = \text{tang}(x + C)$$

Là où l'on ne peut intégrer, on recherche un « voisinage » intégrable, parfois très dégénéré. C'est ce que nous avons fait et nous nous sommes astreints à cultiver les figures à la fois dégénérées et esthétiques.

Nos auteurs fondamentaux sont, en France, HALPHEN, DARBOUX, CARTAN, DRACH, et, en ce qui concerne l'étranger, Félix KLEIN [I] réimprimé en 1933. Cet ouvrage paraît insuffisant quant aux accointances du sujet avec les recherches de SCHWARZ, CAYLEY, SYLVESTER,...; ces derniers travaux ayant surtout en vue la série hypergéométrique dont l'étude n'est pas présentement dans le plan de notre exposé.

Les réductions de notre Chapitre I sont à rapprocher de travaux plus récents dûs à M. DRAGOSLAW, S. MITRINOWICH, Professeur à l'Université de Scopje (*Yougoslavie*). Nous nous proposons, dans des publications ultérieures de rendre un hommage plus détaillé aux travaux de cet excellent géomètre.

C'est à M. A. BUHL, notre Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, que nous devons d'avoir entrepris les recherches dont nous publions actuellement les résultats. Il nous a, non seulement donné de précieux conseils, mais par la correspondance qu'il a bien voulu entretenir avec nous, il nous a aidé à surmonter de nombreuses difficultés. Il a enfin guidé et enrichi notre formation mathématique.

Nous le prions de bien vouloir trouver ici, avec nos remerciements pour l'intérêt qu'il n'a pas cessé, depuis, de porter à nos travaux, l'expression de notre gratitude et de notre profond respect.

Toutefois, M. BUHL, atteint par l'honorariat en 1945, n'a pu suivre cette thèse jusqu'à sa soutenance ; à M. Robert DELTHEIL, qui a bien voulu accepter de le remplacer à la présidence du Jury, nous adressons nos plus sincères témoignages de reconnaissance.

CHAPITRE I

L'équation de Riccati et ses formes canoniques.

II. — Obtention de formes canoniques.

Considérons l'équation différentielle du premier ordre :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0$$

où P, Q et R sont trois fonctions de x .

Nous conviendrons avec G. DARBOUX [J] de l'appeler «équation de Riccati» bien que le géomètre italien ne se soit attaché qu'au cas réduit :

$$\frac{d\sigma}{dt} = a\sigma^2 + bt^m$$

Appliquons à (1), deux fois de suite, la transformation (K) de René LAGRANGE [E] :

$$(2) \quad (K) \quad \begin{aligned} Py + y_1 + \frac{Q}{2} &= 0 \\ y_1 + \frac{P'}{2P} + z &= 0; \end{aligned}$$

utilisant alors la notation :

$$(3) \quad f = \frac{1}{2} \left(Q - \frac{P'}{P} \right)$$

la forme canonique obtenue s'écrit, les accents désignant les dérivations en x ,

$$(4) \quad z' + z^2 = f' + f^2 - PR.$$

ainsi, par la transformation classique

$$(5) \quad Py = z - f$$

et grâce à la notation (3) nous avons pu mettre l'équation de Riccati sous la forme canonique (4) dont le second membre a une forme intéressante.

De même, si nous considérons la transformation de RAFFY [C]

$$(6) \quad y(u - g) + R = 0$$

où

$$(7) \quad g = -\frac{1}{2} \left(Q + \frac{R'}{R} \right)$$

nous obtenons la seconde forme canonique :

$$(8) \quad u' + u^2 = g' + g^2 - PR$$

et la relation homographique :

$$(9) \quad (z-f)(u-g) + PR = 0$$

nous permet de passer de l'équation (4) à l'équation (8).

Remarquons que les deux transformations (5) et (6) et les deux formes canoniques (4) et (8) ne diffèrent pas entre elles d'une manière essentielle ; il suffit, en effet, pour le voir, d'adjoindre à l'équation générale (1), l'équation :

$$(10) \quad t' + Rt^2 - Qt + P = 0$$

qui admet pour solution : $t = \frac{1}{y}$

Appliquant alors à cette dernière la transformation (5), nous obtenons la forme canonique (8).

Nous avons cependant indiqué les deux formes (4) et (8) car, dans la suite de notre étude, nous aurons parfois intérêt à préférer l'une à l'autre.

12. — Famille de Formes canoniques.

Observant l'analogie de structure des seconds membres des équations (4) et (8), il était logique de se demander s'il n'était point possible d'obtenir une famille de formes canoniques ayant pour second membre la forme (4) ou (8).

Nous partons de :

$$(4) \quad z' + z^2 = f' + f^2 - PR.$$

Si nous posons :

$$(11) \quad a = \theta' + \theta^2 - f' - f^2 + PR$$

$$(12) \quad h = -\theta - \frac{a'}{2a}$$

θ étant une fonction arbitraire de x , la transformation

$$(13) \quad (z-\theta)(v-h) + a = 0$$

permet de passer de la forme (4), à la forme :

$$(14) \quad v' + v^2 = h' + h^2 - a$$

Ainsi, à partir de l'équation de Riccati la plus générale (1), grâce à la transformation,

$$(15) \quad (Py + f - \theta)(v - h) + a = 0,$$

qui résulte de la combinaison des équations (5) et (13), nous obtenons la famille (E) de formes canoniques (14) dépendant d'une fonction arbitraire θ de la variable x .

L'identité de forme des expressions (4) et (14) nous fait penser à considérer la famille (E) comme forme canonique d'une certaine équation de Riccati dont elle pourrait être déduite, par une transformation analogue à celle qui nous a permis de passer de (1) à (4).

Comparant les notations (3) et (12), nous pouvons prendre pour nouvelle équation de Riccati l'équation :

$$(16) \quad t' + \frac{a}{\rho} t^2 - \left(2\theta + \frac{\rho'}{\rho} \right) t + \rho = 0$$

où ρ est une fonction quelconque de x .

Nous obtenons bien la forme canonique (14) lorsque nous appliquons à (16) la transformation :

$$(17) \quad \frac{a}{\rho} t = v - h$$

Avec $\rho = \text{constante} = k$, l'équation (16) s'écrit :

$$(E) \quad (18) \quad t' + \frac{a}{K} t^2 - 2\theta t + K = 0$$

Ayant déterminé la fonction arbitraire θ et la constante K de façon que (18) soit intégrable, il nous sera possible d'intégrer l'équation de Riccati la plus générale, puisque la transformation :

$$(19) \quad Py \, t = (\theta - f) t - K$$

nous permet de passer de (18) à (1).

Proposons-nous par exemple, d'intégrer l'équation

$$(20) \quad y' - \frac{1}{x^2} y^2 + 2xy - x(2x^2 - x + 2) = 0$$

Nous avons :

$$f = x + \frac{1}{x}$$

et :

$$f' + f^2 - PR = \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)' + \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2$$

d'où la famille :

$$(E) \quad (21) \quad t' + \frac{\theta' + \theta^2 - \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)' - \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2}{K} t^2 - 2\theta t + K = 0$$

Prenons :

$$\theta = x + \frac{1}{x} - 1$$

$$K = 1$$

L'équation (21) se réduit à :

$$t' - 2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) t + 1 = 0$$

équation linéaire du premier ordre, qui admet pour intégrale générale :

$$t = x^2 e^{x(x-1)} \left[C - \int \frac{e^{x(1-x)} dx}{x^2} \right]$$

L'intégrale générale de (20) s'écrit alors :

$$(22) \quad y = x^2 \cdot \frac{1+t}{t}$$

13. — Sur quelques cas élémentaires d'intégrabilité.

La comparaison des équations (4) et (14) fournit la solution évidente :

$$z = v, \quad \text{et} \quad \theta = h$$

qui portée dans (13), donne la valeur :

$$z = \theta \pm \sqrt{-a}$$

θ devant vérifier la relation (12), qui s'écrit :

$$4\theta + \frac{a'}{a} = 0$$

où, compte tenu de (11),

$$(23) \quad \theta'' + 6\theta\theta' + 4\theta^3 - 4\Phi\theta - \Phi' = 0$$

avec $\Phi = f' + f^2 - PR$.

L'équation de Riccati (1) est intégrable lorsqu'il est possible de trouver une fonction θ vérifiant l'équation différentielle (23).

Nous signalerons, à ce propos, les cas élémentaires suivants :

1°) Le cas $\theta = 0$, qui fournit l'équation :

$$z' + z^2 = \text{constante, immédiatement intégrable}$$

2°) Le cas $\theta = \text{constante} = A$, qui donne, pour Φ , d'après (23) l'expression générale :

$$\Phi = A^2 - B e^{-4At}$$

où B désigne une constante arbitraire. Il en résulte l'équation :

$$z' + z^2 = A^2 - B e^{-4At}$$

que l'on sait, par suite, intégrer.

3^o) Le cas $\theta = f$, auquel correspondent les relations :

$$a = PR; \quad Q = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{R'}{R} \right),$$

d'où l'équation de Riccati :

$$y' + Py^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{R'}{R} \right) y + R = 0,$$

intégrable, puisque l'équation (4) correspondante admet la solution :

$$z = -\frac{1}{4} \left(\frac{P'}{P} + \frac{R'}{R} \right) + \sqrt{-PR}$$

Nous retrouvons ici le cas d'intégrabilité signalé par M. BUHL, savoir celui de l'équation :

$$y' - \Phi y = \psi(x) [y^2 - \varphi^2(x)]$$

dont les coefficients φ, Φ, ψ vérifient la condition :

$$\varphi' - \Phi \varphi = 0;$$

En effet, nous avons dans ce cas :

$$P = -\psi, \quad Q = -\Phi, \quad R = \varphi^2 \psi$$

et la relation

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{P'}{P} - \frac{R'}{R} \right)$$

s'écrit bien :

$$\varphi' - \Phi \varphi = 0$$

131. — Les exemples de René Lagrange.

M. R. LAGRANGE, faisant appel à des transformations linéaires simples (K), que nous avons d'ailleurs exploitées au paragraphe 11 (transformations 2), et à des transformations homographiques (H) à coefficients constants, détermine toute une famille de cas d'intégrabilité par quadratures de l'équation de Riccati. Appliquons les à notre famille (E) dans le but d'étendre ces cas connus.

1^o Par exemple, nous pourrions dire que (1) sera intégrable par quadratures lorsque l'on pourra trouver une fonction θ vérifiant la relation différentielle :

$$(24) \quad (\theta' + \theta^2 - f' - f^2 + PR)\lambda^2 - 2\theta\lambda\mu + \mu^2 = 0$$

à coefficients λ, μ constants et non simultanément nuls.

Il est facile de voir, en effet, que, dans ce cas, l'équation (18) admet la solution :

$$t = K \frac{\lambda}{\mu}$$

et, par conséquent, que l'équation générale (1) admet l'intégrale particulière :

$$y = \frac{(\theta - f) \lambda - \mu}{P. \lambda}$$

2° Appliquons à (18) la transformation (K), nous aurons un second cas d'intégrabilité par quadratures en écrivant que l'équation transformée par le changement de fonction inconnue :

$$t = \frac{K}{a} (\theta - t_1)$$

admet la solution :

$$t_1 = \frac{\lambda}{\mu};$$

θ doit alors vérifier la relation

$$(25) \quad a \lambda^2 + a' \lambda \mu - \rho \mu^2 = 0$$

avec :

$$\rho = \theta a' - a \theta' + a(\theta^2 - a).$$

Nous retrouvons, en prenant $\rho = 0$, le cas particulier étudié par Pompéiu et Minetti [K] et signalé par René LAGRANGE.

3° Appliquons ensuite à l'équation (18) la transformation (H)

$$t = K \frac{A \tau + B}{C \tau + D}; \quad AD - BC \neq 0;$$

Nous poserons :

$$(26) \quad \begin{cases} P_1 = \frac{a A^2 - 2\theta AC + C^2}{AD - BC} \\ Q_1 = \frac{a AB - 2\theta(AD + BC) + CD}{AD - BC} \\ \rho_1 = \frac{\rho A^2 + 2\sigma AC + \nu C^2}{AD - BC} \end{cases}$$

avec :

$$\rho = \theta a' - a \theta' + a(\theta^2 - a); \quad \sigma = -\frac{a'}{2} + \theta(a - \theta^2)$$

$$\nu = \theta' + \theta^2 - a$$

et nous effectuerons le changement de fonction :

$$P_1 \tau + \tau_1 + \frac{Q_1}{2} = 0.$$

Nous obtiendrons un troisième cas d'intégrabilité en écrivant que l'équation transformée admet la solution :

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{\mu},$$

c'est-à-dire qu'il doit exister une fonction θ vérifiant la relation :

$$P_1 \lambda^2 + P_1' \lambda \mu - \rho_1 \mu^2 = 0.$$

4° Ayant appliqué à (18) la transformation (K), nous effectuerons successivement les changements de fonction inconnue :

$$t_2 = t_1 + \frac{a'}{2a}, \quad t_2 = K \frac{A \tau_1 + B}{C \tau_1 + D}$$

qui correspondent aux transformations (K) et (H).

Si nous posons :

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{a a''}{2} - \frac{3}{4} a'^2 - a \rho_1, \\ \beta_1 = -\frac{a \theta'' + \theta a''}{4} + \frac{3}{4} a' \theta' + \frac{\theta \rho - a \sigma}{2}, \\ \gamma_1 = \frac{4 \theta \theta'' + a''}{12} - \frac{\theta'^2}{2} + \frac{4 \theta \sigma - a \nu - \rho}{6}, \\ \delta_1 = \frac{\theta''}{4} + \frac{\theta \nu - \sigma}{2}, \\ \varepsilon_1 = -\nu; \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons un quatrième cas d'intégrabilité en écrivant que l'expression :

$$(29) \quad \varphi_1(x; \lambda, \mu) = \frac{\alpha_1 \lambda^4 + 4 \beta_1 \lambda^3 \mu + 6 \gamma_1 \lambda^2 \mu^2 + 4 \delta_1 \lambda \mu^3 + \varepsilon_1 \mu^4}{(a \lambda^2 - 2 \theta \lambda \mu + \mu^2)^2}$$

est constante pour certaines valeurs de λ et μ non simultanément nulles.

En particulier, supposant nulle l'expression (29), nous obtenons le cas $\alpha_1 = 0$, donné par Minetti, lorsque $\mu = 0$.

14. — L'équation linéaire du second ordre.

Reprenons la forme canonique :

$$(4) \quad z' + z^2 = f' + f^2 - PR$$

et posons :

$$(30) \quad z = \frac{Z'}{Z}, \quad f = \frac{F'}{F}$$

Nous obtenons l'équation linéaire du second ordre :

$$(31) \quad \frac{Z''}{Z} = \frac{F''}{F} - PR$$

De même, posant :

$$(32) \quad u = \frac{U'}{U}, \quad g = \frac{G'}{G}$$

L'équation (8) s'écrit :

$$(33) \quad \frac{U''}{U} = \frac{G''}{G} - PR.$$

G. Darboux [H] partait des équations harmoniques :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[\varphi(x+y) - \psi(x-y) \right] z$$

qui avaient la propriété d'admettre une ∞^1 de solutions particulières de la forme :

$$f(x+y) \cdot f_1(x-y)$$

Il arrivait à des équations du type :

$$\frac{f''(t)}{f(t)} = \varphi(t) + h$$

$$\frac{f_1''(t)}{f_1(t)} = \psi(t) + h$$

Ainsi, grâce à (31) et à (33) qui représentent l'équation de Riccati la plus générale, nous rejoignons le cas de G. Darboux lorsque le produit PR est constant.

Quant à la transformation permettant de passer de (31) à (33) lorsque $PR = +C^2$, C étant une constante quelconque, elle peut se représenter par le système différentiel du premier ordre

$$(34) \quad \begin{cases} kZ = U' + Uf, \\ -\frac{C^2}{k} U' = Z' - Zf, \end{cases}$$

k étant une nouvelle constante différente de zéro.

Étendons ces résultats à la famille (E) représentée par l'équation

$$(14) \quad v' + v^2 = h' + h^2 - a$$

Posant : (35) $v = V'/V$, $h = H'/H$, nous obtenons l'équation linéaire du second ordre

$$(36) \quad \frac{V''}{V} = \frac{H''}{H} - a$$

qui rentre dans les cas envisagés par G. Darboux lorsque, C_1 étant une constante, la fonction θ est telle que :

$$(37) \quad \theta' + \theta^2 = f' + f^2 - PR + C_1^2$$

Enfin, la comparaison des formes (31) et (36) conduit au système différentiel du premier ordre,

$$(38) \quad \begin{cases} k_1 Z = V' - Vh \\ -\frac{C_1^2}{k_1} V = Z' - Zf, \end{cases}$$

k_1 jouant le même rôle que la constante k du système (34).

15. — La résolvante schwarziennne du troisième ordre.

Si maintenant nous introduisons les fonctions η et ξ déterminées par les égalités :

$$(39) \quad \begin{aligned} \eta' \cdot Z^2 &= 1 \\ \xi' \cdot F^2 &= 1, \quad \text{où} \quad \xi' \cdot e^{\int Q dx} = P \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation différentielle du troisième ordre

$$(40) \quad \{\eta\}_x = \{\xi\}_x + 2PR$$

dans laquelle le premier membre et, le premier terme du second membre représentent symboliquement, selon la notation de F. KLEIN, les schwarziens :

$$\frac{\eta''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'} \right)^2, \quad \text{et} \quad \frac{\xi''}{\xi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\xi''}{\xi'} \right)^2$$

des deux fonctions η et ξ .

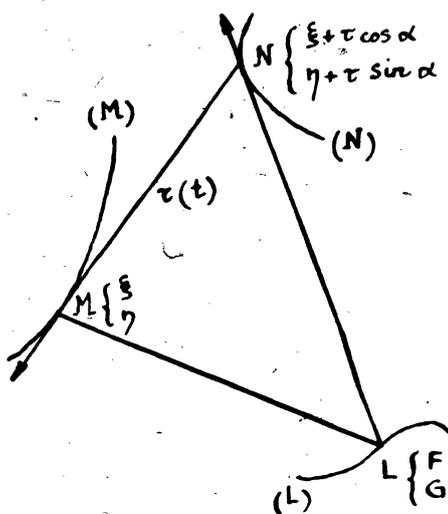
Nous dirons que l'équation (40) est la résolvante schwarziennne complète du troisième ordre de l'équation de Riccati :

$$(1) \quad y' + Py^2 + Qy + R = 0$$

CHAPITRE II

Développantes Généralisées d'une courbe plane

21. — Position du problème.



Soient deux courbes planes données en coordonnées paramétriques :

$$(M) \quad \xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t),$$

$$(L) \quad F = F(t), \quad G = G(t),$$

les points $M(\xi, \eta)$ et $L(F, G)$ correspondant à une même valeur du paramètre t . Sur la tangente en M à la courbe (M) , nous portons la longueur $MN = \tau(t)$.

Nous engendrons une courbe (N) . Imposons-lui la condition d'avoir sa tangente qui passe par le point L . La détermination de la courbe (N) : c'est-à-dire de $\tau(t)$, se ramène alors

à l'étude d'une équation de Riccati.

22. — Mise en équation.

Nous allons tout d'abord introduire quelques notions nouvelles.

Les ∞^1 courbes (N) , ainsi déterminées par l'équation de Riccati en τ , pourront être regardées comme des développantes de la courbe-base (M) , développantes dites « généralisées » par opposition aux développantes classiques de (M) . Nous pouvons établir un rapprochement entre nos courbes (N) et les développantes projectives de M. E. Cartan et voir dans la recherche des premières une sorte de « développement projectif » de la courbe (M) . En effet, à chaque point M , de la courbe-base, nous associons sa tangente et, sur cette droite, nous définissons un rapport anharmonique. Dans ses développantes projectives de deuxième espèce, M. E. Cartan considère la conique (L) osculatrice en M à la courbe-base; la tangente en N est astreinte à être tangente à

la conique en P, le point P décrivant lui-même une développante de première espèce de (M).

Enfin, aux trois courbes: courbe-base (M), courbe-adjointe (L), développante (N), est associé un triangle MLN que nous appellerons «triangle fondamental tangent».

Désignons par σ l'arc de la courbe (M). Les accents désignant les dérivations par rapport à t , nous avons:

$$(42) \quad \text{tang } \alpha = \frac{\eta'}{\xi'}; \quad \cos \alpha = \frac{\xi'}{\sigma'}; \quad \sin \alpha = \frac{\eta'}{\sigma'}; \quad \alpha' = \frac{\xi' \eta'' - \xi'' \eta'}{\sigma'^2}$$

Les coordonnées de N étant :

$$\xi + \tau \cdot \cos \alpha \quad \text{et} \quad \eta + \tau \sin \alpha$$

exprimons que la tangente à la développante généralisée passe par le point L :

$$(43) \quad \frac{F - \xi - \tau \cdot \cos \alpha}{\xi' + (\tau \cdot \cos \alpha)'} = \frac{G - \eta - \tau \cdot \sin \alpha}{\eta' + (\tau \cdot \sin \alpha)'}$$

les termes en τ , τ' disparaissant, il en résulte l'équation de Riccati :

$$F - \xi \quad G - \eta \quad \left| \begin{array}{c} \tau' - \alpha' \tau^2 + \\ \cos \alpha \quad \sin \alpha \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right| \quad \alpha' \tau + \quad \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ \xi' & \eta' \end{array} \right| = 0$$

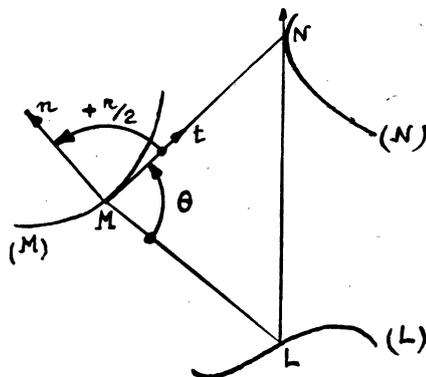
Posons :

$$(44) \quad \omega_1 = \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ \xi' & \eta' \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \omega_2 = \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ -\eta' & \xi' \end{array} \right|$$

Nous voyons que :

$$\omega_1 = \vec{ML} \wedge \vec{Mt} = \overline{ML} \cdot \sigma' \cdot \sin \theta$$

$$\omega_2 = \vec{ML} \wedge \vec{Mn} = \overline{ML} \cdot \sigma' \cdot \cos \theta$$



Si nous comparons à l'équation de Riccati générale (r), nous' obtenons comme valeurs des coefficients, P, Q et R :

$$(45) \quad P = -\frac{\alpha' \sigma'}{\omega_1}, \quad Q = \alpha' \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad R = \sigma';$$

d'où l'équation différentielle du problème

$$(46) \quad \boxed{\omega_1 (\tau' + \sigma') + \alpha' \tau (\omega_2 - \sigma' \tau) = 0.}$$

Utilisons la notation

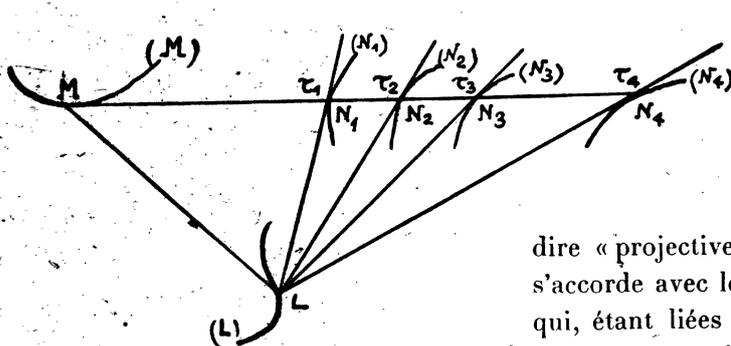
$$(7) \quad g = -\frac{1}{2} \left(Q + \frac{R'}{R} \right) \text{ soit}$$

$$(47) \quad g = -\frac{1}{2} \frac{(F-\xi)\eta'' - (G-\eta)\xi''}{(F-\xi)\eta' - (G-\eta)\xi'} = \frac{F'\eta - G'\xi - \omega'_1}{2\omega_1}$$

La transformation (48) $\tau(u-g) + \sigma' = 0$ permet d'écrire l'équation (46) sous la forme (8), ou :

$$(49) \quad u' + u^2 = g' + g^2 + \frac{\eta''\xi' - \eta'\xi''}{\omega_1}$$

Nous adoptons cette forme comme définitive pour l'équation de Riccati intervenant dans le problème.



Il est intéressant de remarquer qu'on a toute une famille de courbes (N) à propriétés anharmoniques, c'est-à-dire « projectivement égales ».

Cela s'accorde avec les coordonnées de N qui, étant liées linéairement à l'inconnue τ , contiennent homographiquement la constante d'intégration.

quement la constante d'intégration.

Ainsi, une tangente à la courbe-base coupe quatre développantes en quatre points N_1, N_2, N_3, N_4 dont le rapport anharmonique est celui des quatre tangentes LN_i ou encore celui des quatre angles fondamentaux MLN_i .

Considérons maintenant le problème d'un autre point de vue et, pour cela, traçons arbitrairement trois courbes (M), (L), (N). A partir du point M, nous obtenons une expression en t du segment \overline{MN} , puis L sur la courbe (L) par intersection avec la tangente en N à (N), et une équation de Riccati déterminée par (M) et (L). Cette dernière, dont \overline{MN} est solution particulière, est, par suite, intégrable par quadratures tout en dépendant de trois fonctions arbitraires. Mais une équation de Riccati, écrite arbitrairement :

$$(I) \quad \tau' + P\tau^2 + Q\tau + R = 0$$

dépend aussi de trois fonctions arbitraires et elle est d'une transcendance quelconque. Ainsi, à partir de trois courbes tracées arbitrairement, on peut déterminer à volonté, des équations de Riccati, élémentaires ou transcendentes.

Il y a des manières profondément différentes de poursuivre les conséquences d'une même hypothèse arbitraire, ce qui paraît fort vraisemblable quant

aux faits ordinaires, mais ce qui est établi ici à propos d'équations différentielles et promet peut-être beaucoup pour des travaux mathématiques à venir.

23. — Les courbes isométriques.

Les relations (45) s'écrivent :

$$(50) \quad \omega_1 = -\alpha' \frac{R}{P}, \quad \omega_2 = Q \frac{R}{P}, \quad \sigma' = R$$

Ainsi, étant donné l'équation de Riccati, la plus générale :

$$(1) \quad y' + Py^2 + Qy + R = 0$$

où P, Q et R sont trois fonctions quelconques de la variable t , la troisième égalité de (50), $\sigma' = R$, nous permet de choisir arbitrairement $\xi(t)$ et $\eta(t)$, ce qui donne toute une famille de courbes (M) « isométriques ».

Conformément à la terminologie de M. BOULIGAND [L] nous qualifions nos courbes d'isométriques et non « d'applicables », car le terme « applicables » comporte, comme l'a remarqué B. GAMBIER [M], certaines restrictions.

Les arcs de ces courbes (M) limités à des points correspondants ont donc une même longueur.

De plus, les formules (50) donnent linéairement F et G

$$(51) \quad F - \xi = -\frac{\alpha' \sin \alpha + Q \cos \alpha}{P}, \quad G - \eta = \frac{\alpha' \cos \alpha - Q \sin \alpha}{P}$$

La courbe adjointe (L) est ainsi parfaitement définie et si, en outre, nous désignons par θ l'angle de \vec{ML} avec la tangente \vec{Mt} à la courbe-base (voir paragraphe 22) nous avons :

$$\text{tang } \theta = \frac{\alpha'}{Q}$$

d'où la nouvelle forme des égalités (51)

$$(51') \quad \left\{ \begin{array}{l} F - \xi = -\frac{Q}{P} \cdot \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\cos \theta} \\ G - \eta = -\frac{Q}{P} \cdot \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \theta} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire $ML = \frac{\sqrt{Q'^2 + \alpha'^2}}{P}$

Essayons d'illustrer cette réciproque par un exemple simple et pour cela considérons l'équation de Riccati

$$\tau' + \frac{1}{a} \tau^2 + (t - t_0) \tau + a = 0$$

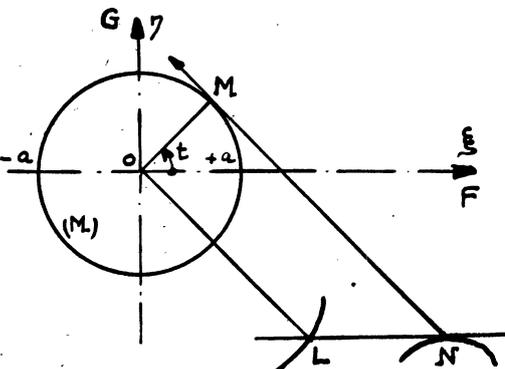
où a et t_0 sont deux constantes quelconques. La troisième égalité (50) montre que les courbes isométriques du problème vérifient la relation $R = \sigma' = a$.

Nous pouvons alors prendre comme courbe-base le cercle d'équations paramétriques

$$\begin{cases} \xi = a \cos t \\ \eta = a \sin t \end{cases}$$

L'équation (51) fournit la courbe adjointe

$$\begin{cases} F = a(t - t_0) \sin t \\ G = -a(t - t_0) \cos t \end{cases}$$



et la développante généralisée est donnée par l'égalité :

$$\tau \cdot \left[1 + \frac{e^t}{K + \int \frac{e^t}{v} dt} \right] + a \theta' = 0$$

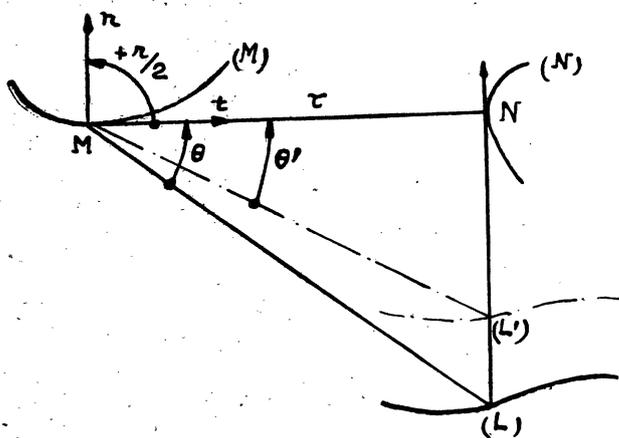
où nous avons posé

$$\theta = t \left(\frac{t}{2} - t_0 \right), \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

K étant une constante d'intégration.

24. — Sur des développantes généralisées particulières

241. — Le triangle fondamental est rectangle, son sommet décrit la développante.



L'équation de Riccati (46) montre l'existence d'une solution particulière obtenue lorsque l'on a simultanément

$$(52) \quad \begin{cases} \tau' + \sigma' = 0 \\ \omega_2 - \sigma' \tau = 0 \end{cases}$$

L'adjointe (L) doit vérifier la relation

(53)

$$\omega_2 = (\sigma_0 - \sigma) \sigma'$$

où σ_0 est une constante d'intégration liée à l'origine des arcs de la courbe-base.

Mais nous avons vu que $\omega_2 = \overline{ML} \cdot \sigma' \cdot \cos \theta$;

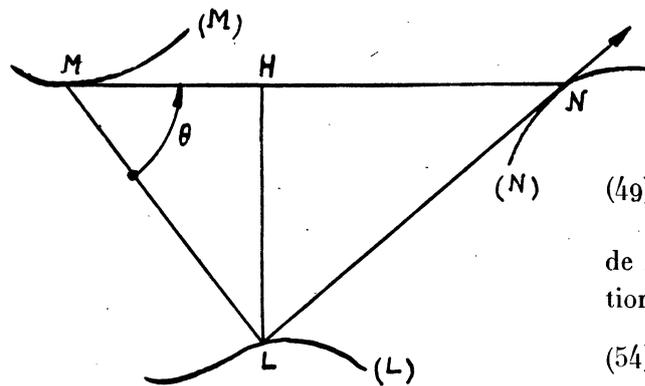
Donc : $\overline{ML} \cdot \cos \theta = \overline{MN} = \sigma_0 - \sigma$.

Le triangle fondamental est rectangle en N et les coordonnées paramétriques du point N sont :

$$\begin{cases} X = \xi + (\sigma_0 - \sigma) \frac{\xi'}{\sigma'} \\ Y = \eta + (\sigma_0 - \sigma) \frac{\eta'}{\sigma'} \end{cases}$$

Ainsi, la projection sur la tangente en M à la courbe-base, du point L correspondant d'une des courbes-adjointes (53) est égale à la longueur de l'arc de la courbe-base décrit par le point M. Elle coïncide avec le point N de la développante généralisée, qui joue, de ce fait, le rôle de développante classique de la courbe (M).

242. — La « sous-tangente généralisée » de la développante (N) est liée par une relation simple à une des hauteurs du triangle fondamental.



Prenons l'équation différentielle, relative au problème, sous sa forme canonique

$$(49) \quad u' + u^2 = g' + g^2 - PR.$$

Pour que cette équation de Riccati admette la solution particulière

$$(54) \quad u = g - \frac{PR}{2g},$$

il faut que les coordonnées paramétriques de la courbe adjointe (L) vérifient la relation

$$\left(\frac{PR}{2g}\right)' - \left(\frac{PR}{2g}\right)^2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{2g}{PR}\right)' + 1 = 0$$

soit, avec les notations (7) et (45),

$$(55) \quad \omega_2 + \frac{\omega_1}{\alpha'} \cdot \frac{\sigma''}{\sigma'} = \sigma'^2 (t_0 - t)$$

Il en résulte la développante particulière déterminée par la solution (54)

$$(56) \quad \tau = \sigma'(t_0 - t).$$

Exprimant les quantités ω_1 et ω_2 en fonction de la longueur \overline{ML} et de l'angle θ , nous pouvons écrire la relation (55) sous la forme :

$$(57) \quad \overline{ML} \cos \theta + \overline{ML} \sin \theta \cdot \frac{\sigma''}{\sigma'} = \overline{MN}$$

Le segment \overline{NH} étant la projection de la tangente \overline{NL} à la développante sur la tangente \overline{MN} à la courbe-base, nous pouvons considérer \overline{NH} comme une « sous-tangente généralisée » de la développante (N), par opposition à la sous-tangente classique.

Par suite, la relation (57) s'écrit plus simplement :

$$(58) \quad \frac{\overline{HN}}{\overline{HL}} = \frac{d L \sigma'}{d \alpha}$$

25. — Existence de deux cas particuliers.

251. — Impossibilité du cas $\omega_1 = 0$

Lorsque $\omega_1 = 0$ l'équation (46) montre que l'on a

$$(59) \quad \frac{F - \xi}{\xi'} = \frac{G - \eta}{\eta'} = \frac{ML}{\sigma'}.$$

Les directions MN, NL et LM sont confondues ; l'équation différentielle dégénère et l'on a :

$$\tau = \frac{\omega_2}{\sigma'} = \overline{ML} \cos \theta = \overline{ML} = \overline{MN}.$$

Les points L et N coïncident. Remarquons alors que le problème a totalement changé de nature et n'est plus « différentiel ».

Deux courbes telles que (M) et (N) n'admettent pas de variation continue pour une tangente commune. On ne peut pas poser en général

$$\frac{F - \xi}{\xi'} = \frac{G - \eta}{\eta'} = \varphi(t) ;$$

avec $\varphi(t)$ fonction arbitrairement choisie, car il résulterait de là

$$\tau = \sigma' \cdot \varphi(t) ;$$

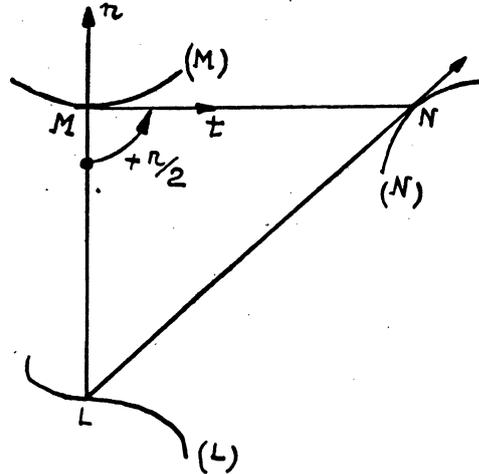
τ deviendrait ainsi fonction arbitraire, ce qui est en contradiction avec le problème dans lequel on suppose que τ est à déterminer.

Donc, le cas $\omega_1 = 0$ est à rejeter, ce qui est d'ailleurs nécessaire pour que les relations d'identification (45) puissent avoir lieu.

252. — Le triangle fondamental est rectangle, son sommet décrit la courbe-base.

Si maintenant, nous avons $\omega_2 = 0$, comme $\omega_2 = \overline{ML} \cdot \sigma' \cdot \cos \theta$ nous voyons que θ est droit : c'est-à-dire :

$$(60) \quad \frac{F - \xi}{-\eta'} = \frac{G - \eta}{\xi'} = \frac{\overline{ML}}{\sigma'}$$



Le point L est sur la normale en M à la courbe-base, le triangle fondamental est rectangle en M.

Quant à l'équation (46) elle se réduit à :

$$(61) \quad \tau' - \frac{\alpha' \sigma'}{\omega_1} \cdot \tau^2 + \sigma' = 0$$

Si l'on admet, comme au paragraphe 242, que l'expression

$$(56) \quad \tau = \sigma' (t_0 - t)$$

est solution particulière de l'équation différentielle (61) il faut que les coordonnées paramétriques de la courbe adjointe vérifient la relation,

$$(62) \quad \omega_1 \cdot \frac{\sigma''}{\sigma'} = \alpha' \cdot \sigma'^2 (t_0 - t)$$

On a donc entre les côtés \overline{MN} et \overline{ML} du triangle fondamental la relation

$$(58) \quad \overline{MN} = \overline{ML} \cdot \frac{dL \sigma'}{d\alpha}$$

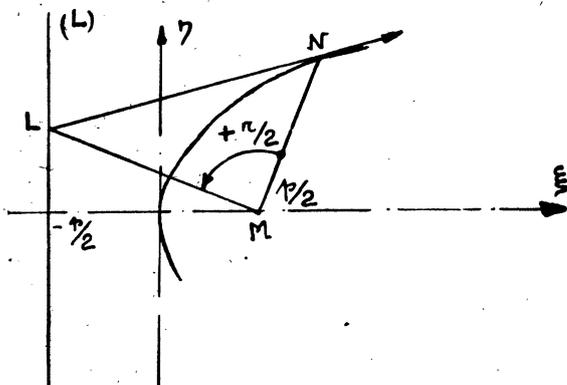
Un calcul simple donne pour le troisième côté \overline{NL} du triangle la relation

$$(63) \quad \overline{NL} = \overline{ML} \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{\xi''^2 + \eta''^2}}{\sigma'^2}$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe-base en M.

Reprenons l'équation (61) qui va nous permettre de retrouver un problème classique de la géométrie élémentaire.

Nous savons que la portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit. Il y a donc, dans notre cas particulier, une génération des coniques lorsque la courbe-base se réduit à un cercle point au foyer F et lorsque la courbe-adjointe est une droite correspondant à la directrice.



En effet, les coordonnées de M étant

$$\xi = p/2, \eta = 0$$

celles de L

$$F = -p/2, G$$

l'équation (61) s'écrit

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)' = \frac{1}{p \cos t - G \cdot \sin t}$$

Prenant alors

$$G = -p \cdot \tan t$$

nous obtenons

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k + \sin t}{p}$$

qui donne bien pour la développante (N) une conique de foyer M et de directrice (L).

2521. — La forme réduite de M. E. CARTAN.

Nous allons étudier la forme réduite de l'équation de Riccati signalée par M. E. CARTAN

$$(64) \quad \tau' + P \tau^2 + 1 = 0.$$

Nous savons que toute équation générale (1) peut-être mise sous la forme

(64).

Identifions-la à l'équation (46), nous avons :

$$(65) \quad \omega_2 = 0, \sigma' = 1, P = -\frac{\sigma'^2}{\rho \cdot \omega_1}$$

Il en résulte que le point L, situé sur la normale en M à la courbe-base est défini par l'expression

$$(66) \quad \overline{ML} = \frac{1}{\rho \cdot P}$$

Considérons maintenant une courbe isométrique de (M); nous avons, pour, une même valeur du paramètre t ,

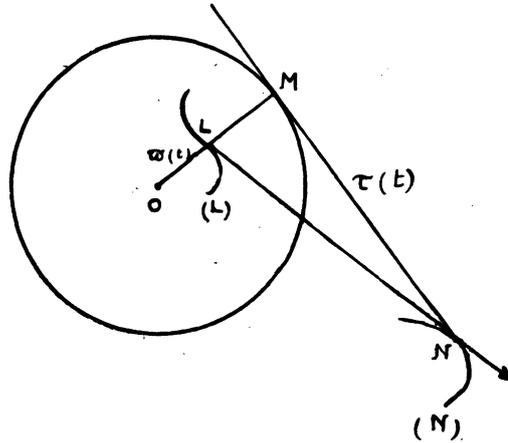
$$\overline{M_1 L_1} = \frac{1}{\rho_1 \cdot P}$$

D'où la relation fondamentale

$$(67) \quad \frac{\overline{M_1 L_1}}{M L} = \frac{\rho}{\rho_1}$$

qui exprime que les distances ML pour deux courbes isométriques sont dans un rapport inverse de celui des rayons de courbure aux points correspondants.

Reprenons notre équation (64) ; il est possible de l'interpréter sur un cercle fixe de rayon r .



Soit donc la courbe-base

$$(68) \quad \xi = \text{cost}, \eta = \text{sint}$$

et la courbe-adjointe

$$(69) \quad F = \varpi(t) \text{cost}, G = \varpi(t) \text{sint}$$

Nous avons

$$\omega_1 = \varpi(t) - r$$

d'où l'équation

$$(70) \quad \tau' + \frac{r}{r - \varpi} \cdot \tau^2 + 1 = 0$$

Ainsi on peut toujours interpréter l'équation (64) conformément à la figure. Le point L de la courbe adjointe associée à (M) décrit une courbe qui, en coordonnées polaires, a pour équation

$$(71) \quad r = \varpi(t) = \frac{P - r}{P}$$

26. — La courbe-base et son adjointe sont des cercles.

Supposons que la courbe-base et son adjointe soient deux cercles concentriques d'équations paramétriques

$$(72) \quad \begin{cases} (M) & \xi = a \cdot \text{cost}, \eta = a \cdot \text{sint}, \\ (L) & F = b \cdot \text{cost}, G = b \cdot \text{sint}; \end{cases}$$

les notations (44) donnent :

$$\omega_1 = a(b - a), \omega_2 = 0.$$

La dernière égalité montre que ce paragraphe peut être considéré comme une application du paragraphe 252 précédent.

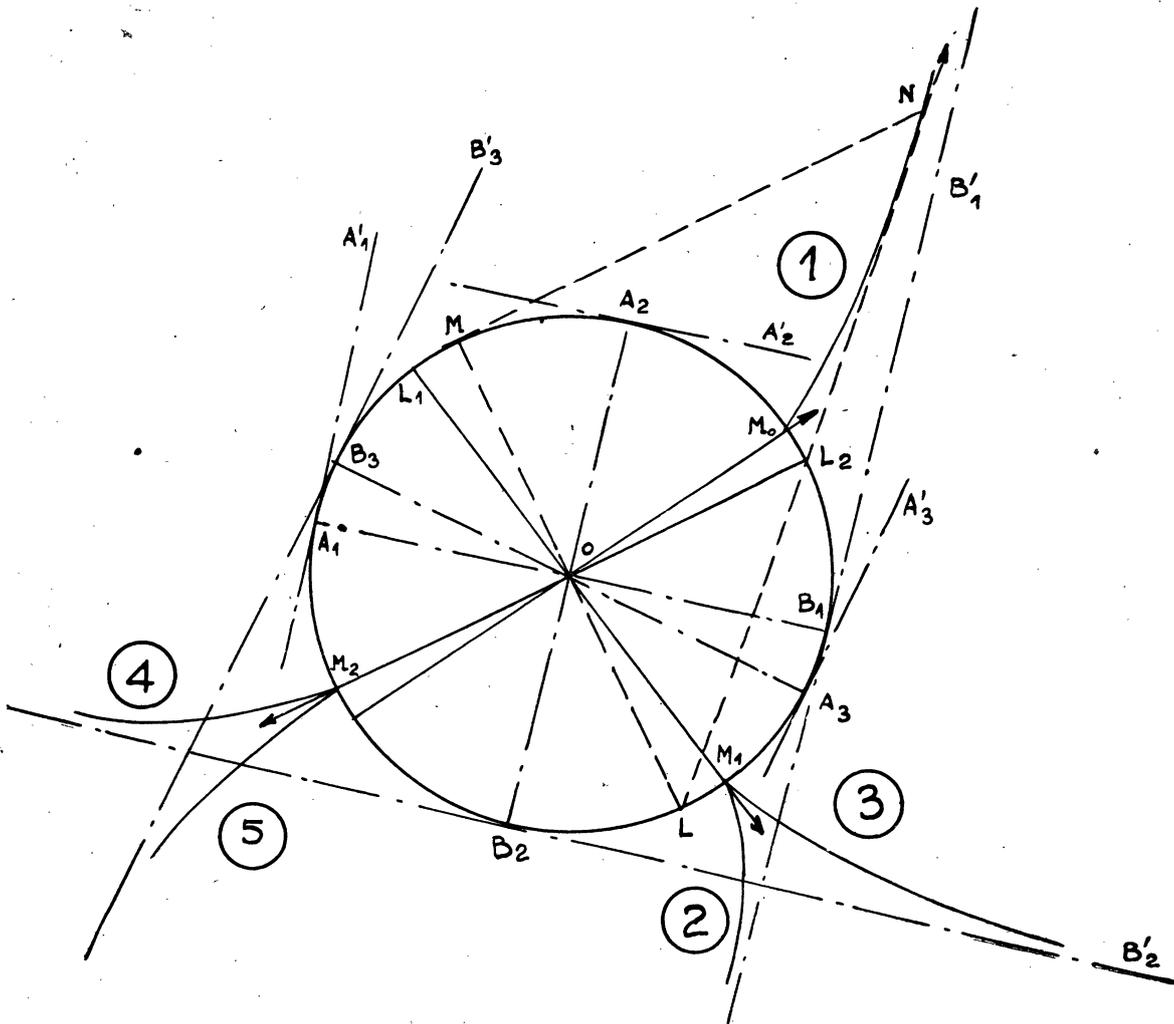
Comme en outre $g = 0$, la forme canonique (40) s'écrit :

$$(73) \quad u' + u^2 = \frac{a}{b-a}$$

d'où les solutions

$$(74) \quad \begin{aligned} \tau &= \sqrt{a(a-b)} \cdot \text{tang} \sqrt{\frac{a}{a-b}} (t_0 - t), \text{ lorsque } a > b \\ \tau &= \sqrt{a(b-a)} \cdot \text{th} \sqrt{\frac{a}{b-a}} (t_0 - t), \text{ lorsque } a < b \end{aligned}$$

261. — Développante généralisée de cercle à ∞^1 points de rebroussement.



Prenons le cas $b = -a$, c'est-à-dire le cas où la développante (N) est déterminée par

$$(75) \quad \tau = a \cdot \sqrt{2} \cdot \text{tang.} \frac{t_0 - t}{\sqrt{2}}$$

La courbe-base et sa courbe-adjointe sont confondues, L étant toujours diamétralement opposé à M.

Le point M_0 correspond à $t = t_0$; c'est un point de rebroussement de première espèce admettant $L_0 M_0$ comme tangente.

L'arc $M_0 M$ croissant, M arrive en A_1 lorsque

$$\frac{t_0 - t}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2};$$

τ est alors infini, d'où la direction asymptotique $A_1 A'_1$ puis l'asymptote $B_1 B'_1$.

Le point M, continuant à décrire le cercle, arrive :

en M_1 lorsque $\frac{t_0 - t}{\sqrt{2}} = \pi$ (point de rebroussement avec tangente $L_1 M_1$)

en A_2 lorsque $\frac{t_0 - t}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{2}$ (branche infinie avec asymptote $B_2 B'_2$)

en M_2 lorsque $\frac{t_0 - t}{\sqrt{2}} = 2\pi$ (point de rebroussement avec tangente $L_2 M_2$)

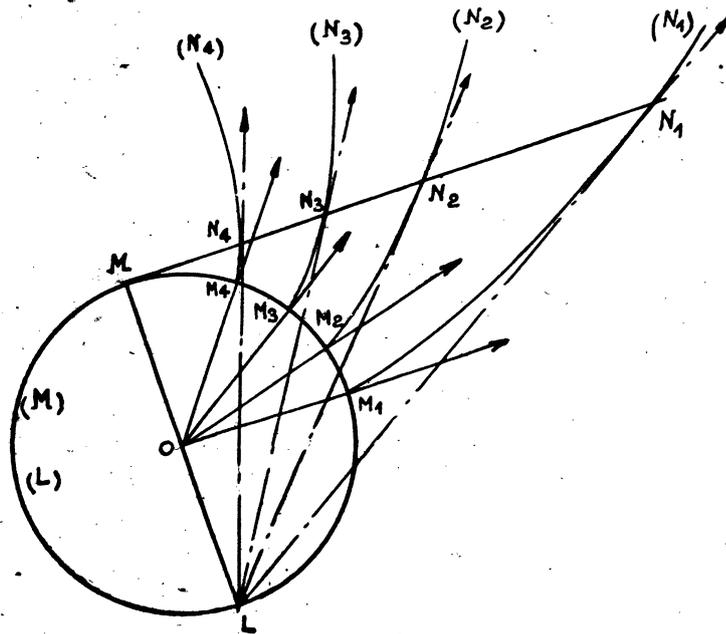
et en A_3 lorsque $\frac{t_0 - t}{\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{2}$ (branche infinie avec asymptote $B_3 B'_3$)

Ainsi, on parcourt successivement les arcs de courbe 1, 2, 3, 4, 5...., qui jouissent d'une propriété géométrique remarquable : d'un point N de l'un de ces arcs, menons la tangente MN au cercle; la tangente en N à la courbe passe par le point L du cercle, diamétralement opposé à M.

Remarquons qu'il est possible de mener, du point N, deux tangentes au cercle, mais une seule répond au problème envisagé. Réciproquement, si nous considérons une seule développante du cercle, c'est-à-dire si nous fixons la constante d'intégration qui intervient dans le calcul de τ , une tangente en M au cercle coupe les différents arcs de la développante en plusieurs points N_i dont un seul vérifie la propriété géométrique. Il y a donc univocité entre les points du cercle et les points de la courbe (N) que nous appellerons : développante généralisée du cercle à ∞^1 points de rebroussement.

Les propriétés anharmoniques des courbes (N) énoncées au paragraphe 22 se retrouvent évidemment dans le cas du cercle et permettent ainsi de voir l'existence de développantes généralisées anharmoniques du cercle, ce qui entraîne la répartition sur le cercle d'une ∞^1 de points de rebroussement.

Faisons une remarque sur l'analogie qui existe entre ces développantes généralisées et les développantes classiques du cercle. Nous plaçant au voisinage du point de rebroussement, il nous est facile de voir que développante



généralisée et développante classique sont confondues en direction au voisinage de ce point.

262. — Développante de cercle généralisée à quatre rebroussements.

Envisageons le cas

$$(76) \quad b = \frac{3}{4} a$$

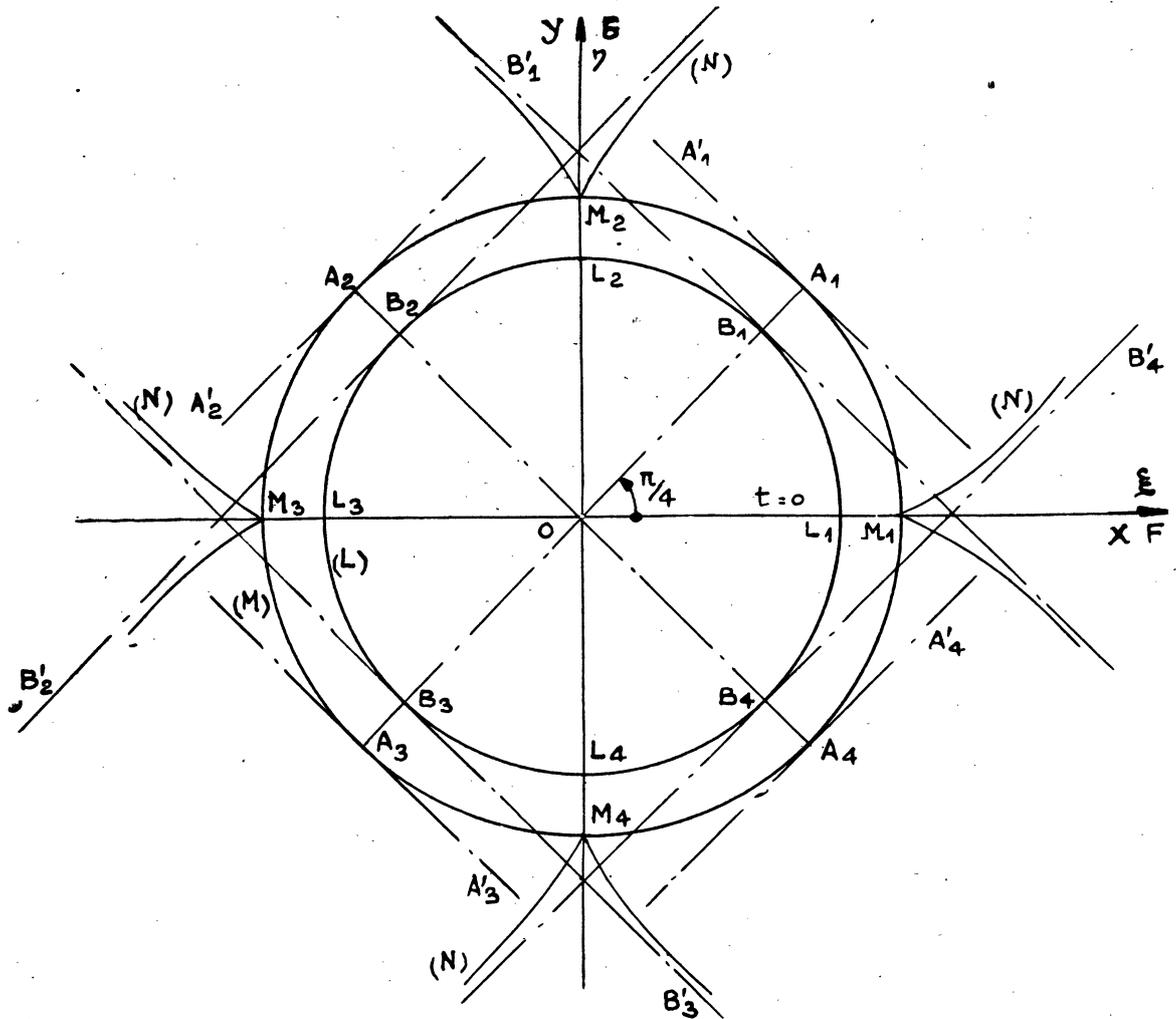
et, pour faciliter la construction de la développante (N), supposons nulle la constante d'intégration.

Nous avons ainsi :

$$(77) \quad 2\tau + a. \operatorname{tang} 2t = 0$$

Les coordonnées paramétriques du point N sont :

$$(78) \quad \begin{cases} X = a \cdot \frac{\cos t}{1 - \tan^2 t} \\ Y = -a \cdot \frac{\sin t}{1 - \tan^2 t} \cdot \tan^2 t \end{cases}$$



La développante admet les axes $o\xi$ et $o\eta$ et les deux bissectrices comme axes de symétrie.

Faisant croître t de 0 à 2π , nous avons obtenu les quatre points de rebroussement :

$$M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4$$

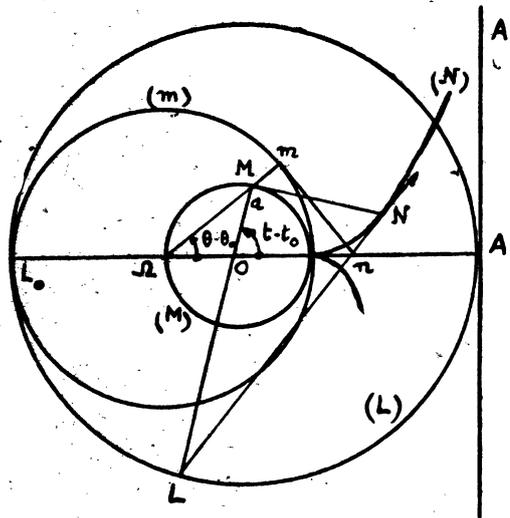
pour $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ et les quatre asymptotes :

$B_1 B'_1, B_2 B'_2, B_3 B'_3$ et $B_4 B'_4$ pour $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

263. — Cas de la cissoïde de Dioclès.

Reprenons la forme réduite (64) de M. E. Cartan.

Dans le cas où le coefficient P est égal à 1, l'équation devient



$$(79) \quad \frac{d\tau}{d\theta} + \tau^2 + 1 = 0$$

avec pour solution

$$(80) \quad \tau = \overline{mn} = \text{tang}(\theta - \theta_0)$$

Nous partons du cercle (m) de rayon $2a = 1$, le lieu du point n est la droite $L_0 \Omega A$

Soit maintenant le cercle (M) « isométrique » du précédent :

$$(81) \quad t - t_0 = 2(\theta - \theta_0).$$

Nous prenons $\overline{MN} = \overline{mn} = \tau_1$

Nous savons que, pour un cercle à adjointe circulaire concentrique, nous avons l'équation différentielle

$$(82) \quad (a - b) \left(\frac{d\tau_1}{dt} + a \right) + \tau_1^2 = 0$$

qui s'écrit, lorsque $b = -3a$ avec $2a = 1$

$$(83) \quad 2 \frac{d\tau_1}{dt} + \tau_1^2 + 1 = 0.$$

Cette dernière nous permet de retrouver l'équation (79) grâce au changement de variable (81).

La développante (N) qui en résulte est parfaitement explicite, c'est une cissoïde, d'asymptote tangente en A au cercle-adjoint (L).

Ainsi, voici la plus simple des cubiques circulaires qui se place parmi les dégénérescences des courbes intégrales de l'équation de Riccati.

L'équation différentielle du problème (46) s'écrit alors :

$$(88) \quad k \xi' \omega (\tau' + \sigma') + \xi' \omega' \tau + \alpha' \tau (k \eta' \omega - \sigma' \tau) = 0$$

soit, avec

$$g = \frac{\omega'}{2k\omega} - \frac{\xi''}{2\xi'}; \quad \text{PR} = -\frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{\omega'}{k\omega}$$

et la transformation

$$\tau(u - g) + \sigma' = 0,$$

la forme canonique

$$(89) \quad u' + u^2 = g' + g^2 + \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{\omega'}{k\omega}.$$

Nous voyons apparaître la solution particulière $u = g + \frac{\xi'}{\xi}$ et l'intégrale générale sera donnée par la relation

$$(90) \quad \frac{\tau \xi'}{\tau \xi' + \sigma' \xi} = -\xi \cdot \omega^h \left[C_1 + \int \frac{d\xi}{\omega^h \cdot \xi^2} \right], \quad \text{si } h = \frac{1}{k}$$

Le problème se trouve donc ramené à une simple quadrature.

274. — Cas particulier $k = 1$.

Nous envisagerons désormais le cas où les points B et L sont placés symétriquement par rapport au point S.

La constante k étant alors égale à 1, l'équation (90) s'écrit :

$$(91) \quad \frac{\tau \xi'}{\tau \xi' + \sigma' \xi} = -\xi \omega \left[C_1 + \int \frac{d\xi}{\omega \xi^2} \right].$$

Si nous supposons que $\omega = \xi^m$, l'égalité (91) donne

$$(92) \quad \tau = \frac{\sigma' \xi}{\xi'} \cdot \frac{1 - C \xi^{m+1}}{m + C \xi^{m+1}}, \quad \text{avec } C = C_1 (m + 1)$$

c'est-à-dire

$$(93) \quad \overline{MN} = \overline{SM} \cdot \frac{1 - C \xi^{m+1}}{m + C \xi^{m+1}}.$$

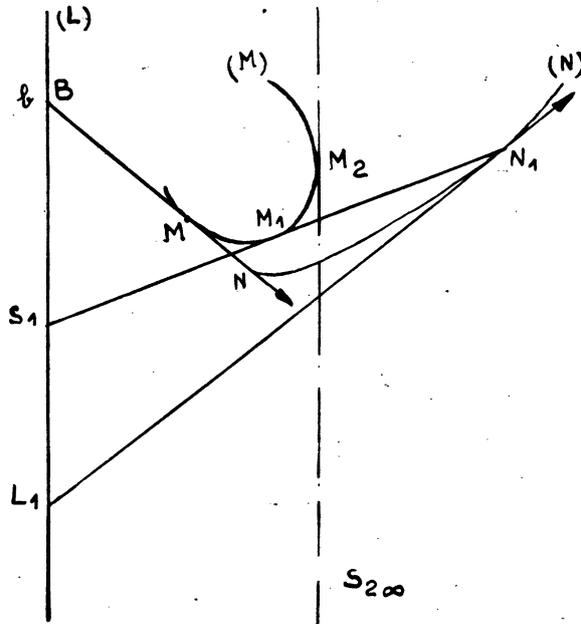
Examinons quelques cas particuliers suivant les valeurs attribuées à m et à la constante C .

On a

1. — $C = \infty$. Dans ce cas $\overline{MN} = -\overline{SM}$.

Le point N est en S.

2. — On a $C = 0$. Nous avons alors (94) $\overline{MN} = \frac{1}{m} \overline{SM}$.



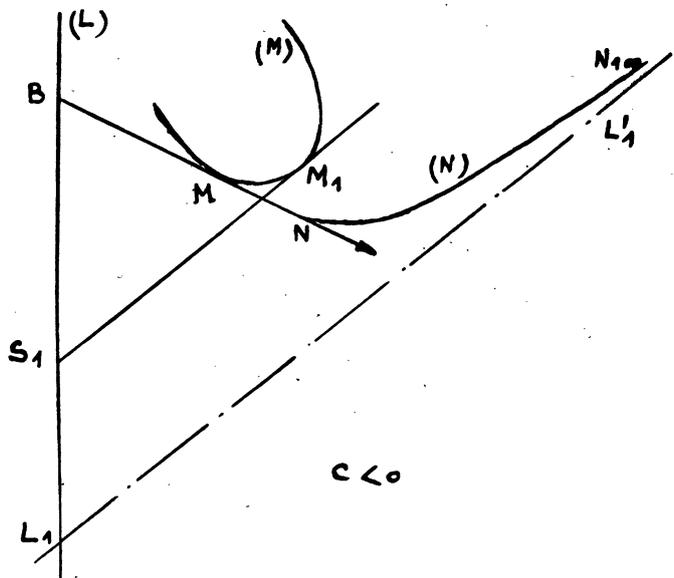
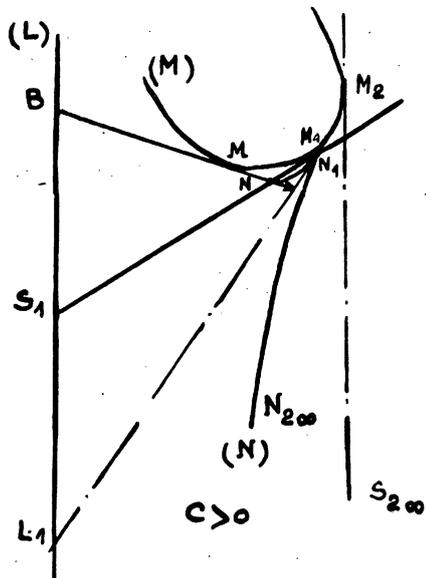
Considérant un arc de courbe (M), la construction de la développante est immédiate.

Au point M_2 , où la courbe-base admet une tangente parallèle à la courbe-base, correspond un point S_2 rejeté à l'infini ; il en est de même pour le point N_2 associé : la développante admet une branche parabolique.

Lorsque la tangente en M passe par le point fixe, la courbe-base et sa développante admettent la tangente commune BM.

3 — On a $m = 1$. La relation (93) devient

$$(95) \quad \overline{MN} = \overline{SM} \cdot \frac{1 - C\xi^2}{1 + C\xi^2}$$



Si C est positif, la développante admet un point de rebroussement de première espèce en M_1 ($\xi = 1 : \sqrt{C}$) et une branche parabolique pour le point M_2 où la tangente à la courbe-base au point M_1 est parallèle à l'adjointe.

Si C est négatif, la courbe (N) admet l'asymptote $L_1 L'_1$, parallèle à la tangente $S_1 M_1$ à la courbe-base au point M_1 où $\xi = 1 : \sqrt{-C}$.

2711. — Cas de la parabole.

Le point fixe est au sommet de la parabole.

Soit la parabole :

$$(96) \quad \begin{cases} \xi = 2 at \\ \eta = at^2 \end{cases}$$

dont l'axe est l'adjointe (L).

Nous avons :

$$\cdot \quad \text{tang } \alpha = t \quad \text{et} \quad 2a \sqrt{1+t^2} = \sigma'$$

Posant $b = a c^2$, nous obtenons $\omega = -a (c^2 + t^2)$

La quadrature (90) s'écrit :

$$\int \frac{d\xi}{\omega \cdot \xi^2} = \frac{1}{2 a^2 c^2} \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{c} \cdot \text{arc tang. } \frac{t}{c} \right],$$

d'où l'égalité donnant τ :

$$(97) \quad (\tau + \sigma' t) (1 + u^2) (C_2 t + 1 + u \text{ arctang } u) - \tau = 0$$

avec $t = cu$ et $C_2 = 2 a^2 c^2 C_1$

Si le point fixe B est au foyer, $c = 1$, par suite le point N est donné par :

$$(98) \quad \tau = - \frac{2 a}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha (C_2 + \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + C_2 + \alpha}$$

Si le point B est au sommet :

$$c = 0$$

Nous avons : $\omega = -at^2$.

La quadrature de (90) donnant

$$\int \frac{d\xi}{\xi^2 \omega} = \frac{1}{6 a^2 t^3}$$

Il en résulte :

$$(99) \quad \tau = \frac{t \sigma' (C_3^3 + t^3)}{2 C_3^3 - t^3}, \quad \text{avec } C_3 = \frac{1}{6 C_1 a^2}.$$

La courbe (N) et la parabole sont tangentes au sommet B ($t=0$); elles ont également en commun le point M_1 ($t=-C_3$) qui est pour la développante un point de rebroussement de première espèce.

Le point M_2 correspondant à :

$$\bar{t} = C_3 \sqrt[3]{2}$$

donne la direction asymptotique, d'où l'asymptote $L_2 L'_2$

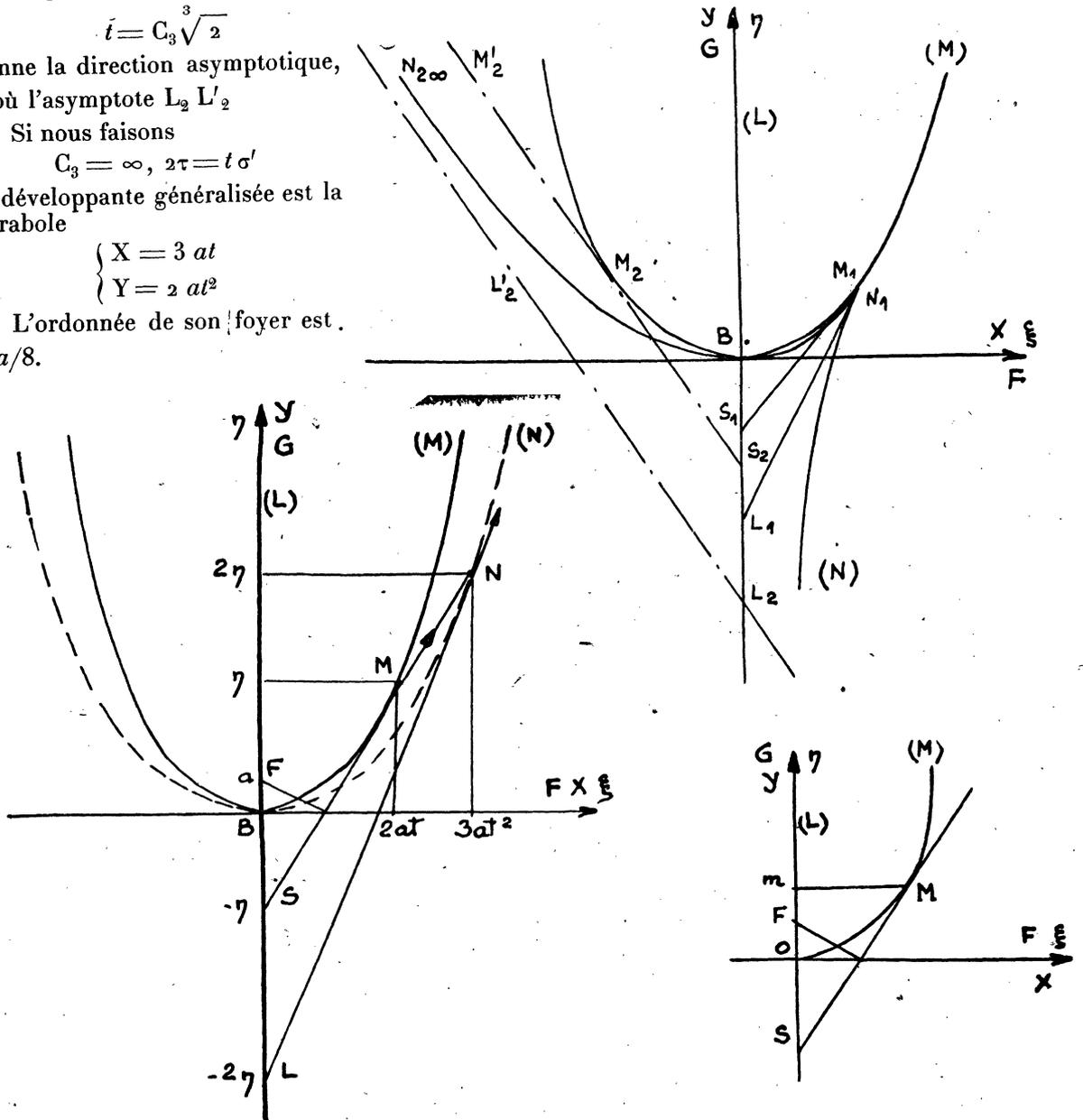
Si nous faisons

$$C_3 = \infty, 2\tau = t\sigma'$$

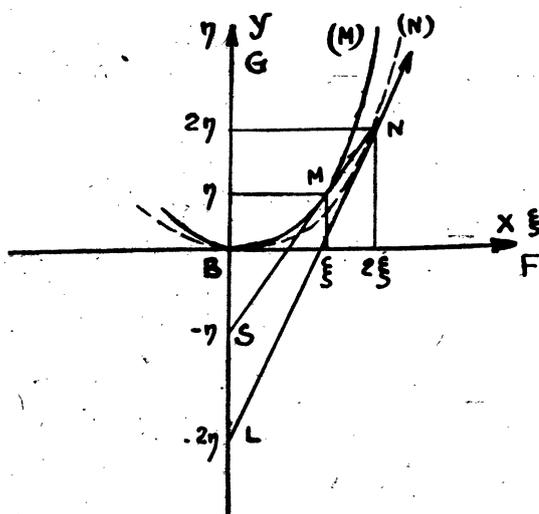
la développante généralisée est la parabole

$$\begin{cases} X = 3at \\ Y = 2at^2 \end{cases}$$

L'ordonnée de son foyer est $9a/8$.



27111. — Quelles sont les développantes parmi lesquelles se trouve (L).



Considérons toujours la parabole

$$\xi = 2 at, \eta = at^2$$

et posons

$$u^2 = 1 + t^2$$

d'où

$$\alpha' = \frac{1}{u^2}, \sigma' = 2 au$$

Si, de plus,

$$\tau = -2 atu$$

l'adjointe (L) peut alors être considérée comme une développante généralisée parti-

culière de la courbe (M).

Cherchons quelles sont les développantes généralisées parmi lesquelles se trouve (L).

La première équation fondamentale (46) donne

$$(100) \quad \omega_1 (\tau' + 2 au) = \frac{\tau}{u^2} (2 au \tau - \omega_2).$$

Ecrivons qu'elle admet la solution particulière $\tau = -2 atu$, il en résulte, entre ω_1 et ω_2 , la relation

$$(101) \quad \omega_1 t + \omega_2 = -4 a^2 u^2 t$$

qui constitue une condition d'intégrabilité élémentaire pour (100).

Cette relation (101) est vérifiée en posant

$$(102) \quad \begin{cases} \omega_1 = -(2+h) a^2 u^2 \\ \omega_2 = -(2+h) a^2 u^2 t \end{cases}$$

où h est une constante quelconque.

Pour l'équation de Riccati fondamentale, les coefficients prennent alors les valeurs :

$$P = \frac{4 \alpha'}{(2-h) \sigma'} = \frac{2}{a(2-h) u^3}; \quad Q = \frac{2+h}{2-h} \cdot \alpha' t = \frac{2+h}{2-h} \cdot \frac{t}{u^2}; \quad R = \sigma' = 2 au$$

Et la transformation

$$(103) \quad \zeta = P \tau + f = \frac{2 \tau}{a(2-h) u^3} + \frac{4-h}{2-h} \cdot \frac{t}{u^2}$$

donne la forme canonique

$$(104) \quad \zeta' + \zeta^2 = \frac{h}{h-2} \cdot \left(1 + \frac{2t^2}{h-2} \right) \cdot \frac{1}{u^4}$$

Nous voyons apparaître la solution particulière

$$(105) \quad \zeta = \frac{h}{h-2} \cdot \frac{t}{u^2}$$

qui, si nous posons

$$\zeta = \frac{h}{h-2} \frac{t}{u^2} + v$$

transforme (104) en

$$v' + v^2 + \frac{h}{h-2} \cdot \frac{2t}{u^2} \cdot v = 0$$

soit

$$W' - \frac{h}{h-2} \cdot \frac{2t}{u^2} \cdot W = 1, \quad \text{avec} \quad W = 1/v$$

La solution générale est :

$$(106) \quad W = u^{2h/h-2} \cdot \left[C + \int u^{2h/h-2} \cdot dt \right]. \quad (C \text{ constante d'intégration})$$

Quant à l'hypothèse (102), elle fournit les coordonnées paramétriques de la courbe adjointe.

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = 0 \\ G = -\frac{h}{2} \cdot \eta + \frac{2-h}{2} \cdot a \end{array} \right.$$

L'interprétation géométrique est alors immédiate et se résume dans la relation

$$(108) \quad \overline{FL} = \frac{h}{2} \overline{FS},$$

F étant le foyer de la parabole.

Les coordonnées du point N sont :

$$(110) \quad \begin{cases} X = \frac{-2a \cdot \cos^2 \alpha}{C + \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ Y = -\eta - \frac{2a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{C + \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \end{cases}$$

Sur la figure précédente, nous avons indiqué deux triangles fondamentaux : MLN et $M_1 L_1 N_1 \infty$ (asymptote oblique $L_1 L'_1$).

La courbe admet également comme asymptote verticale, l'adjointe (L).

2. — Cas $h = -2$.

Si h prend la valeur -2 , le point L est sur la normale en (M) à la parabole

$$\overline{FL} = -\overline{FS} = a + \eta$$

La développante est donnée par

$$(111) \quad \tau = -2aut + \frac{2au^2}{C + \log(t+u)}$$

soit :

$$(112) \quad \begin{cases} X = \frac{2au}{C + \log(t+u)} \\ Y = -\eta + \frac{2aut}{C + \log(t+u)} \end{cases}$$

3. — Cas $h = 0$.

Le point L est au foyer de la parabole ($G = a$) lorsque h est nul.

$$\tau = -2aut + \frac{au^3}{C+t}$$

soit :

$$(113) \quad X = \frac{au^2}{C+t}; \quad Y = -\eta + \frac{au^2 t}{C+t}$$

Il ne peut y avoir, lorsque la constante h est nulle, d'autres développantes généralisées que les droites du plan passant par le foyer.

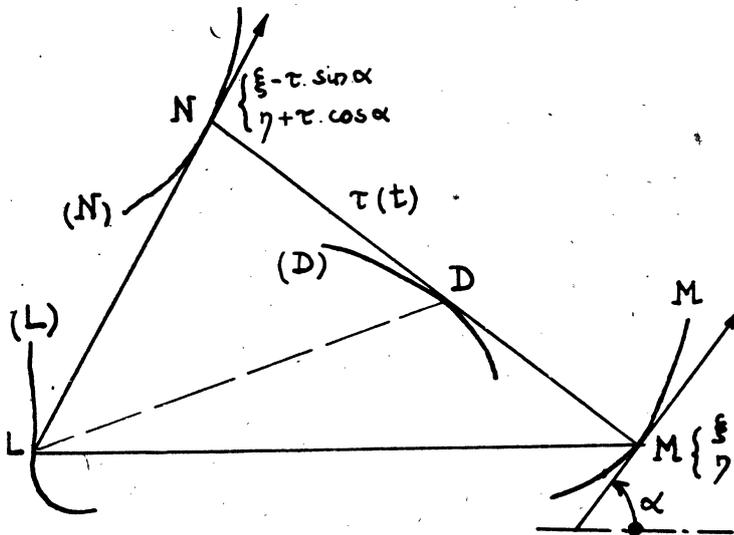
Terminons ce paragraphe en remarquant que, parmi toutes les développantes généralisées de la parabole, nous retrouvons l'adjointe rectiligne (L) pour la valeur infinie de la constante (C) qui intervient dans la solution générale (106).

CHAPITRE III

Développées Généralisées d'une courbe plane.

31. — Position du problème.

Considérons toujours deux courbes données en coordonnées paramétriques la courbe-base (M) $\eta = \eta(t)$; $\xi = \xi(t)$ et son adjointe (L) $F = F(t)$; $G = G(t)$,



les points M (ξ, η) et L (F, G) correspondant à une même valeur du paramètre t .

Sur la normale en M, à la courbe-base, portons une longueur $\overline{MN} = \tau(t)$; nous déterminons une courbe (N) particulière en imposant à sa tangente la condition de passer par le point L.

Comme précédemment, la détermination de $\tau(t)$ se ramène à l'étude d'une équation de Riccati.

32. — Mise en équation.

L'équation de Riccati en τ détermine une ∞^1 de courbes (N); nous les appelons, étant donné leur génération, les « développées généralisées de la courbe (M) ». Elles se distinguent ainsi des développées ordinaires, obtenues en portant sur la normale en M, à la courbe-base, la longueur \overline{MN} égale au rayon de courbure ρ .

Le terme de « généralisées » nous permet de les rattacher au problème précédent, et, par cela même, aux développantes projectives de E. CARTAN.

Le triangle MLN sera le: « triangle fondamental normal ».

Avant tout développement, nous pouvons observer que ce second problème n'est pas logiquement distinct du précédent.

En effet, la courbe (M) admet une développée ordinaire (D) pour laquelle DN est le segment τ du problème précédent.

Cependant, ceci n'empêche pas que les deux problèmes ont droit à l'existence; suivant les cas, il sera commode d'utiliser l'un ou l'autre.

Exprimons que la tangente en N passe par L:

$$(114) \quad \frac{F - \xi + \tau \sin \alpha}{\xi' - (\tau \sin \alpha)'} = \frac{G - \eta - \tau \cos \alpha}{\eta' + (\tau \cos \alpha)'}$$

nous obtenons l'équation

$$(115) \quad \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right| \tau' - \alpha' \tau^2 + \left\{ \sqrt{\eta'^2 + \xi'^2} - \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{array} \right| \alpha' \right\} \tau + \left| \begin{array}{cc} F - \xi & G - \eta \\ \xi' & \eta' \end{array} \right| = 0$$

Identifions à l'équation de Riccati (I), nous obtenons

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = - \frac{\alpha' \sqrt{\eta'^2 + \xi'^2}}{(F - \xi) \xi' + (G - \eta) \eta'} = - \frac{\alpha' \sigma'}{\omega_2}, \\ Q = \frac{\xi'^2 + \eta'^2 - \alpha' [(F - \xi) \eta' - (G - \eta) \xi']}{(F - \xi) \xi' + (G - \eta) \eta'} = \frac{\sigma'^2 - \alpha' \omega_1}{\omega_2}, \\ R = \frac{(F - \xi) \eta' - (G - \eta) \xi'}{(F - \xi) \xi' + (G - \eta) \eta'} \cdot \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \sigma', \end{array} \right.$$

d'où l'équation différentielle du problème

$$(117) \quad \boxed{\omega_2 \cdot \tau' - \alpha' \sigma' \cdot \tau^2 + (\sigma'^2 - \alpha' \omega_1) \tau + \omega_1 \sigma' = 0}$$

La notation (7) donne

$$(118) \quad g = - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sigma'^2 - \alpha' \omega_1 - \omega_2}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{\omega_1} + \frac{\sigma''}{\sigma'} \right];$$

d'où, avec la transformation

$$(119) \quad \tau(u - g) + \frac{\omega_1}{\omega_2}, \sigma' = 0$$

la forme canonique

$$(120) \quad u' + u^2 = g' + g^2 + (\eta'' \xi' - \eta' \xi'') \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

33. — Courbes « isoradiques ».

Des égalités (116) nous tirons :

$$(121) \quad \begin{cases} \omega_1 = -\alpha' \cdot \frac{R}{P}, & \omega_2 = -\frac{\alpha' \sigma'}{P}, \\ P \sigma'^2 + R \alpha'^2 - Q \alpha' \sigma' = 0; \end{cases}$$

Ce second problème doit pouvoir se ramener au premier, puisqu'il dépend d'une équation de Riccati et que toute équation de Riccati, nous l'avons vu au paragraphe 23, peut s'interpréter par un problème du premier genre. En d'autres termes, il est désormais possible de rattacher à toute équation de Riccati un problème du second genre, comme on le voit sur les équations (121). En effet, la dernière de ces formules, ne contenant que les fonctions ξ et η permettra, au moins théoriquement, de choisir ξ et η d'une infinité de manières; les deux formules précédentes donneront ensuite, F et G, c'est-à-dire la courbe adjointe.

$$(122) \quad \begin{cases} F - \xi = -\alpha' \cdot \frac{R \sin \alpha + \sigma' \cdot \cos \alpha}{\sigma' \cdot P} \\ G - \eta = \alpha' \cdot \frac{R \cdot \cos \alpha - \sigma' \cdot \sin \alpha}{\sigma' \cdot P} \end{cases}$$

Fixons notre attention sur la troisième égalité de (121) elle donne :

$$(123) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma'}{\alpha'} &= \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \\ \text{or } \frac{\sigma'}{\alpha'} &= \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}}{\xi' \eta'' - \xi'' \eta'} = \rho \end{aligned}$$

si ρ est le rayon de courbure au point de paramètre t pour la courbe (M).

Nous avons donc à rechercher toutes les courbes (M) dont le rayon de courbure ρ a une expression donnée en t ; nous appelons ces courbes; « courbes isoradiques » afin d'avoir une terminologie analogue à celle utilisée dans les considérations isométriques du premier problème.

Nous pouvons dès lors conclure en disant que toute équation de Riccati peut être considérée comme l'expression différentielle attachée soit à une famille de « courbes isométriques », soit à une famille de « courbes isoradiiques ».

Prenons comme exemple l'équation de Riccati

$$\tau' - \frac{2}{a} \tau^2 + \tau + a = 0$$

où a est une constante quelconque.

Elle s'écrit :

$$u' + u^2 = \frac{9}{4}$$

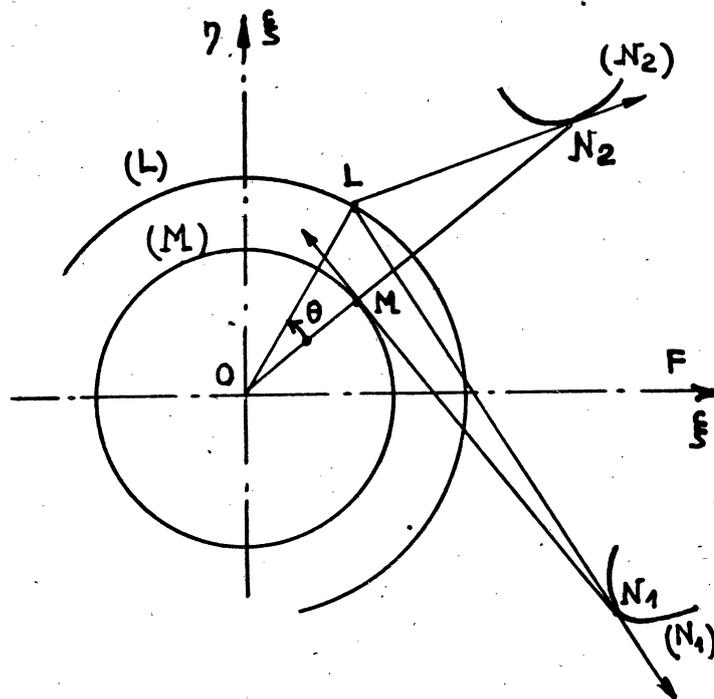
avec

$$\tau \left(u + \frac{1}{2} \right) + a = 0$$

d'où la solution

$$u = \frac{3}{2} \cdot \frac{K \operatorname{th} \frac{3t}{2} + 1}{K + \operatorname{th} \frac{3t}{2}}$$

Les conditions (50) et (121) sont simultanément vérifiées si nous prenons comme courbe-base le cercle d'équations :



$$\begin{cases} \xi = a \cos t \\ \eta = a \sin t \end{cases}$$

La courbe adjointe qui en résulte s'écrit :

$$\begin{cases} F = \frac{3a}{2} \cos t - \frac{a}{2} \sin t, \\ G = \frac{3a}{2} \sin t + \frac{a}{2} \cos t. \end{cases}$$

Soit

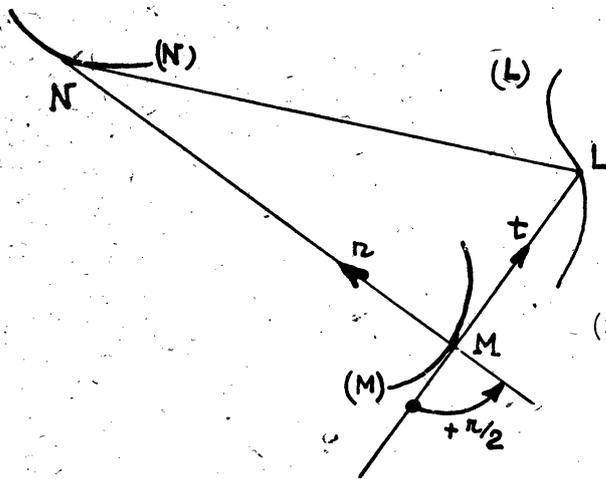
$$\begin{cases} F = \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \cos(t + \theta), \\ G = \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \sin(t + \theta); \end{cases}$$

avec

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

34. — Cas d'intégrabilité élémentaires.

341. — Cas $\omega_1 = 0$ — le triangle fondamental est rectangle; son sommet décrit la courbe-base.



Dans cette hypothèse $\theta = 0$ le point L est alors porté par la tangente en M à la courbe-base.

L'équation différentielle (117) dégénère en une équation de Bernoulli que l'on sait résoudre par quadratures :

$$(123) \quad \omega_2 \cdot \tau' - \alpha' \cdot \sigma' \cdot \tau^2 + \sigma'^2 \tau = 0.$$

Posons :

$$(124) \quad \frac{\psi'}{\psi} = -\frac{\sigma'^2}{\omega_2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{d\sigma}{ML};$$

la solution générale de (123) s'écrit :

$$(125) \quad \tau = \frac{\psi}{C + \int \frac{d\psi}{\rho}}$$

avec C, constante d'intégration.

Dans le cas très particulier où la courbe-base est le cercle

$$\begin{cases} \xi = a \cos t, \\ \eta = a \sin t, \end{cases}$$

la quadrature (125) est immédiate et l'on a :

$$(126) \quad \tau = \frac{a\psi}{C + \psi}$$

La quantité ψ est définie par la relation

$$(127) \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{a dt}{F \sin t - G \cos t}$$

Or,

$$\begin{aligned} F \sin t - G \cos t &= \overline{OL} \cdot \sin \varphi \\ &= a \operatorname{tang} \varphi \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$(128) \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{dt}{\operatorname{tang} \varphi}$$

Il est possible comme au paragraphe 252, de trouver dans ce cas particulier, une génération des coniques. La courbe-base (M) est alors un cercle-point placé à l'un des foyers de la conique et la courbe adjointe (L) est la directrice correspondante.

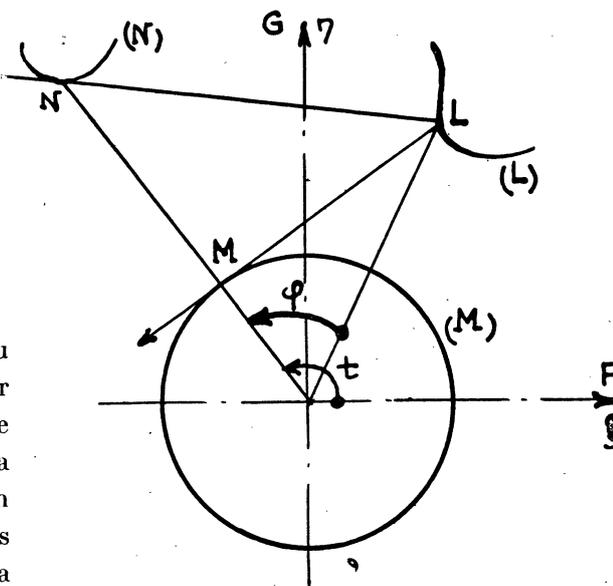
Nous rejoignons évidemment le cas des adjointes rectilignes qui fait l'objet du paragraphe suivant.

3411. — Courbes (M) à adjointes rectilignes.

Si nous admettons la condition supplémentaire, $F=0$, la courbe adjointe (L) devient rectiligne et se réduit à l'axe OG.

Les relations (44) s'écrivent dans cette nouvelle hypothèse :

$$(129) \quad \begin{cases} G - \eta = -\frac{\xi}{\xi'} \cdot \eta' \\ \omega_2 \cdot \xi' + \xi \cdot \sigma'^2 = 0 \end{cases}$$



et l'équation (123) devient en introduisant le rayon de courbure ρ de la courbe-base :

$$(130) \quad \frac{1}{\xi^2} \tau' + \tau \left(\frac{\tau}{\rho} - 1 \right) = 0$$

Son intégrale générale est :

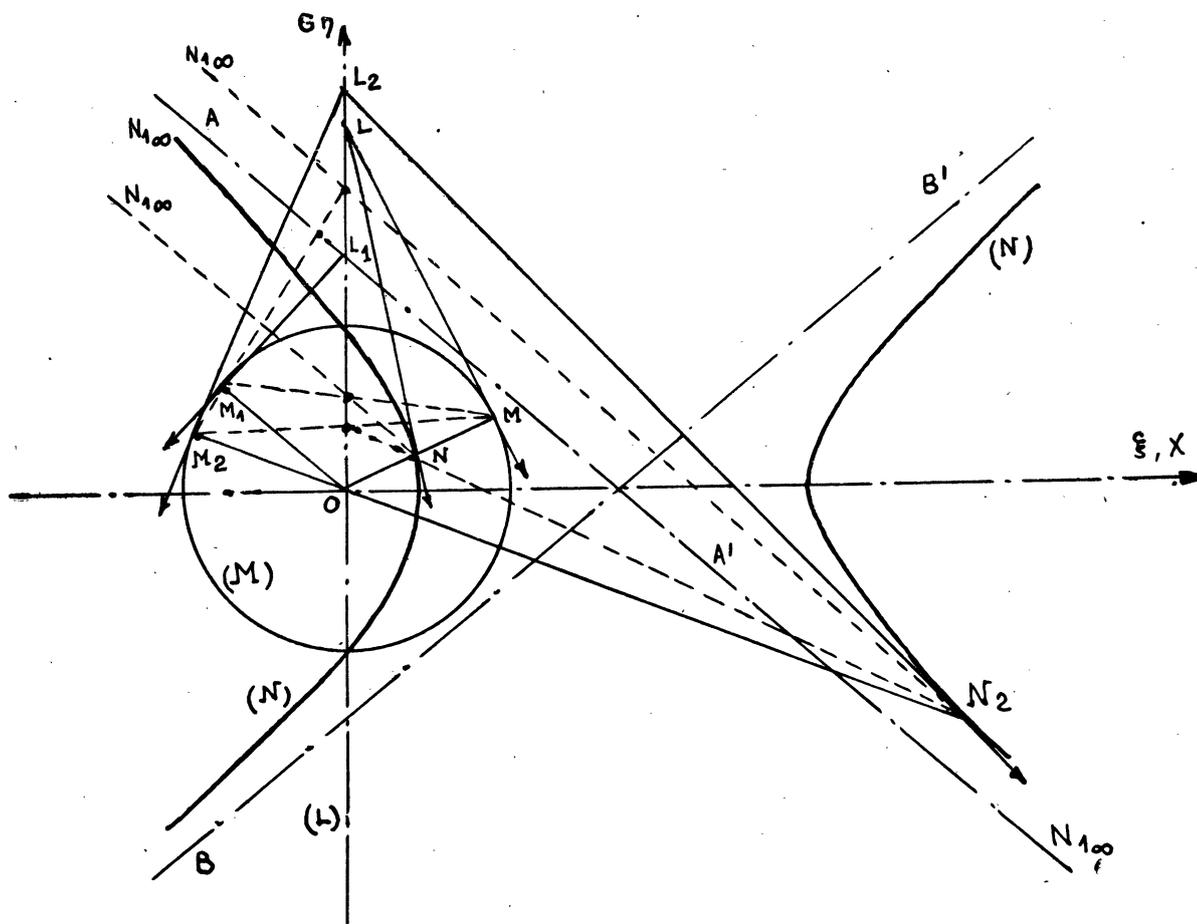
$$(131) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\xi} \left(C + \int \frac{d\xi}{\rho} \right)$$

34111. — La courbe-base est un cercle.

La courbe (M) étant supposée un cercle de coordonnées paramétriques

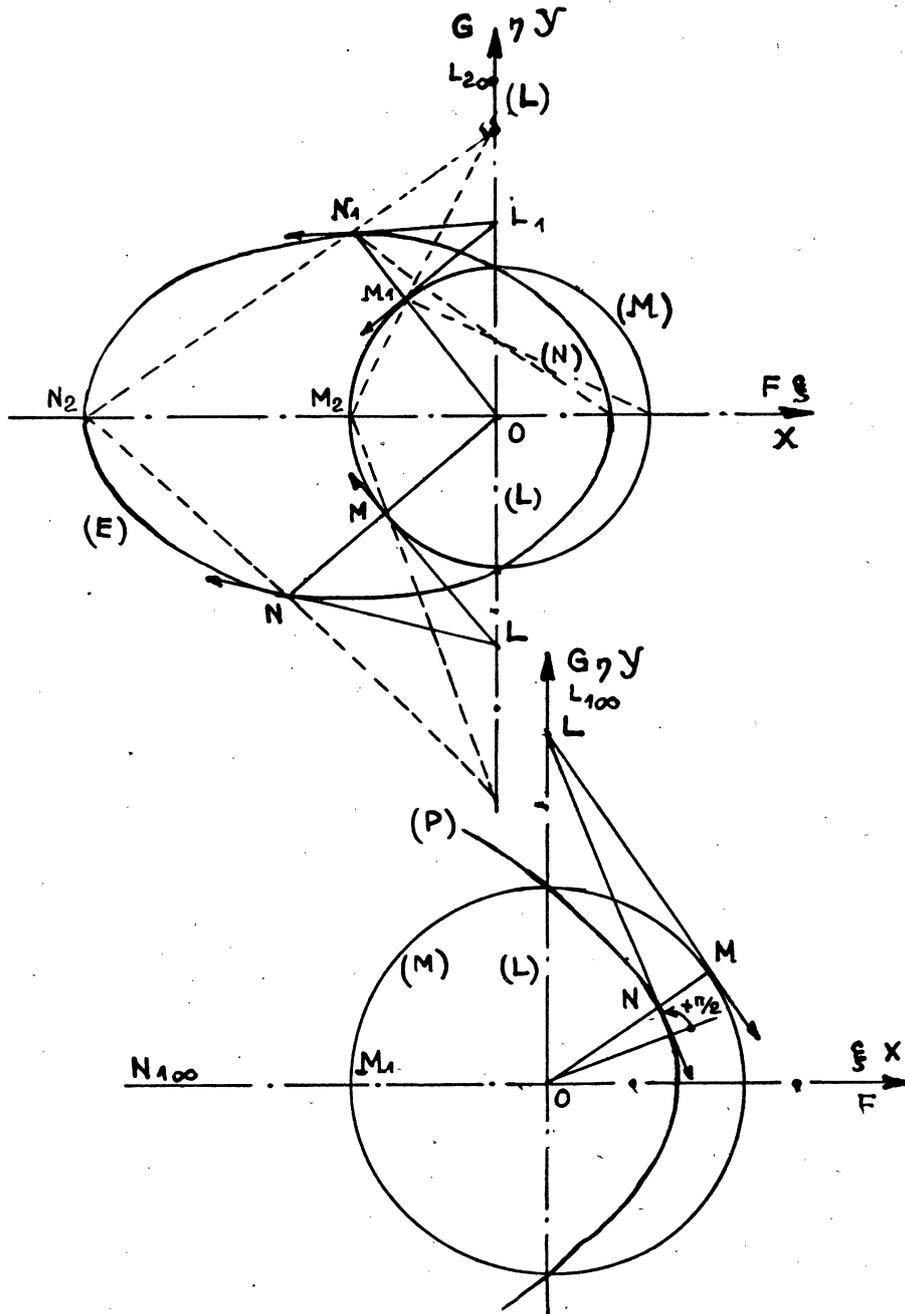
$$\xi = a \cos t, \quad \eta = a \sin t$$

nous avons $\rho = a$.



d'où

$$(132) \quad \tau = \overline{MN} = \frac{a \cos t}{C + \cos t}$$



Il en résulte que

$$(133) \quad \overline{ON} = \frac{a}{1 + \gamma \cdot \cos t}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre a et d'excentricité γ .

Ainsi, il est remarquable que toute conique puisse être considérée comme une développée généralisée du cercle.

Dans le cas de l'hyperbole, si OM_1 correspond à la valeur de t qui rend ON infini, OM_1 est direction asymptotique et le point L_1 fournit la véritable asymptote AA' .

La figure comporte les trois triangles fondamentaux : $MNL, M_2N_2L_2, M_1N_1 \infty L_1$, le point $N_1 \infty$ étant à l'infini sur la droite AA' .

Dans le cas de l'ellipse, nous avons tracé les trois triangles fondamentaux :

$$MNL, M_1N_1L_1 \quad \text{et} \quad M_2N_2L_2 \infty$$

Enfin dans le cas de la parabole qui correspond à $\gamma = 1$, nous avons indiqué les deux triangles MNL et $M_1N_1 \infty L_1$.

Il est aisé de voir que le point O est foyer de la conique.

A la lumière des considérations précédentes, les propriétés géométriques des coniques, auxquelles on associe un cercle-base sont particulièrement remarquables sinon en elles-mêmes, du moins en tant que dégénérescences pouvant accompagner l'équation de Riccati.

Nous retrouvons ainsi la théorie de l'homologie de Poncelet qui apparaît comme cas particulier de notre problème. En effet, l'équation de Riccati (117) se réduit dans le cas de l'adjointe rectiligne et du cercle-base à une équation différentielle à variables séparées immédiatement intégrable. L'adjointe (L) est l'axe de l'homologie, le point O en est le centre.

Prenant par exemple le cas de l'ellipse nous voyons que les couples de droites $M_2M_1, N_2N_1, -MM_1, NN_1, -M_2M, N_2N$ se coupent sur l'adjointe rectiligne (L) .

Revenons à l'équation (133) et prenons quatre valeurs de la constante γ

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2, \gamma_3 = 1, \gamma_4$$

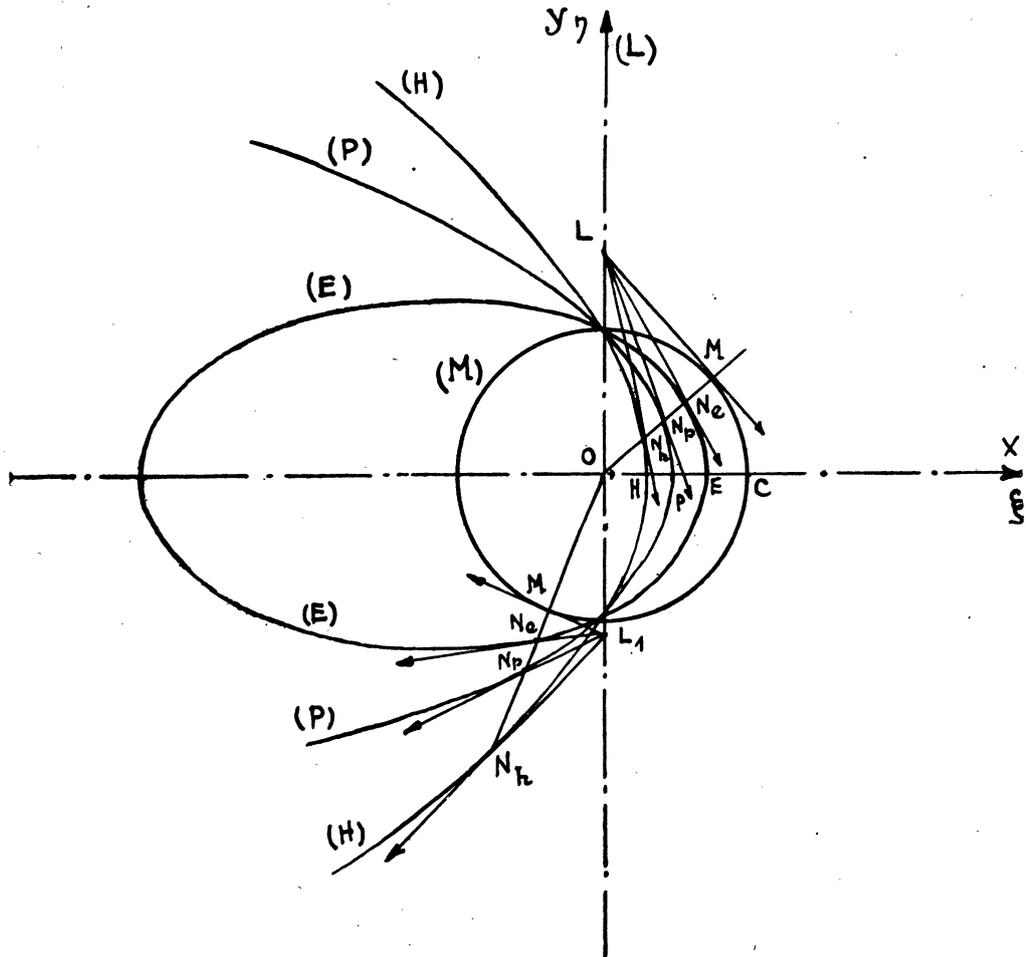
correspondant au cercle, à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole.

Ces quatre coniques font partie d'un même « faisceau » dont l'axe est l'adjointe rectiligne (L) . Menant la tangente en M au cercle, nous obtenons les tangentes aux coniques :

$$LN_e, LN_p, LN_h$$

et nous avons

$$(\gamma_i) = (ON_h, ON_p, ON_e, a)$$



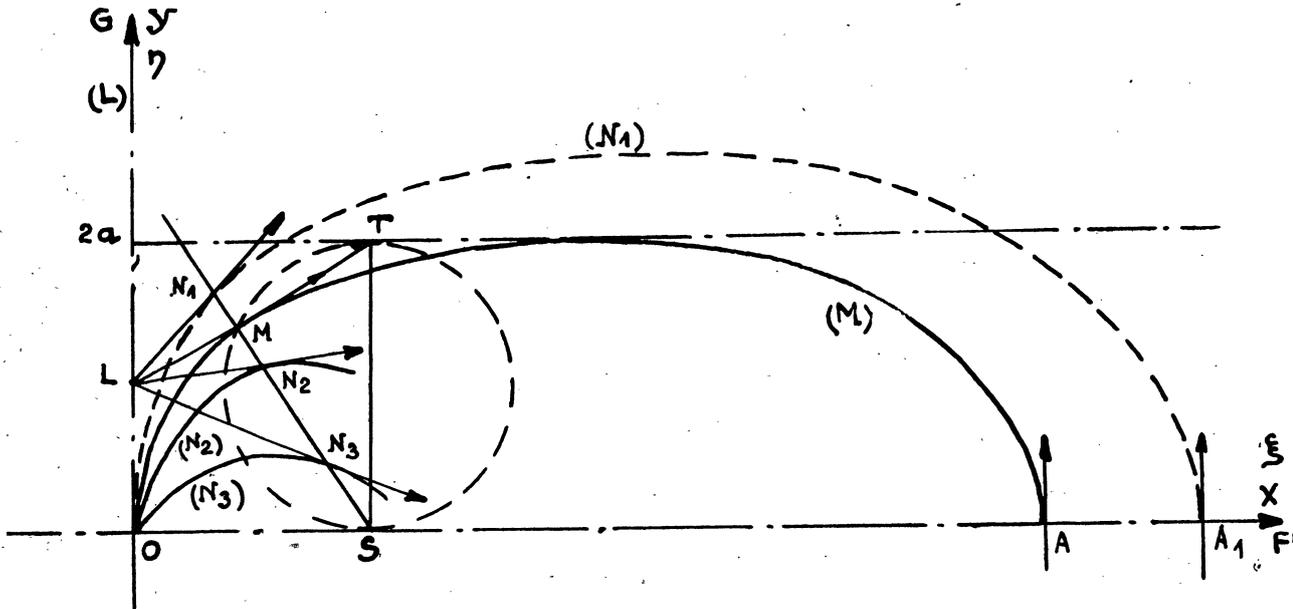
34112. — La courbe-base est une cycloïde.

Considérons la cycloïde engendrée par le point M du cercle de diamètre $2a$ qui roule sans glisser sur l'axe $o\xi$; ses équations paramétriques s'écrivent :

$$(134) \quad \begin{cases} \xi = a(t - \sin t) \\ \eta = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

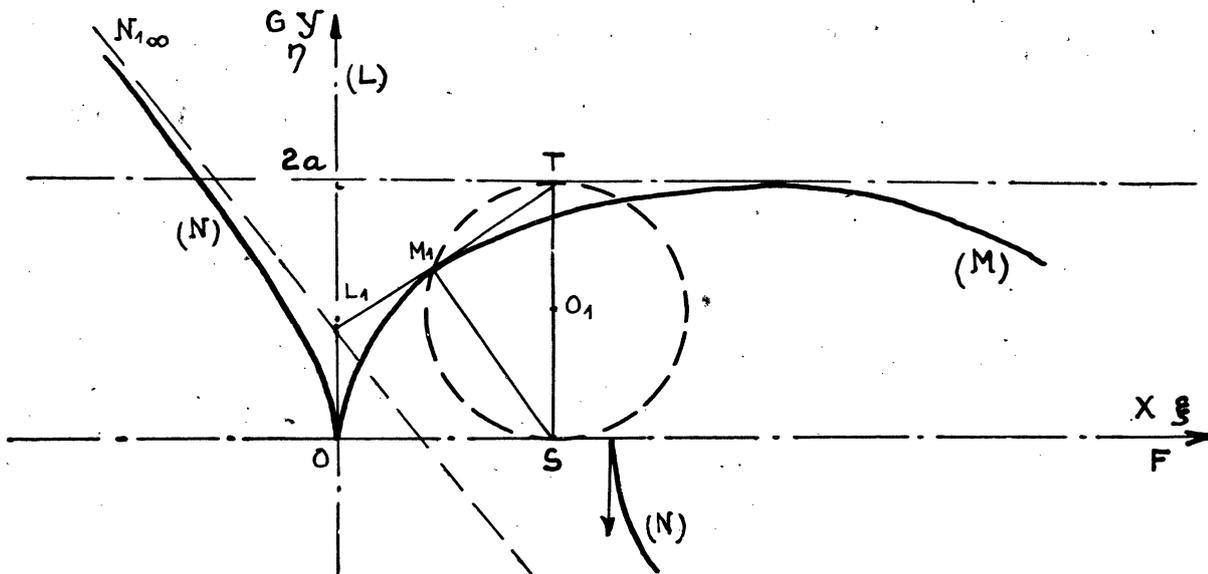
En chaque point $M(t)$, le rayon de courbure a pour valeur

$$(135) \quad \rho = 4a \cdot \sin \frac{t}{2}$$



La développée (N) est alors déterminée par

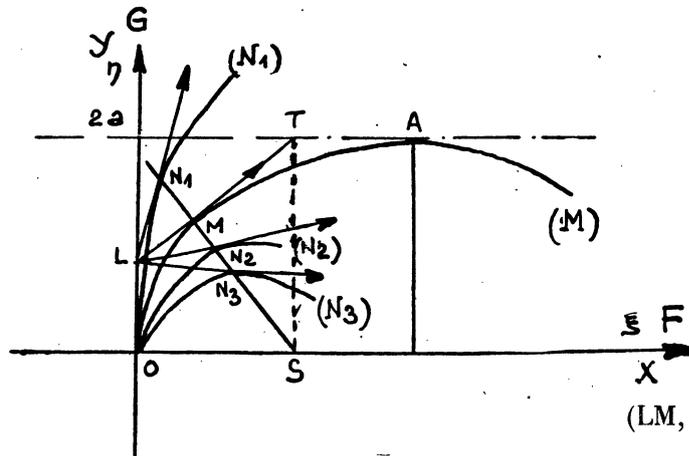
$$(136) \quad \tau = \frac{\xi}{C + \cos \frac{t}{2}}$$



Lorsqu'il n'y a pas de point à l'infini, nous obtenons suivant les valeurs attribuées à la constante C , soit la développée (N_1) extérieure à la courbe-base (M) , soit les développées (N_2) et (N_3) intérieures.

La cycloïde est sa propre développée généralisée pour la valeur infinie de la constante et l'adjointe rectiligne (L) est développée généralisée de (M) pour la valeur $C = 0$.

Soit maintenant le point M_1 correspondant à la valeur de t qui rend τ infini (cas possible lorsque C est en valeur absolue inférieure à 1). La normale en M_1 qui passe par S , est direction asymptotique et l'on a le triangle fondamental $M_1 L_1 N_{1\infty}$.



Considérons dès lors la cycloïde et trois de ses développées $N_1 N_2 N_3$ correspondant aux quatre valeurs de la constante :

$$C_1, C = \infty, C_2, C_3$$

Nous avons toujours

$$(LM, LN_1, LN_2, LN_3) = (C)$$

34113. — La courbe-base est une chaînette.

Prenant la chaînette d'équation

$$(137) \quad \eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}$$

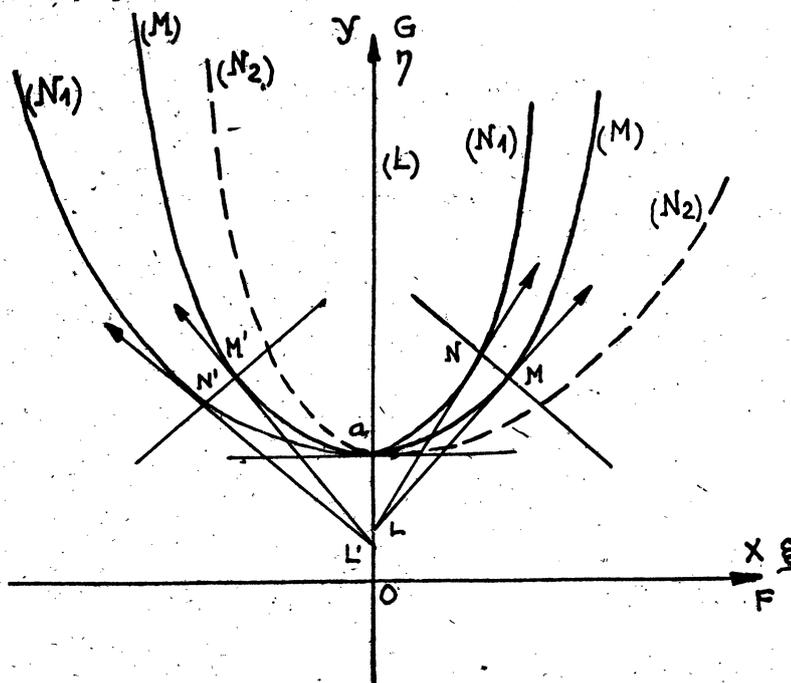
nous avons en écrivant $\xi = at$:

$$\sigma' = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}, \quad \rho = a \operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{a},$$

et l'adjointe (L) étant toujours l'axe $o\eta$, la développée (N) est déterminée par

$$(138) \quad \tau = \frac{\xi}{C + \operatorname{th} \frac{\xi}{a}}$$

Lorsque la constante C est en valeur absolue supérieure à 1, nous n'obtenons pas d'asymptote mais des branches paraboliques intérieures et extérieures



à la courbe-base suivant le signe de la constante. Si C est comprise entre -1 et $+1$, il existe un point M_1 dont l'abscisse ξ_1 est donnée par la relation

$$C + \operatorname{th} \frac{\xi_1}{a} = 0$$

la normale en M_1 donne la direction asymptotique, d'où l'asymptote $L_1 L'_1$.

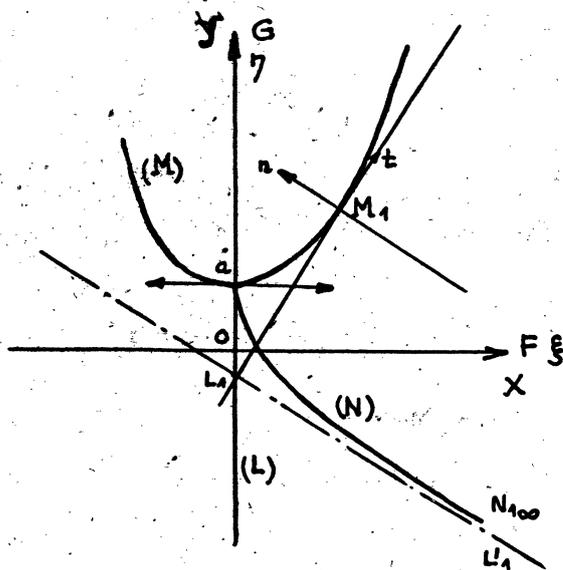
Terminons cet examen de cas particuliers en signalant que pour la parabole :

$$\xi = 2at, \quad \eta = at^2,$$

nous aurions obtenu

$$(139) \quad \tau = \frac{2a \operatorname{tang} \alpha}{C + \sin \alpha},$$

donc des développées généralisées pour lesquelles l'étude aurait présenté beaucoup d'analogie avec celle des développées de la chaînette.



Enfin, pour les courbes-base dont le rayon de courbure est lié à l'abscisse du point courant par la relation :

$$(140) \quad m \cdot \rho = \xi^{m+1}$$

(m étant une constante quelconque)
les développées (N) sont données par

$$(141) \quad \tau = \frac{\xi^{m+1}}{1 - C \xi^m}.$$

Ces courbes (M) déterminées par la relation (140) constituent une famille à deux paramètres ; l'intégration de (140) est immédiate et donne, une première fois :

$$\frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{1}{\xi_0^m} - \frac{1}{\xi^m}$$

et enfin

$$(142) \quad \eta - \eta_0 = \frac{1}{m} \int \sin \varphi \cdot \left(\frac{x_0^m}{1 - x_0^m \sin \varphi} \right)^p \cdot d\varphi$$

avec $pm = m + 1$ et :

$$\sin \varphi = \frac{1}{x_0^m} - \frac{1}{x^m}$$

342. — La forme réduite de M. E. CARTAN.

Revenons à la forme réduite de l'équation de Riccati envisagée déjà au paragraphe 2521

$$(64) \quad \tau' + P \tau^2 + 1 = 0$$

Nous allons essayer de l'interpréter par le second problème dont l'équation différentielle est :

$$(117) \quad \tau' - \frac{\alpha' \sigma'}{\omega_2} \cdot \tau^2 + \frac{\sigma'^2 - \alpha' \omega_1}{\omega_2} \cdot \tau + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \sigma' = 0$$

Les formules d'identification (116) donnent :

$$\omega_2 = -\frac{\alpha' \sigma'}{P}; \quad \omega_1 = -\frac{\alpha'}{P}; \quad P \sigma'^2 + \alpha'^2 = 0;$$

$$(143) \quad \rho = \frac{\sigma'}{\alpha'}; \quad \omega_2 = \sigma' \omega_1; \quad P \rho^2 + 1 = 0.$$

Nous en tirons :

$$(144) \quad F - \xi = \omega_1 \cdot \frac{\eta' + \sigma' \cdot \xi'}{\sigma'^2}, \quad G - \eta = \omega_1 \cdot \frac{\eta' \sigma' - \xi'}{\sigma'^2};$$

soit :

$$(146) \quad \overline{ML}^2 = \frac{1 + \sigma'^2}{P^2 \rho^2}$$

Si nous considérons une «isoradiique» de (M), nous aurons, pour une même valeur du paramètre t ,

$$\overline{M_1 L_1}^2 = \frac{1 + \sigma_1'^2}{P^2 \rho^2}.$$

Il en résulte la relation fondamentale

$$(147) \quad \frac{\overline{M_1 L_1}^2}{\overline{ML}^2} = \frac{1 + \sigma_1'^2}{1 + \sigma'^2}$$

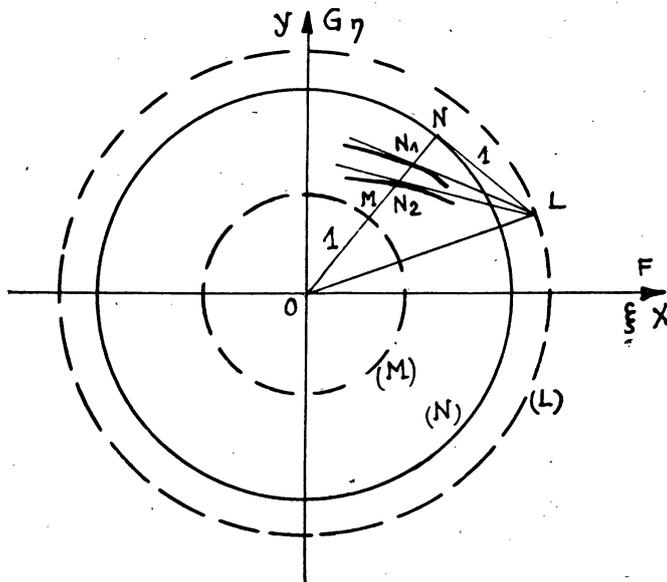
que l'on peut rapprocher de la relation (67) trouvée entre les distances \overline{ML} et $\overline{M_1 L_1}$, en interprétant l'équation (64) par le premier problème.

Étudions le cas où le coefficient

$$P = -1;$$

l'équation (64) devient alors :

$$(148) \quad \tau' - \tau^2 + 1 = 0$$



Nous avons la solution $\tau = \pm 1$ et l'intégrale générale; $\tau = -\text{th}(t - c)$

Pour la courbe-base (M) les relations (143) donnent $\rho = 1$, c'est donc un cercle de rayon 1.

Portant $\overline{MN} = 1$ sur la normale au cercle (M), nous obtenons une tangente en N dont l'extrémité décrit le cercle (L), puisque

la relation (146) donnant $\overline{ML} = \sqrt{2}$, nous pouvons écrire $\overline{OL} = \sqrt{5}$.

Si nous prenons $\tau = -\text{th}(t-c)$, la développante qui en résulte est une spirale d'équation polaire :

$$(149) \quad r = 1 + \text{th}(t-c)$$

Elle admet le cercle (N) de rayon $\overline{ON} = 2$ comme cercle-asymptote et le centre O comme point-asymptote ; remarquons que toutes les intersections de cette spirale avec le rayon OMN donnent des tangentes qui concourent au point L.

35. — Remarque : l'équation d'Abel.

Dans l'étude des développantes et des développées généralisées (N) d'une courbe (M), nous avons considéré soit la tangente, soit la normale à la courbe-base, mais dans ces deux cas, nous avons fait seulement intervenir la tangente aux courbes (N).

Il paraissait pourtant logique de faire aussi intervenir leur normale.

Nous l'avons volontairement négligée car l'équation différentielle correspondant à ce nouveau problème n'est pas une équation de Riccati, ce qui nous éloigne du but de notre étude.

Nous aurions alors obtenu une famille de courbes, qu'on pourrait appeler « développantes-orthogonales généralisées » d'équation

$$(150) \quad \left(\tau - \frac{\omega_2}{\sigma'}\right) \tau' + \left(\sigma' + \frac{\omega_1}{\rho}\right) \tau - \omega_2 = 0$$

ou « développées-orthogonales généralisées » d'équation

$$(151) \quad \left(\tau + \frac{\omega_1}{\sigma'}\right) \tau' + \frac{\omega_2}{\rho} \tau - \omega_2 = 0$$

Toutes deux du type

$$(152) \quad (\tau + S) \tau' + P \tau^2 + Q \tau + R = 0$$

Sans envisager l'étude d'une telle équation différentielle, il convient de signaler qu'elle a été considérée par R. LIOUVILLE [N] qui la fait d'ailleurs remonter à ABEL [O].

Ce dernier utilisant la transformation

$$\tau + S = \chi \cdot e^{-\int P dt}$$

préfère la forme

$$(152') \quad \chi \cdot \chi' + \alpha \chi + \beta = 0$$

où l'on voit apparaître les deux cas de résolution :

$$\alpha \equiv Q - 2PS - S' = 0,$$

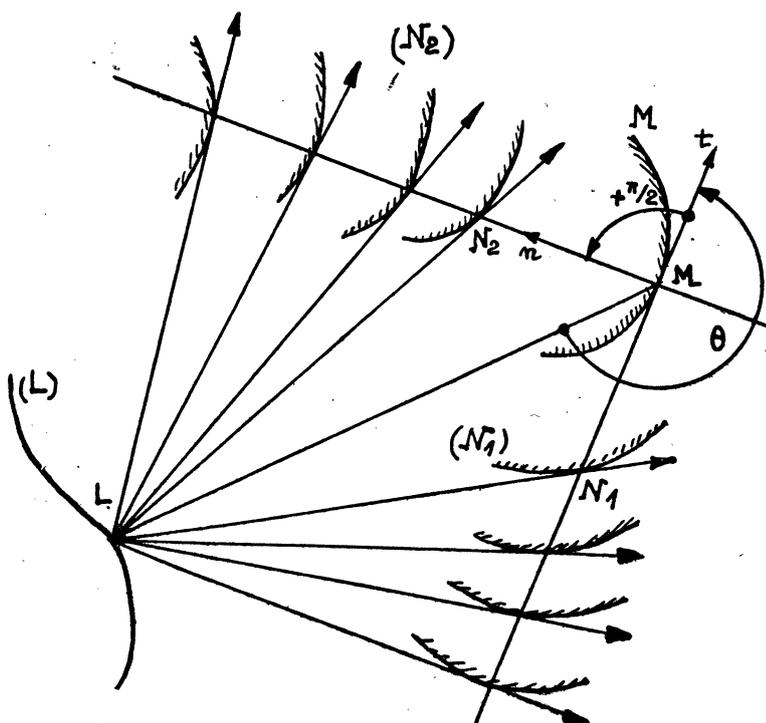
$$\beta \equiv R - QS + P\dot{S}^2 = 0.$$

Poursuivant l'étude de ces formes réduites et la possibilité d'existence d'une différentielle totale, il ne cherche cependant pas à attribuer une origine géométrique à l'équation (152).

CHAPITRE IV

Adjointes doubles à une courbe plane.

Le problème 1 étant supposé résolu pour une courbe (M), on obtient les développantes généralisées (N_1) à courbe adjointe (L). On peut évidemment s'arranger pour obtenir sur la même figure des développées généralisées (N_2) conformes au problème 2 et admettant encore (L) pour courbe-adjointe.



On doit avoir à la fois les deux équations de RICCATI :

$$(153) \quad \begin{cases} \omega_1 (\tau'_1 + \sigma') = \alpha' \cdot \tau_1 (\sigma' \cdot \tau_1 - \omega_2), \\ \omega_2 \cdot \tau'_2 + \sigma' \cdot \omega_1 = \tau_2 (\alpha' \cdot \sigma' \cdot \tau_2 + \alpha' \cdot \omega_1 - \sigma'^2); \end{cases}$$

Les quantités ω_1 et ω_2 sont les mêmes dans les deux équations et l'on a toujours

$$(44) \quad \begin{cases} \omega_1 = (F - \xi) \eta' - (G - \eta) \xi', \\ \omega_2 = (F - \xi) \xi' + (G - \eta) \eta'; \end{cases}$$

Nous avons indiqué sur la figure les deux triangles fondamentaux :

$$M_1 L_1 N_1 \text{ et } ML N_\infty$$

et les deux asymptotes : LL' et l'axe $o\eta$ ($\xi=0$).

412. Le phénomène inverse se produit pour $\omega_2=0$, les équations (44) donnent alors :

$$(160) \quad F = 0; \quad G = \eta + 2a$$

Le point L est en n sur la normale en M à la courbe-base. Les développantes généralisées (N_1) sont déterminées par l'équation de Riccati

$$(161) \quad 2au^3 (\tau'_1 + 2au) + \tau_1^2 = 0$$

qui, avec la notation

$$(162) \quad g = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{u^2},$$

et la transformation

$$(163) \quad \tau_1 (\zeta - g) + 2au = 0,$$

s'écrit :

$$(164) \quad \zeta' + \zeta^2 = g' + g^2 - \frac{1}{u^2}$$

Sous cette forme nous voyons apparaître la solution particulière

$$(165) \quad \zeta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{u^2} + \frac{1}{t}.$$

Posant alors :

$$\zeta = w - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{u^2} + \frac{1}{t}$$

On ramène la forme canonique (164) à l'équation de Bernouilli

$$(166) \quad w' + w^2 + 2w \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{t}{u^2} \right) = 0$$

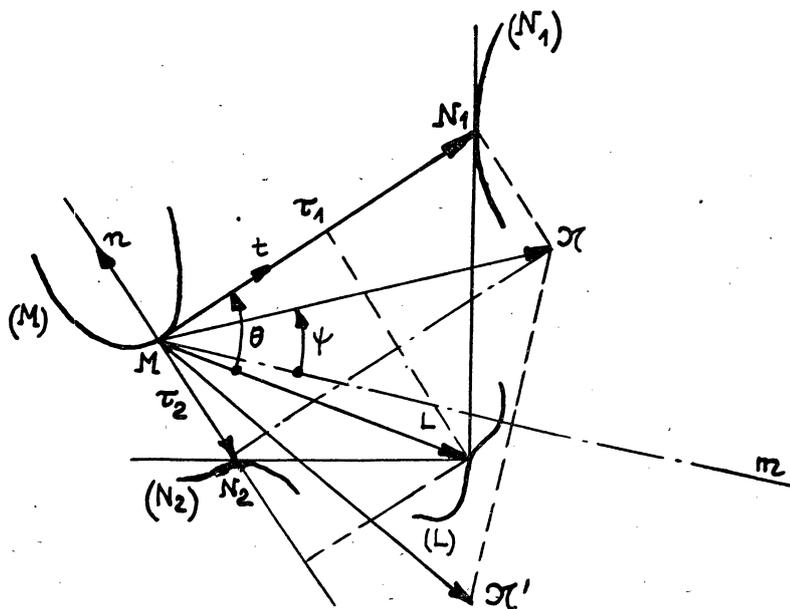
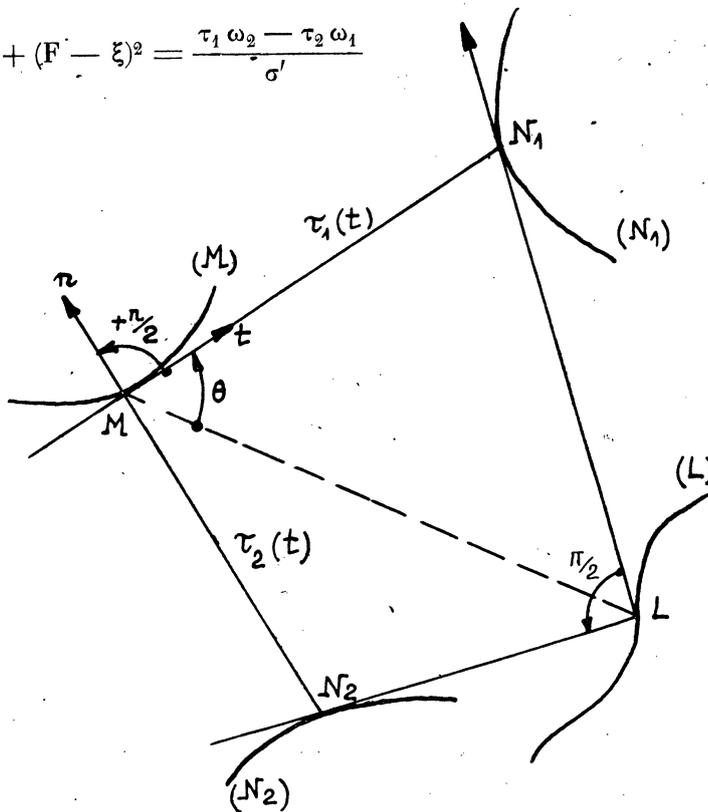
que l'on sait intégrer.

42. — Le quadrilatère fondamental $M N_1 L N_2$ est inscriptible.

Admettant l'existence d'une développante généralisée (N_1) et d'une développée généralisée (N_2) pour une courbe-base (M), nous déterminons un « quadrilatère fondamental convexe » qui possède un angle droit en M . Il sera donc inscriptible si l'angle en L est également droit. Exprimons que le produit des

pentas des droites LN_1 et LN_2 est égal à -1 , nous obtenons la relation :

$$(G - \eta)^2 + (F - \xi)^2 = \frac{\tau_1 \omega_2 - \tau_2 \omega_1}{\sigma'}$$



c'est-à-dire

$$(167) \quad \overline{ML} = \tau_1 \cdot \cos \theta - \tau_2 \cdot \sin \theta$$

Donnons une interprétation géométrique simple à (167).

Soit $\vec{M\eta\bar{b}}$ le vecteur de composantes $\vec{MN}_2 = \tau_2$, $\vec{MN}_1 = \tau_1$ et $\vec{M\eta\bar{b}'}$ le vecteur symétrique par rapport à Mm , bissectrice intérieure de l'angle (\vec{MN}_2, \vec{MN}_1)

Posons alors $(\vec{Mm}, \vec{M\eta\bar{b}}) = \psi$, l'égalité (167) s'écrit :

$$\overline{ML}^2 = \left| \frac{\tau_1}{\overline{ML} \cdot \sin \theta} \quad \frac{\tau_2}{\overline{ML} \cdot \cos \theta} \right| = \vec{ML}_1 \wedge \vec{M\eta\bar{b}'}$$

soit

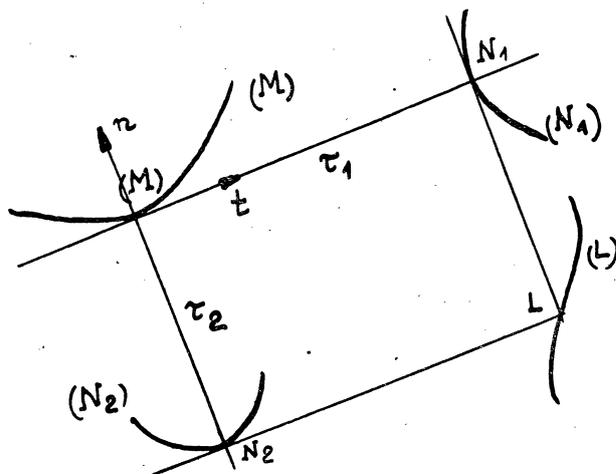
$$\overline{ML} = \overline{M\eta\bar{b}'} \cdot \sin(\vec{ML}, \vec{M\eta\bar{b}'})$$

mais

$$(\vec{MN}_2, \vec{M\eta\bar{b}}) = \frac{\pi}{4} + \psi \quad \text{et} \quad (\vec{MN}_2, \vec{ML}) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

d'où

$$(168) \quad \overline{ML} = \overline{M\eta\bar{b}} \cdot \sin\left(\theta - \psi - \frac{\pi}{4}\right).$$



La relation (167) jointe aux deux équations différentielles (153) permet de déterminer les coordonnées paramétriques F et G de la courbe adjointe.

Si nous voulons en outre que le quadrilatère fondamental soit rectangle, il nous faut remplacer la relation (167) par les deux égalités.

$$(169) \quad \tau_1 = \frac{\omega_2}{\sigma'}, \quad \tau_2 = -\frac{\omega_1}{\sigma'}$$

d'où les coordonnées du point L :

$$(170) \quad \begin{cases} F - \xi = (\sigma_0 - \sigma) \cos \alpha + \sigma_1 \cdot \sin \alpha, \\ G - \eta = (\sigma_0 - \sigma) \sin \alpha - \sigma_1 \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Soit

$$(171) \quad \overline{ML}^2 = \sigma^2 - 2\sigma_0 \cdot \sigma + \sigma_1^2 + \sigma_0^2.$$

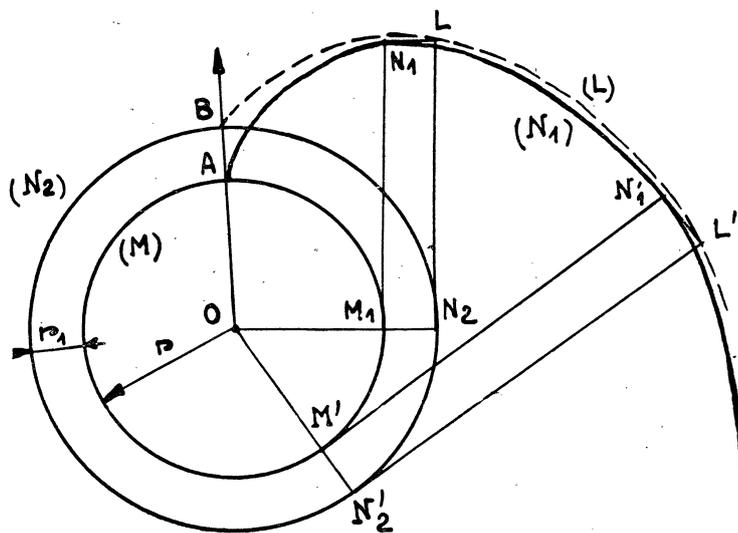
Ainsi lorsque le carré de la distance ML est égal à un trinôme du second degré en σ , à coefficients constants de la forme (171), le quadrilatère fondamental est un rectangle.

Quant aux courbes (N_i) , elles sont données par les égalités (169) qui s'écrivent

$$(172) \quad \begin{cases} \tau_2 = -\sigma_1 \\ \tau_1 = \sigma_0 - \sigma \end{cases}$$

Celles-ci montrent que dans le cas considéré la développante généralisée (N_1) n'est autre que la développante classique de la courbe (M) et que la développée généralisée (N_2) est une courbe parallèle à la courbe-base.

421. — La courbe-base est un cercle.



Supposons par exemple que la courbe-base soit un cercle de rayon r ; la développée généralisée (N_2) est alors le cercle concentrique de rayon $r + r_1$.

La développante généralisée (N_1) est la développante classique, que l'on sait construire, avec point de rebroussement en A. Le quadrilatère fondamental NN_1LN_2 étant rectangle, la construction de la courbe adjointe (L) est immédiate.

La courbe-base étant représentée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} \xi = a \cos t \\ \eta = a \sin t \end{cases}$$

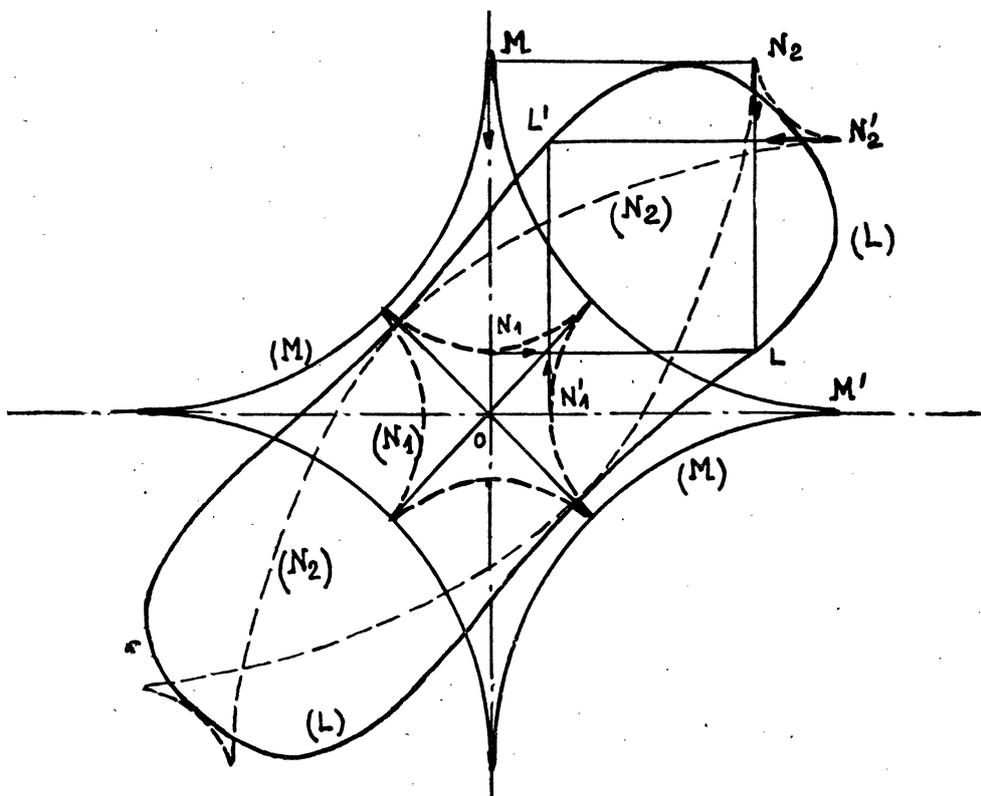
nous avons pour le point N_1

$$(173) \quad \begin{cases} X_1 = a (\cos t + t \sin t) \\ Y_1 = a (\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

d'où pour la courbe adjointe

$$(174) \quad \begin{cases} F = a (2 \cos t + t \sin t) \\ G = a (2 \sin t - t \cos t) \end{cases}$$

422. — La courbe-base est une astroïde.



Si nous prenons comme courbe-base l'astroïde

$$(175) \quad \begin{cases} \xi = a \cos^3 t \\ \eta = a \sin^3 t \end{cases}$$

Sa développante classique (N_1) a pour coordonnées paramétriques

$$(176) \quad \begin{cases} X_1 = a \cos^3 t - f(t) \cdot \cos t \\ Y_1 = a \sin^3 t + f(t) \cdot \sin t \end{cases}$$

avec

$$f(t) = t - \frac{3a}{2} \sin^2 t.$$

Et la développée généralisée

$$(177) \quad \begin{cases} X_2 = a \cos^3 t - r_1 \cdot \sin t \\ Y_2 = a \sin^3 t - r_1 \cdot \cos t \end{cases}$$

La construction du point L de l'adjointe correspondante est immédiate.

Note complémentaire sur l'équation d'Abel.

L'équation (152) est extrêmement importante et nous verrons, dans des études ultérieures, que les notions d'isométrie et d'isoradiicité, que nous avons jusque-là attachées à l'équation de Riccati, se trouvent également et surtout liées à l'équation d'Abel. Il y aura donc ce que nous pouvons dès à présent appeler « une canonisation géométrique de l'équation d'Abel ». Celle-ci nous permettra d'associer à des courbes planes des « ultradéveloppantes de première espèce » parmi lesquelles doivent se trouver, en cas particulier, les développantes généralisées liées à une équation de Riccati.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE DES OUVRAGES CONSULTÉS

- [A] — CARTAN (E.) — La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. Exposés de Géométrie, V, (Paris, Hermann, 1935).
— Leçons sur la théorie des Espaces à Connexion projective. (Paris, Gauthier-Villars, 1937).
- [B] — BUHL (A.) — Nouveaux Eléments d'Analyse, t. II et t. III (Paris, Gauthier-Villars, 1940.)
- [C] — RAFFY (L.) — Nouvelles Annales de Mathématiques (1902).
- [D] — LAGRANGE (R.) — Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LXVI, fasc. 3-4, (1938).
- [E] — DRACH (J.) — Comptes rendus de l'Académie des Sciences (26 octobre 1937).
- [F] — HALPHEN (G.) — Thèse. Université de Paris (1878). Œuvres, t. I et II. (Gauthier-Villars, 1916).
— Bulletin de la Société Mathémat. de France, t. IV et V (1876, 76).
— ZEUTHEN (N.) — Mathematische Annalen, t. III (1871).
- [G] — ABRAMESCU (N.) — Courbure affine et développée affine. Mathematica, XXI, (1945); XXII (1946, Bucarest).
- [H] — BOUTROUX (P.) — Recherches sur les Transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des Equations différentielles du second ordre (Mémoire couronné).
— Annales de l'Ecole Normale, t. XXX, troisième série (1913).
— Voir également : Fonctions multiformes à une infinité de branches, *loc. cit.* t. XXII (1905).
- [I] — KLEIN (F.) — Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion. J. Springer (Berlin, 1933).
- [J] — DARBOUX (G.) — Théorie générale des surfaces, t. I et II. Comptes rendus Académie des Sciences, t. LXXXXIV (1882).
- [K] — POMPEIU. — Comptes rendus Académie des Sciences, t. CLXI (1915).
— MINETTI. — Comptes rendus Académie des Sciences, t. CLXXXXVII (1933). Atti R.A.N. Lincei, t. XIX (1934).
- [L] — BOULIGAND (G.) — Leçons de Géométrie vectorielle (Paris, Vuibert, 1936).
- [M] — GAMBIER (B.) — Bulletin des Sciences Mathémat. t. XXXXIV (1920).
- [N] — LIOUVILLE (R.) — « Sur une équation différentielle du premier ordre ». Acta Mathematica, t. XXVII (1903).
- [O] — ABEL (N.-H.) — Œuvres complètes, t. II, n° 5 (Oslo, 1881).

TABLE DES MATIÈRES DE CE MÉMOIRE

	Pages
Chap. I. — <i>L'équation de Riccati et ses formes canoniques.</i>	
11- Obtention de formes canoniques	4
12- Famille des formes canoniques	5
13- Sur quelques cas élémentaires d'intégrabilité	7
131 — Les exemples de René LAGRANGE.	
14- L'équation linéaire du second ordre	10
15- La résolvante schwarzienne du troisième ordre	12
Chap. II. — <i>Développantes généralisées d'une courbe plane.</i>	
21- Position du problème	13
22- Mise en équation	13
23- Courbes isométriques	16
24- Sur des développantes généralisées particulières	17
241 — Le triangle fondamental est rectangle, son sommet décrit la développante.	
242 — La sous-tangente généralisée de la développante (N) est liée par une relation simple à une des hauteurs du triangle fondamental.	
25- Existence de deux cas particuliers	19
251 — Impossibilité du cas $\omega_1 = 0$	19
252 — Le triangle fondamental est rectangle, son sommet décrit la courbe-base	20
2521.- La forme réduite de M.-E. CARTAN	21
26- La courbe-base et son adjointe sont des cercles	22
261 — Développante de cercle généralisée à ∞^1 points de rebroussement	23
262 — Développante de cercle généralisée à 4 rebroussements	25
263 — Cas de la cissoïde de Dioclès.	27
27- Développantes généralisées de courbes à adjointes rectilignes	28
(les tangentes à la courbe-base étant liées par une relation simple à un point fixe de l'adjointe).	
271 — Cas particulier $K = 1$	29
2711.- Cas de la parabole :	31
Le point fixe est au sommet de la parabole.	
27111. Quelles sont les développantes parmi lesquelles se trouve (L) ?	33

Chap. III — *Développées généralisées d'une courbe plane.*

31- Position du problème	37
32- Mise en équation	38
33- Courbes isoradiiques	39
34- Cas particuliers d'intégrabilité	41
341 — Cas $\omega_1 = 0$: le triangle fondamental est rectangle, son sommet décrit la courbe-base.	41
3411. - Courbes (M) à adjointes rectilignes	42
34111. - La courbe-base est un cercle	43
34112. - La courbe-base est un cycloïde	46
34113. - La courbe-base est une chaînette	48
352. — La forme réduite de M. E. CARTAN	50
Remarque: l'équation d'Abel	52

Chap. 4 — *Adjointes doubles à une courbe plane.*

41- Cas de dégénérescence	55
42- Le quadrilatère fondamental $MN_1 LN_2$ est inscriptible	56
421. — La courbe-base est un cercle	59
422. — La courbe-base est une astroïde	60
Note complémentaire sur l'équation d'Abel	61
Index bibliographique des ouvrages consultés	62
