ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. HURON

Sur un lemme de représentation conforme

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 15 (1951), p. 155-160
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1951_4_15__155_0>

SUR UN LEMME DE REPRÉSENTATION CONFORME [1]

par R. HURON

Résumé. — *Etude directe de la majoration des longueurs des chemins tracés intérieurement à un domaine simplement connexe et reliant deux arcs disjoints de la frontière de ce domaine. La limite obtenue est plus précieuse que celle résultant des travaux de* MM. LERAY *et* KRAVTCHENKO.

[1]. — Je démontrerai directement un lemne dû à M^me FERRAND-LELONG [2] :

« Soit $C\rho$ une coupure circulaire de rayon ρ du cercle unité (C) centrée au point A de sa circonférence (K) : $q\rho$ la séparatrice qui lui correspond dans le domaine (Γ) ; pour une plénitude de valeurs de ρ, $q\rho$ est rectifiable et sa longueur $\lambda(\rho)$ vérifie l'inégalité :

$$\int_0^R \frac{\lambda^2(\rho)}{\rho} d\rho < \pi\sigma$$

σ étant l'aire intérieure du domaine (Γ) ».

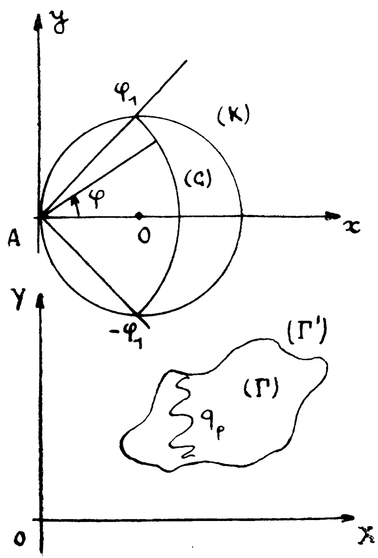

fig 1

Soit O le centre de (C), prenons AO comme axe des x et Ay directement perpendiculaire à Ax. Soit :

(1) $$Z = f(z) \qquad (z = x + iy)$$

la fonction analytique qui réalise l'application conforme de (C) sur le domaine (Γ) de frontière (Γ') du plan $Z = X + iY$.

---

1. C. R. *Académie des Sciences*, t. 221, pp. 367-369.

Considérons une coupure circulaire $C\rho$ de rayon ρ et de centre A, (1) lui fait correspondre dans (Γ) une séparatrice $q\rho$ dont la longueur qui n'est peut-être pas finie est égale à :

$$(2) \qquad \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} | f'(\rho e^{i\varphi}) | \rho \, d\varphi$$

Je dis toutefois qu'il existe une plénitude de valeurs de ρ pour lesquelles l'intégrale (2) a une valeur finie.

L'intégrale :

$$\lambda(\rho, \varepsilon) = \int_{-\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_1-\varepsilon} | f'(\rho e^{i\varphi}) | \rho \, d\varphi$$

est finie si ε est arbitrairement petit mais non nul; on peut l'écrire :

$$\frac{\lambda(\rho, \varepsilon)}{\sqrt{\rho}} \int_{-\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_1-\varepsilon} | f'(\rho e^{i\varphi}) | \sqrt{\rho} \, d\varphi$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Schwartz :

$$\frac{\lambda^2(\rho, \varepsilon)}{\rho} \leqslant 2\varphi_1 \int_{-\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_1-\varepsilon} | f'(\rho e^{i\varphi}) |^2 \rho \, d\varphi$$

Mais $2\varphi_1 \leqslant \pi$ d'où :

$$(3) \qquad \frac{\lambda^2(\rho, \varepsilon)}{\rho} \leqslant \pi \int_{-\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_1-\varepsilon} | f'(\rho e^{i\varphi}) |^2 \rho \, d\varphi$$

L'intégrale qui figure au second membre de (3) est une fonction :

$$\lambda_1(\varphi_1, \rho, \varepsilon)$$

dans laquelle ρ et φ_1 sont liés par relation : $2 \cos \varphi_1 = \rho$.

Nous avons :

$$\int_0^2 \lambda_1(\varphi_1, \rho, \varepsilon) \, d\rho = \int_0^2 \int_{-\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_1-\varepsilon} | f'(\rho e^{i\varphi}) |^2 \rho \, d\rho \, d\varphi < \sigma$$

et si $\varepsilon \to o$:

$$\int_0^2 \lambda_1(\varphi_1, \rho, o) \, d\rho = \sigma$$

Désignons par e la mesure de l'ensemble (E) des points de l'intervalle $o < \rho < 2$ où $\lambda_1(\rho)$ et par suite λ n'est pas supérieurement borné. Soit M un nombre arbitrairement grand; en tout point de (E) nous avons :

$$\lambda_1(\rho > M$$

d'où :

$$\int_0^2 \lambda_1(\rho) \, d\rho = \sigma > 2M > Me$$

puisque (E) est inclus dans l'intervalle (0,2). Il en résulte que :

$$e < \frac{\sigma}{M}$$

σ est fini par hypothèse et M arbitrairement grand, donc e est nul. Ce qui prouve que pour *une plénitude de valeurs de* ρ *de l'intervalle* (0,2), $q\rho$ est rectifiable.

[2]. — CONSÉQUENCES. De (3) nous tirons pour : $o < R \leqslant 2$

$$\int_{o}^{R} \frac{\lambda^2(\rho)}{\rho} d\rho < \pi\sigma \tag{4}$$

d'où, si :

$$o \leqslant \rho_1 < \rho_2 \leqslant R < 2$$

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\lambda^2(\rho)}{\rho} d\rho \leqslant \int_{o}^{R} \frac{\lambda^2(\rho)}{\rho} d\rho < \pi\sigma \tag{5}$$

Les nombres ρ_1 et ρ_2 définissent deux coupures circulaires $C\rho_1$ et $C\rho_2$ qui par (1) sont transformées en deux séparatrices $q\rho_1$ et $q\rho_2$. Soit λ_1 la limite inférieure des longueurs des séparatrices $q\rho$ images par (1) des coupures $C\rho$, $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$; Λ_1 existe d'après le n° 1. Nous avons alors :

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\lambda^2(\rho)}{\rho} d\rho \geqslant \Lambda_1^2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \Lambda_1^2 \,\mathrm{Log.}\, \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{6}$$

D'où d'après (5) :

$$\Lambda_1^2 < \frac{\pi\sigma}{\mathrm{Log}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{7}$$

[3]. — APPLICATION : *Problème.* Considérons un domaine (Γ) borné, simplement connexe de frontière (Γ'). Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre points de (Γ') le sens $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ étant le sens trigonométrique. Il en

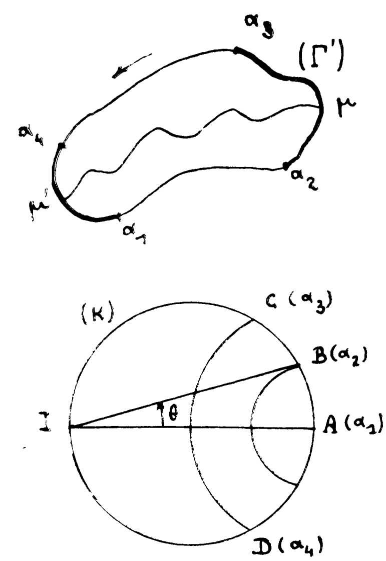

fig 2

résulte que les arcs $\alpha_2\ \alpha_3$ et $\alpha_4\ \alpha_1$ n'empiètent pas l'un sur l'autre. Nous nous proposons de majorer le minimum des longueurs des chemins $(\mu\ \mu')$ tracés inférieurement à (Γ) et joignant $\alpha_2\ \alpha_3$ à $\alpha_4\ \alpha_1$ (*fig.* 2). Nous désignons ce minimum par $\Lambda\ (\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_1)$.

a) *étude d'un cas particulier :*

Transformons (Γ) en le cercle unité de telle manière qu'aux points $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4$ de (Γ') correspondent les points A, C, B de (K) :

$$AC = AD = 1 \ (fig.\ 3).$$

B image de α_2 est alors sur le petit arc AC.

Posons $AB = \rho_1$; les longueurs des chemins correspondant dans (Γ) aux coupures circulaires de centre A et de rayon ρ $(\rho_1 \leqslant \rho \leqslant 1)$ ont d'après le n° 2 une limite inférieure Λ_1 vérifiant l'inégalité :

$$\Lambda_1^2 \leqslant \frac{\pi\sigma}{\operatorname{Log} 1/\rho_1} \tag{8}$$

Or ces chemins sont inclus dans ceux joignant intérieurement à (Γ), $\alpha_2\ \alpha_3$ et $\alpha_4\ \alpha_1$ puisque les images sont incluses dans les chemins joignant intérieurement à (C), BC et DA. Nous avons donc $\Lambda \leqslant \Lambda_1$ c'est-à-dire :

$$\Lambda^2 \leqslant \frac{\pi\sigma}{\operatorname{Log}\dfrac{1}{\rho_1}} \tag{9}$$

Soit I le point diamétralement opposé à A sur (K), θ l'angle polaire de B, I étant le pôle et IA l'axe polaire, soit r le rapport anharmonique (CBDA), nous avons :

$$r = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\theta,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right) = \frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}$$

Mais $\rho_1 = 2\sin\theta$ d'où :

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{3}{r^2} - \frac{3}{r} + 1 \tag{10}$$

Lorsque θ varie de o à $\dfrac{\pi}{6}$, r ainsi que ρ_1 croissent de 0 à 1; dans les mêmes conditions $\dfrac{1}{\rho_1}$ et $\dfrac{1}{r}$ décroissent de $+\infty$ à 1.

Formons :

$$\delta_1 = \frac{1}{\rho_1^2} - \sqrt{\frac{1}{r}} = 3x^4 - 3x^2 - x + 1$$

en posant $x = \sqrt{\dfrac{1}{r}}$ On vérifie facilement que lorsque x croit de 1 à $+\infty$, δ_1 varie de 0 à $+\infty$. Nous avons donc :

$$\frac{1}{\rho_1^2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{r}}$$

d'où :

$$2 \operatorname{Log} \frac{1}{\rho_1} \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1}{r}$$

soit puisque $o < r < 1$:

$$\frac{4}{\operatorname{Log} \frac{1}{r}} \geqslant \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{\rho_1}}$$

d'où d'après (9) :

$$\Lambda^2 \leqslant \frac{4 \pi \sigma}{\operatorname{Log} \frac{1}{r}} \quad (o < r < 1) \tag{11}$$

qui est l'inégalité qui nous sera utile plus loin.

Remarque : (10) permet d'écrire :

$$\frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{\rho_1}} = \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} (r^2 - 3r + 3)}$$

si $r^2 - 3r + 3 \geqslant 1$ soit $r^2 - 3r + 2 \geqslant o$, c'est-à-dire en particulier $r \leqslant 1$, nous avons :

$$\frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{\rho_1}} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{1}{r}}$$

d'où l'inégalité plus précise :

$$\Lambda^2 \leqslant \frac{\pi \sigma}{\operatorname{Log} \frac{1}{r}} \tag{12}$$

b) *Étude du cas général.*

Je démontrerai tout d'abord que la valeur de r ne dépend que de (Γ') et $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ et non de la transformation conforme transformant (Γ) en cercle fondamental (ou en demi plan-supérieur $\mathfrak{G}$)

Soient en eflet deux transformations conforme τ_1 et τ_2 transformant (Γ) en (C). La première établit la correspondance :

$$(\Gamma) - (C_1) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{matrix} \right.$$

la seconde :

$$(\Gamma) - (C_2) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{matrix} \right.$$

La transformation conforme qui fait passer de (C_1) à (C_2) est une transformation linéaire λ que l'on peut toujours choisir de telle manière que l'on ait la correspondance :

$$\begin{cases} A_1 \; C_1 \; D_1 \\ A_2 \; C_2 \; D_2 \end{cases}$$

B_1 se transforme alors en B'_2 et l'on a :

$$(A_1\ B_1\ C_1\ D_1) = A_2\ B'_2\ C_2\ D_2\ )$$

Mais au sens de la théorie des groupes on a :

$$(\tau_1\ (\lambda) = (\tau_2) \tag{13}$$

avec le tableau des correspondances :

$$\begin{array}{lcccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ (\tau_1)\ (\lambda) \ — & A_2 & B'_2 & C_2 & D_2 \\ (\tau_2) \ — & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}$$

Il résulte de (13) que B_2 et B'_2 coïncident, donc que :

$$(A_1\ B_1\ C_1\ D_1) = (A_2\ B_2\ C_2\ D_2)$$

Ainsi r *est un invariant pour l'ensemble des transformations conformes transformant* (Γ) *en* (C) et les inégalités (10) et (11) ont lieu pour toute transformation conforme faisant passer de (Γ) à (C) (ou au demi plan-supérieur $\mathcal{C}$.

Dans ce dernier cas r est le rapport anharmonique : $(t_3\ t_2\ t_4\ t_1)$ des abscisses $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ des images de $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ sur l'axe Ot limitant le demi plan supérieur $\mathcal{C}$ et (10) n'est autre que le résultat de M. LERAY précisé par M. KRAVTCHENKO [3].

REMARQUES :

La forme (11) est plus précise que celle donnée par M. KRAVTCHENKO et elle est valable pour $o \leqslant r \leqslant 1$ alors que la démonstration de M. KRAVTCHENKO impose la restriction $o \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$. D'autre part notre démonstration est directe et élémentaire, celle de MM. LERAY et KRAVTCHENKO repose sur des formules compliquées de la théorie de la fonction modulaire.

On trouvera des applications de (5) et de (10) à l'étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme dans les mémoires déjà cités de M[me] FERRAND-LELONG et M. KRAVTCHENKO.

---

3. Sur le problème de représentation conforme de Helmotz; théorie des sillages et des proues, n° 20, Journ. Math., 3[me] série, 20, 1941.