ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur une classe d'équations différentielles d'ordre infini

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 15 (1951), p. 195-205
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1951_4_15__195_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

par Jean COMBES.

Résumé. — Étude des équations de la forme (E) $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n y^{(n)} = z$, *z et y étant des fonctions respectivement donnée et inconnue de la variable complexe* x, *et les* c_n *étant des coefficients constants positifs tels que* $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \geqslant \frac{c_{n+1}}{c_n}$ *Réduction du problème à la résolution d'un système (S) d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. L'équation (E), comme le système (S), admet au plus une solution. Conditions suffisantes d'existence et expression de la solution. Exemples. Extension de certains résultats, et application à une définition de l'ordre des fonctions entières.*

INTRODUCTION

Le présent article est essentiellement consacré à l'étude dans le champ complexe d'une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre infini à coefficients constants, qui jouissent de propriétés simples pouvant être établies par voie élémentaire.

Les équations du type $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n\, y^{(n)} = z$ ont fait l'objet de nombreux travaux, dont les premiers en date semblent être ceux de C. Bourlet, F. Schürer, E. Hilb, H. von Koch (1). Ces travaux ont mis en évidence le rôle essentiel joué par la série $F(t) = \sum c_n t^n$ et par ses zéros. Les coefficients c_n n'y sont assujettis qu'à la condition que la série $F(t)$ ait un rayon de convergence R non nul, et la recherche se limite aux solutions vérifiant la condition de régularité

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|y^{(n)}(0)|} \leqslant r \qquad (r < R)$$

1. Voir la bibliographie en fin de l'article.

Nous imposerons ici aux coefficients c_n des conditions beaucoup plus particulières : les c_n seront des nombres positifs tels que la suite $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ soit non décroissante. Par contre la série $F(t)$, qui n'interviendra pas dans les démonstrations, pourra avoir un rayon de convergence nul, et aucune restriction ne sera imposée à l'avance aux solutions.

La résolution de l'équation différentielle équivaut à celle d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sous les hypothèses faites ce système admet au plus une solution qui s'exprime, lorsqu'elle existe, par des formules généralisant celles de Cramer. Ces résultats s'obtiennent par une méthode classique : étude du système réduit à un nombre fini d'équations, puis passage à la limite; et les démonstrations, de caractère élémentaire, sont basées sur l'emploi d'un lemme bien connu d'Abel [2].

Si les hypothèses faites sur les c_n sont, même très légèrement, élargies, par exemple si elles ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang, la simplicité des résultats et notamment l'unicité des solutions peuvent disparaître. Nous donnerons des exemples, et indiquerons quelques faits concernant des cas plus généraux.

Les solutions $y(x)$ sont à priori, x étant supposé complexe, des fonctions holomorphes au voisinage d'un point. Nous verrons que ce sont nécessairement, comme les seconds membres donnés $z(x)$, des fonctions entières, dont l'ordre ne peut dépasser une borne qui dépend de la rapidité de croissance de la suite c_n, et ceci suggère une définition possible de l'ordre des fonctions entières.

I. — Mise en équations.

1. **Préliminaires.** — Soit l'équation (E) $\sum_{0}^{\infty} c_n\, y^{(n)} = z$, où les c_n sont des nombres positifs tels que la suite $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ soit non décroissante, et où z et y désignent des fonctions respectivement donnée et inconnue de la variable complexe x.

Nous cherchons les solutions y de (E) holomorphes au voisinage d'un point qui peut être pris pour origine. Soit $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots$

On a : $y^{(n)} = n!\, a_n + \ldots + (p+n) \ldots (p+1)\, a_{p+n} x^p + \ldots$

Posons $A_n = n!\, a_n$. Le coefficient de x^p dans $\sum_{0}^{m} c_n\ y^{(n)}$ *est*

$$\frac{1}{p\,!}\,(c_0\, A_p + \ldots + c_m\, A_{p+m}).$$

2. Voir par exemple Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, Paris, 1933, p. 180, ou Valiron, *Théorie des Fonctions*, Paris, 1942, p. 12.

Convergence de $\sum\limits_0^\infty c_n\, y^{(n)}$. — Il est *nécessaire* que $\sum\limits_0^\infty c_n\, A_n$ converge. Ceci entraîne que y est une fonction entière, d'ordre $\leqslant 1$, puisque a_n est de la forme $\dfrac{u_n}{n\,!\,c_n}$, la série $\Sigma\, u_n$ étant convergente.

Réciproquement, si $\sum\limits_0^\infty c_n\, A_n$ converge, la somme d'un nombre quelconque de $c_n\, A_n$ consécutifs et pris à partir de $c_p\, A_p$ est bornée en module par un nombre M_p qui $\to o$ si $p \to \infty$. Il en résulte, d'après un lemme d'Abel, la suite $\dfrac{c_0}{c_p}$, $\dfrac{c_1}{c_{p+1}}$ ... étant non croissante, que, quel que soit m,

$$|c_0\, A_p + \ldots + c_m\, A_{p+m}| = \left| \frac{c_0}{c_p}\, c_p\, A_p + \ldots + \frac{c_m}{c_{p+m}}\, c_{p+m}\, A_{p+m} \right| < \frac{c_0}{c_p}\, M_p;$$

d'autre part la série $\sum\limits_0^\infty c_n\, A_{p+n}$ est convergente et sa somme satisfait à la même inégalité. Dans $\sum\limits_0^m c_n\, y^{(n)}$, le coefficient du terme en x^p est, quel que soit m, borné en module par $\dfrac{c_0}{c_p}\, \dfrac{M_p}{p\,!}$, et tend lorsque $m \to \infty$ vers :

$$b_p = \frac{1}{p\,!} \sum_0^\infty c_n\, A_{p+n}, \quad \text{avec } |b_p| < \frac{c_0}{c_p}\, \frac{M}{p\,!} \ .$$

Par suite la série $\sum\limits_0^\infty c_n\, y^{(n)}$ converge uniformément dans tout domaine borné et a pour somme la fonction entière $z = b_0 + b_1\, x + \ldots + b_p\, x^p + \ldots$, dont l'ordre, comme celui de y, ne peut dépasser 1 [3].

On voit que, y étant supposée analytique, la convergence *en un point* de $\sum\limits_0^\infty c_n\, y^{(n)}$ entraîne la convergence uniforme dans tout domaine borné.

Si on suppose que y est une fonction non nécessairement analytique de la variable réelle x, mais que la série converge uniformément *sur un segment,* le maximum sur ce segment de $|y^{(n)}| \to 0$ quand $n \to \infty$, ce qui entraîne l'analyticité, et on retombe sur le cas précédent.

Enfin les résultats sont moins simples si toutes les hypothèses imposées aux c_n ne sont pas vérifiées. Par exemple si seulement $\left|\dfrac{c_{n+2}}{c_{n+1}}\right| \geqslant \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ les c_n étant complexes, la convergence de $\sum\limits_0^\infty c_n\, y^{(n)}$ pour $x = 0$ ne suffit pas à entraîner la convergence partout. On verrait aisément que ce résultat subsiste moyennant la convergence absolue de la série de terme général $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} - \dfrac{c_{n+1}}{c_{n+2}}$, hypothèse d'ailleurs vérifiée dans le cas où les c_n sont

---

3. Ceci sera précisé dans la section III.

positifs. Nous distinguons tout de même le cas des c_n positifs, qui joue un rôle particulier dans la suite.

2. **Formation du système** (S). — Supposons donnée la fonction entière $z = b_0 + b_1 x + \cdots + b_p x^p + \cdots$ et posons $p!\, b_p = B_p$. D'après ce qui précède, la résolution de l'équation (E) équivaut à celle du système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues A_n :

$$(S)\quad \begin{cases} c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n + \cdots = B_0 \\ \qquad c_0 A_1 + \cdots + c_{n-1} A_n + \cdots = B_1 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_0 A_n + \cdots = B_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier directement ce système. Nous avons déjà observé au § 1 que la convergence de la série figurant dans la première équation entraîne la convergence de celles qui figurent dans les autres; et nous avons obtenu une condition nécessaire à l'existence de solutions : $c_n B_n$ doit tendre vers 0 lorsque $n \to \infty$.

II. — Étude du système (S).

3. **Système homogène.** — Montrons d'abord que, si tous les B_n sont nuls, le système (S) n'admet que la solution banale $A_n = 0$ pour tout n. Il en résultera que le système avec second membre admet au plus une solution.

On peut supposer $c_0 = 1$.

Considérons le système formé des $(n+1)$ premières équations où ne sont conservées que les inconnues $A_0, \ldots A_n$. Son déterminant est égal à 1. Soient $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ les coefficients qui permettent d'exprimer A_0 au moyen des seconds membres par $A_0 = \gamma_0 B_0 + \ldots + \gamma_n B_n$.

γ_n est la valeur de A_0 lorsque les B_i sont nuls, à l'exception de $B_n = 1$. Si on augmente n d'une unité, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ ne sont pas modifiés, et il s'introduit γ_{n+1} qui visiblement est donné par :

$$\gamma_{n+1} = -c_{n+1}\gamma_0 - c_n \gamma_1 \ldots - c_1 \gamma_n.$$

On trouve $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -c_1$, $\gamma_2 = -c_2 + c_1^2, \ldots$ De manière générale, à part γ_0, tous les c_n vérifient $-c_n \leqslant \gamma_n \leqslant 0$. La propriété est vraie en effet pour γ_1 et γ_2. Supposons la vraie jusqu'à γ_n. L'expression de γ_{n+1} prouve immédiatement que $\gamma_{n+1} > -c_{n+1}$. D'autre part, d'après le lemme d'Abel,

$$-c_n\gamma_1 \ldots - c_1\gamma_n = -\frac{c_n}{c_{n-1}}\, c_{n-1}\gamma_1 \ldots - \frac{c_2}{c_1}\, c_1\gamma_{n-1} - c_1\gamma_n \leqslant \frac{c_n^2}{c_{n-1}},$$

puisque $-c_{n-1}\gamma_1 \cdots - c_1\gamma_{n-1} - \gamma_n = c_n$, ce qui, joint à $c_{n+1} \geqslant \dfrac{c_n^2}{c_{n-1}}$, prouve que $\gamma_{n+1} \leqslant 0$.

Considérons dès lors le système (S) homogène, et soit $A_0, \dots A_n \dots$ une solution. La série $\Sigma\, c_n A_n$ étant convergente, la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs à partir de $c_{n+1} A_{n+1}$ est inférieure en module à un nombre ε_n qui $\to 0$ si $n \to \infty$, ce qui donne pour les $(n+1)$ premières équations :

$$A_0 + c_1 A_1 + \dots + c_n A_n = \alpha_0 \quad \text{avec} \quad |\alpha_0| < \varepsilon_n$$

$$A_1 + \cdots + c_{n-1} A_n = -\left(\frac{c_n}{c_{n+1}} c_{n+1} A_{n+1} + \cdots\right) = \alpha_1 \quad \text{avec} \quad |\alpha_1| < \frac{c_n}{c_{n+1}} \varepsilon_n,$$

et ainsi de suite. D'où, puisque $A_0 = \gamma_0 \alpha_0 + \cdots + \gamma_n \alpha_n$

$$|A_0| < \frac{\varepsilon_n}{c_{n+1}} (c_{n+1} + c_n |\gamma_1| + \cdots + c_1 |\gamma_n|) = \varepsilon_n \frac{2\, c_{n+1} + \gamma_{n+1}}{c_{n+1}} \leqslant 2\, \varepsilon_n.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on voit que $A_0 = 0$.

Il en est évidemment de même de chaque inconnue A_n.

4. **Système non homogène.** — D'après ce qui précède, le système avec second membre admet *au plus une* solution. Et, en reprenant la démonstration du § 3 dans le cas où les B_n ne sont pas tous nuls, on voit que, *lorsque la solution existe,* elle est donnée par les formules :

$$A_n = \gamma_0 B_n + \gamma_1 B_{n+1} + \cdots + \gamma_p B_{n+p} + \cdots \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nous avons obtenu des conditions *nécessaires* à l'existence de la solution : $c_n B_n$ doit tendre vers 0 si $n \to \infty$; les séries $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \gamma_p B_{n+p}$ doivent être convergentes quel que soit n.

Voici une condition *suffisante* très simple : la série $\sum\limits_{0} |c_n B_n|$ converge. En effet, si elle est réalisée, les séries définissant les A_n convergent absolument, puisque

$$|\gamma_p B_{n+p}| \leqslant |c_n B_{n+p}| \leqslant |c_{n+p} B_{n+p}|.$$

D'autre part, d'après l'expression des A_n et les relations qui lient les γ,

$$c_0 A_0 + \cdots + c_n A_n = B_0 + B_{n+1} (c_0 \gamma_{n+1} + \cdots + c_n \gamma_1)$$
$$+ B_{n+2} (c_0 \gamma_{n+2} + \cdots + c_n \gamma_2) + \cdots$$

et on voit que :

$$|c_0 A_0 + \cdots + c_n A_n - B_0| < |c_{n+1} B_{n+1}| + |c_{n+2} B_{n+2}| + \dots,$$

qui $\to 0$ si $n \to \infty$. De même pour les autres équations. Les A_n calculés forment bien la solution du système.

5. **Exemples.**

1° $c_n = 1$ pour tout n. C'est un cas limite. Le système s'écrit :

$$A_n + A_{n+1} + \cdots = B. \qquad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

d'où la solution :

$$A_0 = B_0 - B_1, \quad A_1 = B_1 - B_2, \quad \dots \quad A_n = B_n - B_{n-1}, \dots$$

sous la seule condition que $B_n \to 0$ si $n \to \infty$.

Dans ce cas la condition nécessaire $c_n B_n \to 0$ est aussi suffisante pour que le système admette une solution. Par contre la deuxième condition nécessaire signalée (convergence des séries définissant les A_n) ne l'est pas :

$$\gamma_0 = 1, \qquad \gamma_1 = -1, \qquad \gamma_n = 0 \qquad \text{si} \qquad n > 1,$$

les séries définissant les A_n ne comprennent chacune que deux termes.

2° *Supposons qu'il existe un entier* p *tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c_{n+p}}$ *converge* (la croissance de la suite c_n est assez rapide).

Si le système admet une solution, d'après la $(n+1)^{me}$ équation on a :

$$\begin{aligned} B_n &= A_n + c_1 A_{n+1} + \cdots + c_p \, A_{p+n} + \cdots \\ &= A_n + c_1 A_{n+1} + \cdots + c_{p-1} A_{p+n-1} + \alpha_n, \end{aligned}$$

avec $|\alpha_n| < \dfrac{K c_p}{c_{n+p}}$ d'après le lemme d'Abel et un raisonnement déjà employé. Les séries de termes généraux $c_n A_n$, $c_n A_{n+1}$, ... $c_n A_{p+n-1}$ et $c_n \alpha_n$ sont convergentes. Donc $\sum_0^{\infty} c_n B_n$ converge.

Réciproquement, supposons que $\sum_0^{\infty} c_n B_n$ converge. Faisons le changement d'inconnues :

$$A_n = B_n + \gamma_1 B_{n+1} + \dots + \gamma_{p-1} B_{n+p-1} + A'_n,$$

légitime puisque les séries de termes généraux $c_n B_n$, $c_n B_{n+1}$, ... sont convergentes. Dans le système (S') aux inconnues A'_n, la $(n+1)^{me}$ équation s'écrit :

$$A'_n + c_1 A'_{n+1} + \cdots = B'_n,$$

avec

$$\begin{aligned} B'_n = B_n &- (B_n + \gamma_1 B_{n+1} + \cdots + \gamma_{p-1} B_{n+p-1}) \\ &- c_1 \; (B_{n+1} + \cdots + \gamma_{p-1} B_{n+p}) - \cdots \end{aligned}$$

Les relations entre les γ montrent que, dans B'_n, les termes en B_n, B_{n+1}, ... B_{n+p-1} disparaissent. B'_n est la somme de p séries, dont les termes contiennent respectivement en facteur $\gamma_0 = 1$, γ_1, ... γ_{p-1}.

La première est

$$c_p B_{n+p} + c_{p+1} B_{n+p+1} + \dots = \frac{c_p}{c_{n+p}} \, c_{n+p} B_{n+p} + \dots$$

et sa somme est en module inférieure à $\dfrac{K}{c_{n+p}}$. De même pour les autres.

Finalement $|c_n B'_n| < K' \dfrac{c_n}{c_{n+p}}$; $\sum_0^{\infty} |c_n B'_n|$ converge. Le système (S'), donc le système (S), admet une solution.

On voit donc que, *dans l'hypothèse indiquée, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution est* $\sum_{0}^{\infty} c_n B_n$ *converge.*

6. **Cas plus généraux.** — Si les conditions imposées aux coefficients c_n ne sont pas vérifiées, les propriétés très simples que nous venons d'établir pour le système (S) peuvent disparaître, et notamment l'unicité des solutions n'est plus assurée.

Prenons par exemple $c_0 = -1$, $c_1 = c_2 = \cdots = 1$.
Le système homogène fournit les relations $A_0 = 2A_1$, $A_1 = 2A_2$ ... et admet comme solution $A_0 = \alpha$, ... $A_n = \frac{\alpha}{2^n}$, ..., α désignant une constante arbitraire. Le système avec second membre est impossible ou admet une infinité de solutions à un paramètre.

De même si $c_0 = c_1 = -1$, $c_n = 1$ pour $n > 1$, le système homogène montre que $A_0 = 2A_2$, $A_1 = 2A_3$, ... et on trouve comme solution $A_{2_n} = \frac{\alpha}{2^n}$, $A_{2_{n+1}} = \frac{\beta}{2^n}$, α et β désignant des constantes arbitraires. Le système avec second membre est impossible ou admet une infinité de solutions à deux paramètres.

Pour le cas où les c_n sont des nombres quelconques, réels ou complexes, assujettis à la seule condition que la série $F(t) = \Sigma c_n t^n$ ait un rayon de convergence R non nul, on pourra se reporter aux travaux de H. von Koch signalés à la bibliographie. Von Koch démontre notamment que pour le système (S), si on impose $\overline{lim} \sqrt[n]{|A_n|} \leqslant r < R$, la solution générale dépend de $\nu(r)$ paramètres indépendants, $\nu(r)$ désignant le nombre de zéros de $F(t)$ dans le cercle $|t| \leqslant r$. Dans le premier exemple signalé $F(t) = \frac{2t-1}{1-t}$ et a pour unique racine $t = \frac{1}{2}$, d'où résultent la solution $A_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour le système homogène et l'existence pour (S) de solutions dépendant du seul paramètre α, mais sous la condition que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}$ est strictement inférieur à 1. L'étude directe, qui est immédiate, a montré que cette restriction, imposée par la théorie générale, n'est pas nécessaire ici. De même, dans le deuxième exemple, $F(t) = \frac{2t^2-1}{t-1}$ et admet deux racines.

Toujours dans le cas où les c_n *sont des nombres quelconques,* réels ou complexes, *l'unicité des solutions réapparaît pour le système* (S) *lorsque la suite* $|c_n|$ *a une croissance assez rapide.* Il suffit, pour que la propriété ait lieu, que $\Sigma \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ converge (on suppose toujours que la suite $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ est non décroissante).

Posons $c_n = C_n e^{i\theta_n}$, $C_n = |c_n|$. Considérons tous les systèmes (S) pour lesquels les C_n sont donnés et les θ_n arbitraires. Lorsque $c_0 = C_0$, $c_n = -C_n$ pour $n \geqslant 1$, les γ_n ont des valeurs positives Γ_n données par

$$\Gamma_{n+1} = C_{n+1} + C_n \Gamma_1 + \dots + C_1 \Gamma_n$$

et on voit qu'alors les $|\gamma_n|$ atteignent simultanément leur valeur maximum.

Puisque $\Gamma_{n+2} = C_{n+2} + C_{n+1} \Gamma_1 + \dots + C_2 \Gamma_n + C_1 \Gamma_{n+1}$

$$= \frac{C_{n+2}}{C_{n+1}} C_{n+1} + \dots + \frac{C_2}{C_1} C_1 \Gamma_n + C_1 \Gamma_{n+1},$$

$$\Gamma_{n+2} < \left(\frac{C_{n+2}}{C_{n+1}} + C_1\right) \Gamma_{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma_{n+2}}{C_{n+2}} : \frac{\Gamma_{n+1}}{C_{n+1}} < \left(1 + C_1 \frac{C_{n+1}}{C_{n+2}}\right)$$

d'où résulte que $\dfrac{\Gamma_n}{C_n}$ reste borné, la série $\dfrac{C_{n+1}}{C_{n+2}}$ étant convergente par hypothèse.

Soit dès lors une solution A_n d'un système homogène. Supposons d'abord que $\Sigma\, |c_n A_n|$ converge. Le raisonnement déjà fait s'applique : le système réduit aux $(n+1)$ premières équations s'écrit :

$$A_0 + c_1 A_1 + \dots + c_n A_n = -c_{n+1} A_{n+1} \dots = \alpha_0 \quad (|\alpha_0| < \varepsilon_n)$$

$$A_1 + \dots + c_{n-1} A_n = -\frac{c_n}{c_{n+1}} c_{n+1} A_{n+1} \dots = \alpha_1$$

$$\text{avec } |\alpha_1| < \frac{C_n}{C_{n+1}} \varepsilon_n, \dots$$

D'où $$|A_0| \leqslant |\alpha_0| + \Gamma_1 |\alpha_1| + \dots + \Gamma_n |\alpha_n|$$

$$< \frac{C_{n+1} + \Gamma_1 C_n + \dots + \Gamma_n C_1}{C_{n+1}} \varepsilon_n = \frac{\Gamma_{n+1}}{C_{n+1}} \varepsilon_n$$

qui $\to 0$ si $n \to \infty$. A_0, et les autres inconnues sont nulles.

Si, pour la solution A_n, $\Sigma\, c_n A_n$ n'est pas absolument convergente, il suffit de remarquer que $\Sigma\, c_n A_{n+1} = \Sigma \dfrac{c_n}{c_{n+1}} c_{n+1} A_{n+1}$ l'est. En considérant le système (S) homogène, privé de la première équation, et en lui appliquant ce qui précède, on voit que les inconnues A_1 et suivantes sont nulles, donc aussi A_0.

Le système avec second membre a donc au plus une solution. Il reste à établir la condition que doivent vérifier les B_n pour que la solution existe. En utilisant des modes de raisonnement déjà employés, on trouve pour condition nécessaire et suffisante

$$\Sigma\, c_n B_n \text{ converge.}$$

III. — Étude de l'équation (E).

7. **Solution de** (E). — Les résultats trouvés pour le système (S) se transposent immédiatement à l'équation (E).

Supposons les c_n positifs et $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ non décroissant. Il y a au plus une solution; $z = \Sigma\, b_n x^n$ étant choisie de manière que la solution existe (il suffit que $\Sigma n!\ c_n\ b_n$ converge absolument), $y = \Sigma\, a_n x^n$ est connu puisqu'on sait calculer les a_n au moyen des b_n. D'ailleurs, en vertu de la convergence uniforme, on peut dériver (E) un nombre quelconque de fois :

$$\sum_0^\infty c_n\, y^{(n+p)} = z^{(p)} \quad \text{et on obtient} \quad y = \sum_0^\infty \gamma_p\, z^{(p)}.$$

Il en est de même lorsque les c_n sont des nombres quelconques vérifiant : $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ non décroissant et $\Sigma \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ converge.

8. **Ordre des solutions.** — L'ordre maximum des solutions de (E) dépend de la rapidité de croissance de la suite $|c_n|$.

Nous allons, sans nous occuper de résoudre (E), donner quelques précisions sur la convergence de $\Sigma\, c_n y^{(n)}$. Nous supposons, les c_n étant réels ou complexes, que la suite $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ est non décroissante et que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log |c_n|}{n \log n}$ existe. Nous posons $\lim \dfrac{\log |c_n|}{n \log n} = \dfrac{1}{\rho} - 1$, ρ étant appelé indice de la suite c_n $(0 < \rho \leqslant 1)$.

Si $\Sigma\, c_n y^{(n)}$ converge au voisinage de $x = 0$, la série $\Sigma\, c_n n!\, a_n$ est convergente, donc $|a_n| < \dfrac{K}{|c_n|\, n!}$ et $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{-\log |a_n|}{n \log n} \geqslant \dfrac{1}{\rho}$
y est d'ordre $\leqslant \rho$.

Pour une fonction d'ordre ρ, $\Sigma\, c_n y^{(n)}$ peut ne pas converger $\left(\text{exemple : } a_n = \dfrac{1}{n!\ c_n}\right)$ ou converger $\left(\text{exemple : } a_n = \dfrac{1}{n^2\ n!\ |c_n|}\right)$. Dans ce dernier exemple, la série $\Sigma\, c_n A_n$ converge absolument, ainsi que toutes les séries $\Sigma\, c_n A_{n+p}$. Il en résulte que $\Sigma\, c_n y^{(n)}$ converge uniformément dans tout domaine borné (voir § 1), et il en est a fortiori de même pour *toutes* les fonctions d'ordre $< \rho$.

Donc, *y étant une fonction entière d'ordre $\leqslant 1$, l'ordre de y est la borne supérieure des indices des suites c_n pour lesquelles $\Sigma\, c_n y^{(n)}$ converge.*

On pourrait développer des considérations analogues lorsque la suite $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ est non croissante.

9. Exemples.

1° *Reprenons le cas $c_n = 1$ pour tout n.*

y existe et est donné par $y = z - z'$, à condition que $n!\, b_n \to 0$ si $n \to \infty$.

Inversement, si y est donné, (E) définit z à condition que $\Sigma\, n!\, a_n$ converge. L'ensemble Z des seconds membres z possibles dans (E) est plus vaste que l'ensemble Y des y. L'ordre de y et celui de z sont $\leqslant 1$. Y et Z contiennent toutes les fonctions entières d'ordre < 1, mais pas toutes les fonctions d'ordre 1.

On trouve au passage le résultat simple suivant : *pour une fonction entière $y = \Sigma\, a_n\, x^n$ telle que $\Sigma\, n!\, a_n$ converge (notamment pour toute fonction entière d'ordre < 1).*
$y + \dots + y^{(n)} + \dots$ converge uniformément dans tout domaine borné.

La limite z peut s'obtenir en intégrant $y = z - z'$ et en utilisant les conditions initiales :

$$z = (a_0 + \dots + n!\, a_n + \dots)\, e^x - e^x \int_0^x y\, e^{-x}\, dx.$$

2° *Supposons les $c_n > 0$, la suite $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ non décroissante, $\sum \dfrac{c_n}{c_{n+p}}$ convergente pour une valeur de l'entier p.*

Ici les ensembles Y et Z coïncident.

On peut prendre par exemple $c_n = (n!)^{1/\rho - 1}$ avec $0 < \rho < 1$. Y et Z contiennent alors toutes les fonctions entières d'ordre $< \rho$, et seulement certaines fonctions d'ordre ρ.

10. Conclusion. — L'étude qui précède est celle d'un *opérateur linéaire* L opérant sur les fonctions entières, et tel que si $Ly = z$, on ait $Ly' = z'$.

Nous avons pu, avec des hypothèses particulières, étudier le domaine d'existence et le domaine des valeurs de L et établir qu'il possède un inverse unique.

Les exemples indiqués et les références citées montrent que le cas général est beaucoup plus complexe.

BIBLIOGRAPHIE

C. BOURLET. — Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini, *Annales Ec. Norm. Sup.*, 1897, t. XIV.

F. RIESZ. — Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

F. SCHÜRER. — Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme, *Berichte der K. Sächs. Ges der Wiss. zu Leipzig,* 1918.

E. HILB. — Lineare Differentialgleichungen unendlicher Ordnung, *Math. Annalen,* 1920, Bd 82.

H. VON KOCH. — On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum-formula, *Arkiv för Matematik,* 1921, Bd 15, n° 26.

H. VON KOCH. — Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini, *Arkiv för Matematitk,* 1922, Bd 16, n° 6.