

R. HURON

J. MÉRIC

## Sur une application du schéma d'urnes de Poisson

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 17 (1953), p. 265-272

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1953\\_4\\_17\\_\\_265\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1953_4_17__265_0)

© Université Paul Sabatier, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE APPLICATION DU SCHÉMA D'URNES DE POISSON

par R. HURON et J. MÉRIC

---

*Résumé.* — Étude de la distribution du nombre d'échantillons de composition déterminée apparaissant dans un prélèvement non exhaustif effectué sur les urnes d'un schéma de Poisson. Application à l'étude statistique du comportement des blattes dans le « problème du T ».

[1]. Désignons par :

$$U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_k,$$

les urnes du schéma de Poisson, et par :

$$p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_k$$

les proportions respectives des boules blanches dans ces urnes. La population de chaque urne est supposée suffisamment grande pour que les tirages puissent être considérés comme non exhaustifs.

On extrait de chaque urne  $\lambda$  échantillons de taille  $n$ . Soit  $X_r$  le nombre de ceux qui contiennent exactement  $r$  blanches;  $X_r$  est une variable aléatoire dont on se propose d'étudier la loi de probabilité.

[2]. Considérons l'urne  $U_i$ . La probabilité pour qu'un échantillon de taille  $n$ , extrait de cette urne, contienne  $r$  blanches est :

$$(1) \quad P_{i,r} = C_n^r p_i^r (1 - p_i)^{n-r}$$

On extrait  $\lambda$  échantillons de taille  $n$  de l'urne  $U_i$ . Soit  $X_{i,r}$  le nombre de ceux contenant  $r$  blanches. On a :

$$(2) \quad \text{Pr} [X_{i,r} = m] = C_\lambda^m P_{i,r}^m (1 - P_{i,r})^{\lambda-m}$$

$X_{i,r}$  est une variable aléatoire distribuée suivant une loi binômiale de moyenne :

$$m_{i,r} = \lambda P_{i,r}$$

et de variance :

$$v_{i,r} = \lambda P_{i,r} (1 - P_{i,r}),$$

On a, d'autre part :

$$(3) \quad X_r = \sum_{i=1}^{i=k} X_{i,r},$$

d'où :

$$(4) \quad M_r = E(X_r) = \sum_{i=1}^{i=k} m_{i,r},$$

et, puisque les  $X_{i,r}$  sont des variables aléatoires indépendantes :

$$(5) \quad V_r = E (X_r - M_r)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} v_{i,r}$$

[3]. Supposons que les points d'abscisses :  $p_1, p_2 \dots p_k$  divisent l'intervalle  $(0 - 1)$  en  $k$  intervalles égaux, de longueur  $\frac{1}{k}$ , c'est-à-dire que :

$$(6) \quad p_i = \frac{i}{k}$$

Nous traduirons cette hypothèse en disant que les  $p_i$  sont *également répartis* sur l'intervalle  $(0 - 1)$ . On a alors :

$$(7) \quad \limite_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} p_i^r (1 - p_i)^{n-r} = \int_0^1 p^r (1 - p)^{n-r} dp \\ = B(r + 1, n - r + 1)$$

D'où, pour  $k$  suffisamment grand :

$$M_r = \lambda k C_n^r B(r + 1, n - r + 1)$$

c'est-à-dire

$$(8) \quad M_r = \lambda \frac{k}{n + 1} = M$$

puisque cette valeur moyenne ne dépend pas de  $r$ .

D'autre part, d'après (5) :

$$V_r = \lambda C_n^r \sum_{i=1}^{i=k} p_i^r (1 - p_i)^{n-r} - \lambda (C_n^r)^2 \sum_{i=1}^{i=k} p_i^{2r} (1 - p_i)^{2n-2r}$$

Si l'on introduit l'hypothèse (6), on montre comme ci-dessus que :

$$(9) \quad V_r = \lambda k \left[ \frac{1}{n+1} - (C_n^r)^2 B(2r + 1, 2n - 2r + 1) \right]$$

[4]. **Remarques.**

a) Si l'on suppose, en outre,  $n$  assez grand, l'emploi de la formule de Stirling conduit à la valeur asymptotique :

$$(10) \quad V_r = \lambda k \left[ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(2n+1)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{r(n-r)}} \right]$$

qui suppose  $r \neq 0$  et  $r \neq n$ .

Pour  $r = 0$ , on a exactement :

$$(11) \quad V_0 = \lambda k \frac{n}{(n+1)(2n+1)}$$

b) En supposant toujours l'hypothèse (6) satisfaite, on montre que :

$$(12) \quad \limite_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} P_{i,r}^k = (C_n^r)^k B[r\mu + 1, (n-r)\mu + 1],$$

formule qui nous sera utile dans la suite.

[5]. Posons :  $Q_{i,r} = 1 - P_{i,r}$  ; on a :

$$\varphi_i(t) = E \left[ e^{(X_{i,r} - \lambda P_{i,r})t} \right] = \left[ Q_{i,r} e^{-P_{i,r}t} + P_{i,r} e^{(1-P_{i,r})t} \right]^\lambda$$

Désignons la quantité entre crochets par  $\Psi_i(t)$ . Les variables aléatoires  $X_{i,r}$  étant indépendantes, on aura pour la fonction caractéristique de  $X_r$  :

$$\varphi(t) = \left[ \prod_{i=1}^{i=k} \Psi_i(t) \right]^\lambda$$

D'où :

$$\text{Log } \varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{i=k} \text{Log } \Psi_i(t)$$

Mais :

$$\text{Log } \Psi_i(t) = P_{i,r} Q_{i,r} \frac{t^2}{2!} + P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r}) \frac{t^3}{3!} \dots$$

Il en résulte que :

$$\text{Log } \varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^k P_{i,r} Q_{i,r} \frac{t^2}{2!} + \lambda \sum_{i=1}^k P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r}) \frac{t^3}{3!} \dots$$

Pour passer à la variable réduite :

$$(13) \quad Z_r = \frac{X_r - \lambda \sum_{i=1}^k P_{i,r}}{\sqrt{\lambda \sum_{i=1}^k P_{i,r} Q_{i,r}}}$$

il suffit de poser :

$$t = \frac{\theta}{\sqrt{\lambda \sum_{i=1}^k P_{i,r} Q_{i,r}}}$$

On obtient :

$$\overline{\varphi}(\theta) \sim e \left[ \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\sum^i P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r}) \theta^3}{\sqrt{\lambda} \left( \sum^i P_{i,r} Q_{i,r} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\theta^3}{3!} \dots \right],$$

soit :

$$(14) \quad \varphi(\theta) \sim e^{-\frac{\theta^2}{2}} [1 + h \theta^3]$$

avec :

$$(15) \quad h = \frac{\sum^i P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r})}{3! \sqrt{\lambda} \left( \sum^i P_{i,r} Q_{i,r} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

[6]. La formule de réciprocity de Fourier permet de déduire de (13) la fonction de distribution de  $Z_r$ . On a :

$$f(z) \sim f_0(z) - h f_0'''(z)$$

avec :

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

D'où :

$$(16) \quad f(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left[ 1 - h(3z - z^3) \right]$$

[7]. Si l'on désigne par  $E_{i,r}$  l'événement consistant en ce que l'échantillon de taille  $n$  extrait de l'urne  $U_i$  contienne exactement  $r$  blanches, l'événement  $E_{i,r}$  a, pour  $r$  fixé, une probabilité constante  $P_{i,r}$ . Au schéma d'urnes envisagé dans cette note, on peut superposer un deuxième schéma d'urnes de Poisson de compositions respectives  $P_{i,r}$ ,  $Q_{i,r}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Les formules (13) et (14) se déduisent alors immédiatement de formules classiques (1).

#### [8]. Ordre de grandeur de $h$ pour $k$ grand.

On a :

$$\sum^i P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r}) = \sum^i (P_{i,r} - 3P_{i,r}^2 + 2P_{i,r}^3)$$

1. POISSON : « Recherches sur la probabilité des jugements ». (Bachelier, 1837.) Chapitre IV : « suite du calcul des probabilités dépendantes d'un très grand nombre », p. 246, nos 94-95.

G. DARMOIS : « Statistique Mathématique ». (Doin, 1928.) Chapitre III, §§ 8-10.

D'où, d'après (12)

$$\sum_i P_{i,r} Q_{i,r} (Q_{i,r} - P_{i,r}) \sim k \left[ \frac{1}{n+1} - 3 (C'_n)^2 B(2r+1, 2n-2r+1) \right] + 2 (C'_n)^2 B(3r+1, 3n-3r+1)$$

D'autre part :

$$\sum_i P_{i,r} Q_{i,r} \sim k \left[ \frac{1}{n+1} - (C'_n)^2 B(2r+1, 2n-2r+1) \right]$$

On en déduit, grâce à (15), l'expression de  $h$ , et l'on voit que  $h$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ . Donc, pour  $k$  assez grand,  $f(z)$  est assimilable à une loi normale réduite.

[9]. Étude de deux cas particuliers.

Nous supposons que :

$$\lambda = 1, \quad k = 30.$$

D'une manière générale, nous posons :

$$I = \int_{-\infty}^{-z_r} f(u) du \quad I' = \int_{z'_r}^{+\infty} f(u) du$$

où  $f(z)$  est donnée par (16).

La table (I) donne  $I$  et  $I'$  pour  $n = 4$ ,

La table (II) donne  $I$  et  $I'$  pour  $n = 10$  (2).

Pour chaque couple de valeurs  $n$  et  $r$ , on a déterminé  $z_r$  et  $z'_r$  tels que

$$I = \int_{-\infty}^{-z_r} f(u) du = 2,5\% \quad , \quad I' = \int_{z'_r}^{+\infty} f(u) du = 2,5\%.$$

d'où d'après (13) les limites de variations de  $X_r$ , au seuil de probabilité de 5 % :

$$(17) \quad \begin{cases} x_r = M - \sigma_r z_r \\ x'_r = M + \sigma_r z'_r \end{cases}$$

avec :

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_i^r P_{i,r} Q_{i,r}}$$

La table III est relative au cas où  $n = 4$ , la table IV au cas où  $n = 10$ .

2. Si l'on pose  $I_1 = \int_{-\infty}^{-z} f_0(u) du$ , et  $I_2 = f''_0(z)$ , on a :  $I = I_1 - hI_2$  ;  $I' = I_1 + hI_2$ ; les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$  ont été lues dans les « Tables numériques universelles » de Marcel Boll (Dunod, 1947);  $I_1$  dans la table p. 21 : « Courbe de Galton », pp. 600-611;  $I_2 = h''$  dans la table p. 26 : « Dérivées de la Courbe de Gauss », pp. 628-632.

## [10]. Application.

Dans une « Étude statistique du comportement de *Blatella Germanica* dans le problème du T »<sup>(\*)</sup>, l'un de nous a montré qu'à une blatte donnée on pouvait, au moins pendant une période de quelques jours, attribuer un coefficient  $p$ , correspondant à la probabilité qu'a cette blatte d' « aller à droite ».

Pour les blattes étudiées, les  $p$ , se répartissent également entre 0 et 1. On peut donc assimiler l'ensemble des blattes étudiées *dans une journée* à un schéma d'urnes de Poisson pour lequel l'hypothèse du n° 3 serait approximativement vérifiée et où on aurait  $\lambda = 1$ .

$k$  représente alors le nombre des blattes soumises à l'expérience dans une journée : nous avons  $k = 30$ ;

$n$  représente le nombre de parcours imposé à chaque animal; nous avons  $n = 4$ .

La table III montre qu'avec ces données :

$$M = 6$$

et qu'au seuil de 5 % le nombre de séries de 4 parcours où une blatte est allée  $r = 0, 1, 2, 3, 4$  fois à droite peut varier entre les limites approximatives suivantes :

2 — 9	pour	$r = 0$ ou 4
2 — 10	—	$r = 1$ ou 3
2 — 10	—	$r = 2$

En se reportant au travail cité, on verra, sur les 20 jours d'expérience rapportés, que les résultats expérimentaux viennent se placer dans les zones de confiance indiquées ci-dessus, sauf pour les journées n°s 10-12-18-26. Sans doute, ces jours-là, et malgré toutes les précautions prises un facteur externe a-t-il imposé un déterminisme aux blattes.

Certains expérimentateurs prennent  $n = 10$ ; c'est pour critiquer leurs résultats expérimentaux par la méthode indiquée ci-dessus, que nous avons établi la table IV.

3. *Bulletin de la Société d'Histoire Naturelle de Toulouse*, t. 88, fasc. 3-4, 1943, p. 346.



TABLE III.

$r$	M	$z_r$	$z'_r$	$x_r$	$x'_r$
0 ou 4	6	1,895	2,030	2,905	9,32
1 ou 3	6	1,873	2,056	2,310	10,16
2	6	1,864	2,067	2,140	10,28

TABLE IV.

$r$	M	$z_r$	$z'_r$	$x_r$	$x'_r$
0 ou 10	2,727	1,847	2,090	0,622	5,11
1 ou 9	2,727	1,811	2,128	0,182	5,72
2 ou 8	2,727	1,790	2,155	0,115	5,87
3 ou 7	2,727	1,781	2,167	0,088	5,94
4 ou 6	2,727	1,778	2,170	0,074	5,97
5	2,727	1,778	2,172	0,067	5,98