ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE LALAGUË

Sur les fonctions intégrables au sens de Lebesgue

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 23 (1959), p. 115-139

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1959_4_23__115_0>

Sur les fonctions intégrables au sens de Lebesgue

par Pierre LALAGUË

INTRODUCTION

Dans deux notes (1) aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, M. ZAMANSKY avait notamment montré comment on peut construire l'ensemble L_1 des fonctions d'une variable réelle « sommables » au sens de Lebesgue par complétion à partir de l'ensemble des fonctions en escalier. L'exposé suivant a le même but, mais s'inspire aussi de la méthode (2) de M. Frédéric RIESZ. Pour construire l'ensemble des fonctions « absolument intégrables » au sens de Lebesgue, il suffit de considérer d'abord les suites monotones et de Cauchy, selon la norme ν_1, de fonctions en escalier (la norme ν_1 d'une fonction en escalier étant l'intégrale de sa valeur absolue). On passe ensuite plus facilement aux suites de Cauchy quelconques.

Les intégrales définies dont il est question dans cet article sont des intégrales sur la droite entière, et la méthode suivie a pour avantage accessoire d'éviter la considération préalable de l'intégrale sur un intervalle fini.

Pour montrer le caractère élémentaire de la méthode employée, nous établissons directement, dans les chapitres I et II, les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier qui nous sont utiles par la suite, puis, dans les chapitres III et IV nous construisons L_1 au moyen de passages à la limite, et à la fin du chapitre IV nous établissons que L_1 est complet.

(1) C. R. Acad. Sc., Tome 244 : 12 juin 1957 (p. 2883)) et 17 juin 1957 (p. 3009).

(2) Frédéric RIESZ et Béla SZ.-NAGY : Leçons d'Analyse Fonctionnelle (Académie des Sciences de Hongrie, 1953).

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS EN ESCALIER

I. 1. — SUBDIVISIONS DE LA DROITE NUMÉRIQUE R

I. 1. A. — DÉFINITION. *On appelle subdivision de* R, *toute suite finie* σ *d'éléments* $\{\alpha_K\}_{0 \leqslant K \leqslant n}$, *distincts, de* R, *rangés par ordre croissant :*

$$\alpha_0 < \alpha_1 < .... < \alpha_n. \text{ —}$$

L'ensemble fini A des éléments de σ sera dit ensemble associé à σ. Inversement, à tout ensemble fini d'éléments distincts de R, on pourra associer une subdivision σ, obtenue en rangeant les éléments de A dans l'ordre croissant.

I. 1. B. — DÉFINITION. σ_1 *et* σ_2 *étant deux subdivisions de* R, σ_1 *est dite plus fine que* σ_2 (*ou* σ_2 *moins fine que* σ_1), *si* A_1, *ensemble associé à* σ_1, *contient* A_2, *ensemble associé à* σ_2.

Cette relation entre subdivisions de R est une relation d'ordre non total, comme la relation d'inclusion entre parties de R.

I. 1. C. — PROPOSITION. σ_1 *et* σ_2 *étant deux subdivisions quelconques de* R, *parmi les subdivisions plus fines que* σ_1 *et* σ_2 *il en existe une moins fine que toutes les autres, on l'appelle subdivision réunion de* σ_1 *et* σ_2, *et on la note* $\sigma_1 \cup \sigma_2$:

En effet, si A_1 et A_2 sont les ensembles associés à σ_1 et σ_2, la subdivision cherchée est celle qui est associée à le'nsemble $A_1 \cup A_2$. On peut, d'une façon analogue, définir la subdivision intersection $\sigma_1 \cap \sigma_2$ à condition d'admettre parmi les subdivisions de R la subdivision vide, associée à la partie vide de R. Les subdivisions de R, munies des opérations réunion et intersection, forment alors un treillis.

I. 2. — DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS EN ESCALIER

I.2.A. — DÉFINITION. φ *étant une application de* R *dans* R *et* $\sigma = \{\alpha_K\}_{0 \leqslant K \leqslant n}$ *une subdivision de* R, *la fonction* φ *est dite en escalier pour* σ *si elle possède les propriétés suivantes :*

1° $\varphi(x) = 0$ *pour* $x \notin [\alpha_0, \alpha_n[$.

2° *Sur chaque « palier »* $[\alpha_K, \alpha_{K+1}[$, $0 \leqslant K \leqslant n-1$, φ *a une valeur constante* η_K, *dépendant seulement de* K.

REMARQUES : 1) Pour qu'une fonction φ soit une fonction en escalier, il est nécessaire mais non suffisant qu'elle ne prenne qu'un nombre fini de valeurs.

2) Si φ est en escalier pour σ, elle est aussi en escalier pour toute subdivision plus fine que σ.

Parmi les subdivisions pour lesquelles φ est en escalier, il y en a une moins fine que toutes les autres : c'est la subdivision $\sigma_0 = \{\beta_K\}_{0 \leqslant K \leqslant p}$ pour laquelle $\eta_0 \neq 0$, $\eta_{n-1} \neq 0$, et $\eta_K \neq \eta_{K+1}$ pour tout K tel que $0 \leqslant K \leqslant n - 1$.

Pour la fonction nulle, qui est en escalier pour toute subdivision de R, σ_0 est la subdivision vide. La fonction nulle est d'ailleurs la seule fonction en escalier constante.

3) Quand $\sigma_0 = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ et $\eta_6 = 1$, φ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha_0, \alpha_1[$. Toute fonction en escalier est une combinaison linéaire finie, à coefficients constants, de telles fonctions caractéristiques.

I. 2. B. — Proposition. *La somme, le produit, la borne supérieure, la borne inférieure de deux fonctions en escalier sont des fonctions en escalier. Le produit, par une constante, d'une fonction en escalier, est une fonction en escalier.*

En effet, si φ_1 est en escalier pour σ_1 et φ_2 en escalier pour σ_2, d'après la remarque 2) ci-dessus, φ_1 et φ_2 sont aussi en escalier pour la même subdivision $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$. On voit alors directement que $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 \varphi_2$, sup (φ_1, φ_2), inf (φ_1, φ_2), sont en escalier pour σ_3. D'autre part, si φ est en escalier pour σ et si α est un élément constant quelconque de Rλ, $(\alpha\varphi)$ est en escalier pour la même subdivision σ.

Corollaire. *Si φ est en escalier pour σ, sa « partie positive » φ^+, sa « partie négative » φ^- et sa valeur absolue $|\varphi|$ sont des fonctions en escalier pour σ.*

Ceci résulte de la proposition précédente, car $\varphi^+ = \sup(0, \varphi)$, $\varphi^- = \sup(0, -\varphi)$, et $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$.

Remarque. On voit par récurrence que si on effectue un nombre fini de fois sur des fonctions en escalier les opérations envisagées dans la proposition (I. 2. B) ou son corollaire, on obtient encore des fonctions en escalier.

I. 3. — ENSEMBLES ÉLÉMENTAIRES DE R

I. 3. A. — Définition. *On appelle ensemble élémentaire de* R *toute partie de* R *dont la fonction caractéristique est une fonction en escalier.*

Les fonctions caractéristiques des ensembles élémentaires sont donc toutes les fonctions en escalier ne prenant que les valeurs 1 et 0.

I. 3. B. — Proposition. *Pour que* e $\subset$ R *soit un ensemble élémentaire, il faut et il suffit que* e *soit la réunion d'un nombre fini d'intervalles finis, semi-ouverts à droite et disjoints.*

Ces intervalles sont les paliers $[\alpha_K, \alpha_{K+1}[$ de $e(x)$, fonction caractéristique de e, pour lesquels $\eta_K = 1$.

I. 3. C. — Proposition. *Si* e_1 *et* e_2 *sont deux ensembles élémentaires, les ensembles* $e_1 \cap e_2$, $e_1 \cup e_2$, $e_2 - e_1$, $e_1 - e_2$ *sont élémentaires. En effet, si* $e_1(x)$ et $e_2(x)$ sont les fonctions caractéristiques de e_1 et e_2, les ensembles considérés dans la proposition ont pour fonctions caractéristiques respectives

$e_1(x).\ e_2(x),\ e_1(x), + e_2(x) - e_1(x).\ e_2(x),\ e_2(x) - e_1(x).\ e_2(x),\ e_1(x) - e_1(x).$
$e_2(x).$

Or ces fonctions sont des fonctions en escalier d'après (I. 2. B), ce qui prouve la proposition.

REMARQUE : on voit par récurrence que si on effectue un nombre fini de fois sur des ensembles élémentaires les opérations envisagées dans (I. 3. C), on obtient encore des ensembles élémentaires.

CHAPITRE II

INTÉGRALE DÉFINIE DES FONCTIONS EN ESCALIER

II. 1. — DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

II. 1 A. — DÉFINITION. *Etant donné une fonction* φ *en escalier pour la subdivision* $\sigma = \{\alpha_K\}_{0 \leqslant K \leqslant n}$, *on appelle intégrale définie de* φ *sur* R *et on note* I (φ) *le nombre* $I(\varphi) = \sum_{K=0}^{K=n-1} \eta_K (\alpha_{K+1} - \alpha_K)$,

η_K *étant la valeur de* φ *sur le palier* $[\alpha_K, \alpha_{K+1}[$.

Ce nombre $I(\varphi)$ ne dépend en réalité que de φ et non de la subdivision σ utilisée dans la formule ci-dessus pour le définir. En effet, si σ_1 est une subdivision plus fine que σ, φ est en escalier pour σ_1 d'où une valeur $I_{\sigma_1}(\varphi)$ à priori différente de $I_\sigma(\varphi)$, mais, chaque palier de σ étant la réunion d'un nombre fini de paliers de σ_1 pour lesquels φ a la même valeur η_K, on voit, en raison de la distribution de la multiplication par rapport à l'addition dans R, que $I_{\sigma_1}(\varphi) = I_\sigma(\varphi)$. Si maintenant σ' est une autre subdivision quelconque pour laquelle φ est en escalier, la remarque précédente montre que $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma \cup \sigma'}(\varphi)$ et $I_{\sigma'}(\varphi) = I_{\sigma \cup \sigma'}(\varphi)$, d'où $I_\sigma(\varphi) = I_{\sigma'}(\varphi)$.

I est une application de l'ensemble des fonctions en escalier dans R. On va étudier quelques propriétés importantes de cette application.

II 1. B. — THÉORÈME. *L'ensemble des fonctions en escalier étant désormais désigné par* Φ, I *est une forme linéaire sur* Φ, c'est-à-dire est telle que $I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2)$ et $I(\alpha\varphi) = \alpha I(\varphi)$, $\forall\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \Phi$ et $\alpha \in R$.

Les fonctions φ_1 φ_2, $\varphi_1 + \varphi_2$, sont en escalier pour la même subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Les termes correspondant à chaque palier de σ dans les deux membres de la première relation sont alors égaux en raison de la distributivité du produit $\eta\,(\alpha_{K+1} - \alpha_K)$ par rapport à l'addition des η. La première égalité en résulte.

De même les fonctions $(\alpha\varphi)$ et φ sont en escalier pour une même subdivision, d'où égalité terme à terme des sommes constituant les deux membres de la seconde relation.

II. 1. C. — THÉORÈME. I *est une application croissante de* Φ *dans* R, *c'est-à-dire est telle que*

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \implies I(\varphi_1) \leqslant I(\varphi_2).$$

Si on pose $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, la relation à démontrer équivaut, en raison de la linéarité de I, à

$$\varphi \geqslant 0 \implies I(\varphi) \geqslant 0.$$

ce qui est évident d'après la définition (II. 1. A) de $I(\varphi)$.

II. 1. D. — THÉORÈME. $I(|\varphi|) = \nu_1(\varphi)$ *est une norme sur* Φ.

Tout d'abord, avec les notations de la définition (II. 1. A), $\mathrm{I}(|\varphi|) = \sum_{K=0}^{n-1} |\eta_K| (\alpha_{K+1} - \alpha_K)$, donc est un nombre positif ou nul qui ne peut s'annuler que si $\eta_K = 0$ $(0 \leqslant K \leqslant n-1)$, c'est-à-dire si $\varphi(x) = 0$, $\forall\; x \in \mathrm{R}$.

D'autre part, si φ et φ' sont deux fonctions de Φ, l'inégalité $|\varphi + \varphi'| \leqslant |\varphi| + |\varphi'|$ entraîne, en raison de la croissance et de la linéarité de I :

$$\mathrm{I}(|\varphi + \varphi'|) \leqslant \mathrm{I}(|\varphi| + |\varphi'|) = \mathrm{I}(|\varphi|) + \mathrm{I}(|\varphi'|).$$

Enfin, en raison de la linéarité de I, l'égalité

$$|\alpha\varphi| = |\alpha|\,|\varphi| \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{I}(|\alpha\varphi|) = |\alpha|\;\mathrm{I}(|\varphi|).$$

$\nu_1(\varphi) = \mathrm{I}(|\varphi|)$ a donc les propriétés caractéristiques d'une norme.

II. 1. E. — THÉORÈME. *Si Φ est muni de la topologie T_{ν_1} associée à la norme ν_1, $\mathrm{I}(\varphi)$ est une application continue de Φ dans* R.

T_{ν_1} *est la moins fine des topologies sur Φ telles que $(\varphi_1 + \varphi_2)$, $(\alpha\varphi)$, $\mathrm{I}(|\varphi|)$, soient des applications continues de $\Phi \times \Phi$ (resp. $\mathrm{R} \times \Phi$, Φ) dans Φ (resp. Φ, R).*

La double inégalité : $-|\varphi_n - \varphi_0| \leqslant \varphi_n - \varphi_0 \leqslant |\varphi_n - \varphi_0|$ entraîne, en raison de la croissance de I : $|\mathrm{I}(\varphi_n - \varphi_0)| \leqslant \mathrm{I}(|\varphi_n - \varphi_0|)$, ce qui peut s'écrire, en raison de la linéarité de I :

$$|\mathrm{I}(\varphi_n) - \mathrm{I}(\varphi_0)| \leqslant \mathrm{I}(|\varphi_n - \varphi_0|),\ \forall\ \varphi_n,\ \varphi_0 \in \Phi.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}(|\varphi_n - \varphi_0|) = 0$ entraîne $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}(\varphi_n) = \mathrm{I}(\varphi_0)$, donc que $\mathrm{I}(\varphi)$ est une application continue de l'espace métrique Φ muni de T_{ν_1} dans l'espace métrique R.

D'autre part, si T est une topologie sur φ rendant continues $(\varphi_1 + \varphi_2)$, $(\alpha\varphi)$, $\mathrm{I}(|\varphi|)$, si φ_0 est une fonction quelconque de Φ et ε un nombre positif quelconque, l'ensemble des fonctions φ de Φ telles que $\mathrm{I}(|\varphi - \varphi_0|) < \varepsilon$ doit être un ensemble ouvert de T. Comme les ensembles de ce type constituent une base des ouverts de T_{ν_1}, T est plus fine que T_{ν_1}.

II. 2. — APPLICATION AUX ENSEMBLES ÉLÉMENTAIRES

II. 2. A. — DÉFINITION. *Si* e *est un ensemble élémentaire quelconque, on appelle longueur de cet ensemble et on note* l(e) *l'intégrale de sa fonction caractéristique* e(x).

Il résulte de la définition (II. 1. A) que, si $e = [\alpha_0, \alpha_1[$, on a $l(e) = l(e) = \alpha_1 - \alpha_0$, et que, dans le cas d'un ensemble élémentaire quelconque, $l(e)$ est la somme des longueurs (au sens habituel) des intervalles disjoints [paliers où $e(x) = 1$] dont la réunion est e.

II. 2. B. — PROPOSITION.

1) $l(e) \geqslant 0$ et $l(e) = 0 \iff e = \varnothing$.

2) e_1 et e_2 étant deux ensembles élémentaires quelconques, on a $l(e_1 \cup e_2) \leqslant l(e_1) + l(e_2)$, *l'égalité ayant lieu si et seulement si* $e_1 \cap e_2 = \varnothing$.

3) $e_1 \subset e_2 \Longrightarrow l(e_2 - e_1) = l(e_2) - l(e_1)$.

4) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *étant des ensembles élémentaires en nombre fini, on a*

$$l\left(\bigcup_{k=1}^{n} e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} l\left(e_k\right)$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si les e_K $(1 \leqslant K \leqslant n)$ *sont deux à deux disjoints.*

Soient $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, les fonctions caractéristiques de e, e_1, e_2.

La propriété 1) résulte de $l(e) = I(\varphi)$ et $\varphi \geqslant 0$.

Comme $(e_1 \cup e_2)$ a pour fonction caractéristique $(\psi_1 + \psi_2 - \psi_1 \psi_2)$ et que I est linéaire, on a

$$\begin{aligned} l(e_1 \cup e_2) &= I(\psi_1 + \psi_2 - \psi_1 \psi_2) = I(\psi_1) + I(\psi_2) - I(\psi_1 \psi_2) \\ &= l(e_1) + l(e_2) - l(e_1 \cap e_2) \end{aligned}$$

Il en résulte 2), puis 4) par récurrence.

On obtient 3) en appliquant 2) aux ensembles élémentaires e_1 et $(e_2 - e_1)$ qui vérifient

$$e_1 \cup (e_2 - e_1) = e_2 \text{ et } e_1 \cap (e_2 - e_1) = \emptyset$$

d'où $l(e_1) + l(e_2 - e_1) = l(e_2)$.

Chapitre III

EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE PAR PASSAGES A LA LIMITE

III. 1. — GÉNÉRALITÉS SUR CE PROBLÈME

D'après le chapitre II, l'intégrale des fonctions en escalier est une application de Φ dans R ayant les propriétés principales suivantes.

1) Φ, muni des opérations d'addition de deux fonctions et de produit d'une fonction par un scalaire, est un espace vectoriel normé pour la norme $I(|\varphi|) = \nu_1(\varphi)$. Soit T_{ν_1} la topologie sur Φ associée à cette norme.

2) $I(\varphi)$ est une forme linéaire croissante sur Φ, continue quand Φ est muni de la topologie T_{ν_1}.

3) T_{ν_1} est la moins fine des topologies sur Φ rendant continues $I(|\varphi|)$, $\varphi_1 + \varphi_2$, $\alpha\varphi$.

Désormais, nous allons essayer, par des passages à la limite à partir de Φ, d'étendre cette notion d'intégrale à un ensemble de fonctions contenant Φ et le plus vaste possible tout en conservant au mieux les propriétés énoncées ci-dessus.

Désignons par F_1 et T un ensemble de fonctions et une topologie sur cet ensemble, tels que

a) $F_1 \supset \Phi$ et, pour toute fonction f de F_1, il existe au moins une suite $\{\varphi_n\}_{n=1,2,...}$ de fonctions de Φ, telle que

$$f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \text{ selon la topologie T}$$

b) Les opérations d'addition de deux fonctions et de multiplication par un scalaire sont définies dans F_1 et continues si F_1 est muni de la topologie T.

c) $\nu_1(\varphi)$ est continue pour Φ munie de la topologie T_Φ induite par T, et prolongeable en une application continue $N_1(f)$ de F_1 (munie de la pologie T) dans R, identique à ν_1 sur Φ.

Supposant qu'il existe au moins un couple (F_1, T) possédant les propriétés précédentes, nous allons en déduire des conséquences qui permettront ultérieurement la construction effective de F_1 et de l'intégrale des fonctions de F_1. On note f une fonction quelconque de F_1.

III. 1. A. — Lemme.

α) *Si la suite* $\{f_n\}$ *converge selon* T *vers* f *pour* $n \to +\infty$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n - f) = 0$ (α)

β) *Si* $\{f_n\}$ *est une suite convergente selon* T *quand* $n \to +\infty$, *on a* $\lim_{p,q\to+\infty} N_1(f_p - f_q) = 0$ (β)

α) résulte de la continuité de $(g - f)$ et de celle de N_1. De même, en raison de l'hypothèse b), $f_p - f_q = (f_p - f) - (f_q - f)$, ($f$ limite de la suite

f_n), converge vers la fonction nulle quand p et q, tendent vers $(+\infty)$, et β) en résulte à cause de l'hypothèse c).

REMARQUE. — Comme $N_1(0) = \nu_1(0) = 0$, si $\{f_n\}$ converge selon T vers la fonction nulle, on a $\lim\limits_{n\to\infty} N_1(f_n) = 0$ (γ).

Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$, suites de fonctions de F_1, convergent selon T vers la même fonction f de F_1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(f_n - g_n) = 0$ (δ)

III. 1. B. — LEMME. $N_1(f)$ *a les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} N_1(f) \geqslant 0, \ \forall f \in F_1 \\ N_1(f_1 + f_2) \leqslant N_1(f_1) + N_1(f_2), \ \forall f_1, f_2 \in F_1 \\ N_1(\alpha f) = |\alpha| N_1(f), \ \forall f \in F_1 \text{ et } \forall \alpha \in R. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse a) il existe une suite $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ qui converge vers f selon T. N_1 étant continue d'après c), on a $N_1(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_1(\varphi_n)$ donc $\nu_1(\varphi_n) \geqslant 0$, $\forall n \Longrightarrow N_1(f) \geqslant 0$.

Si $\{\varphi_n^1\}$ converge selon T vers f_1 et $\{\varphi_n^2\}$ vers f_2, $\{\varphi_n^1 + \varphi_n^2\}$ converge selon T vers $(f_1 + f_2)$ car l'addition de deux fonctions est supposée être une application continue de $F_1 \times F_1$ dans R si F_1 est munie de la topologie T. Passant alors à la limite, dans l'inégalité $\nu_1(\varphi_n^1 + \varphi_n^2) \leqslant \nu_1(\varphi_n^1) + \nu_1(\varphi_n^2)$, pour $n \to \infty$, on obtient $N_1(f_1 + f_2) \leqslant N_1(f_1) + N_1(f_2)$.

Enfin, si $\{\varphi_n\}$ converge selon T vers f, $\{\alpha\varphi_n\}$ converge selon T vers αf [d'après l'hypothèse b)], et, en passant à la limite, pour $n \to +\infty$, dans l'égalité $\nu_1(\alpha\varphi_n) = |\alpha|\,\nu_1(\varphi_n)$, on obtient $N_1(\alpha f) = |\alpha|\,N_1(f)$. Corollaire. *Si* f *et* g *sont deux fonctions quelconques de* F_1, *la relation* $N_1(f - g) = 0$ *est une relation d'équivalence dans* F_1. On vérifie en effet que cette relation est réflexive, symétrique, sa transitivité résulte des deux inégalités démontrées dans le lemme.

III. 1. C. — THÉORÈME. *Soit* T_1 *la topologie, sur* F_1, *associée à la semi-norme* N_1. T_1 *est la moins fine des topologies sur* F_1 *telles que les propriétés* a), b), c) *supposées vraies pour* (F_1, T) *soient encore vérifiées pour* (F_1, T_1).

Soit (E_1) la relation d'équivalence sur F_1 : $N_1(f - g) = 0$.

N_1 est une norme sur l'espace quotient $\dfrac{F_1}{E_1}$ qui est isomorphe à une partie du complété $\hat{\Phi}$ de Φ pour la norme ν_1.

N_1 est une semi-norme sur F_1 d'après (III. 1. B). La topologie associée T_1 est la moins fine rendant $N_1(f)$ continue. Il résulte de (III. 1. B) que l'addition $(f + g)$ et le produit par un scalaire (αf) sont continus pour T_1; en effet

$N_1(f + g - f_0 - g_0) \leqslant N_1(f - f_0) + N_1(g - g_0)$ et
$N_1(\alpha f - \alpha_0 f_0) = N_1[\alpha_0(f - f_0) + (\alpha -$
$\alpha_0) f_0 + (\alpha - \alpha_0)(f - f_0)] \leqslant |\alpha_0|\,N_1(f$
$- f_0) + (\alpha - \alpha_0) N_1(f_0) + |\alpha - \alpha_0|\,N_1(f - f_0)$
ce qui démontre la première partie du théorème.

On voit d'autre part, toujours par (III. 1. B.), que (E_1) est compatible avec l'addition et le produit par un scalaire, puis que $N_1(\widetilde{f})$ est une norme dans l'espace des classes d'équivalence $\widetilde{f}$ des fonctions f selon E_1.

Enfin, si f est une fonction quelconque de F_1, et $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de Φ convergeant vers f selon T_1, il faut et il suffit, pour qu'une autre suite $\{\varphi'_n\}$ converge vers f selon T_1, qu'elle vérifie la condition (δ) de (III. 1. A.), soit $\lim \nu_1(\varphi_n - \varphi'_n) = 0$.

On en déduit une correspondance entre la classe des suites $\{\varphi_n\}$ convergeant vers f selon T_1 et la classe d'équivalence de $\{\varphi_n\}$ dans $\hat{\Phi}$, complété de Φ celon la norme ν_1. On vérifie que cette correspondance est un isomorphisme entre $\dfrac{F_1}{E_1}$ et une partie de $\hat{\Phi}$, à savoir les classes de $\hat{\Phi}$ convergentes selon T_1.

III. 2. — CONCLUSIONS POUR LA CONSTRUCTION DE F_1

Il résulte des énoncés précédents que, si on veut conserver les propriétés essentielles de $I(|\varphi|)$, on aura la meilleure extension possible si on obtient un espace $\dfrac{F_1}{E_1}$ isomorphe au complété $\hat{\Phi}$ de Φ pour la distance associée à la norme ν_1, c'est-à-dire si, à toute suite $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, de Cauchy pour ν_1, on peut associer une fonction f qui en soit la limite selon T_1. Et $N_1(f)$ sera la limite, pour $n \to \infty$, de $\nu_1(\varphi_n) = I(|\varphi_n|)$. De même on essayera de définir $I(f)$ comme la limite, pour $n \to \infty$, de $I(\varphi_n)$.

On vérifie que, si $\{\varphi_n\}$ est de Cauchy pour ν_1, les suites $\nu_1(\varphi_n)$ et $I(\varphi_n)$ sont de Cauchy, donc convergentes.

En effet $|I(\varphi_p) - I(\varphi_q)| \leqslant I(|\varphi_p - \varphi_q|)$ et $|I(|\varphi_p|) - I(|\varphi_q|)| \leqslant I(|\varphi_p - \varphi_q|)$.

Le problème revient donc à étudier une suite $\{\varphi_n\}$ de Cauchy pour ν_1, et à définir la fonction « limite » f de cette suite à partir des fonctions φ_n. La difficulté de cette question provient du fait que la condition de Cauchy

$$\lim_{p,q \to \infty} I(|\varphi_p - \varphi_q|) = 0$$

n'entraîne pas la convergence simple de $\{\varphi_n\}$. On peut donner des exemples de suites $\{\varphi_n\}$, de Cauchy pour ν_1, et ne convergeant en aucun point.

Inversement d'ailleurs, la convergence simple d'une suite $\{\varphi_n\}$ *n'* entraîne pas la condition de Cauchy précédente, ni la convergence de la suite des intégrales.

Cet inconvénient disparaît partiellement si on se borne à considérer des suites $\{\varphi_n\}$ de Cauchy pour ν_1 et monotones : en chaque point x, la suite $\varphi_n(x)$ tend vers une limite, finie ou non, et on peut essayer de définir f comme la limite en convergence simple de $\{\varphi_n\}$. Il faudra cependant étudier les propriétés de l'ensemble des points où f peut devenir infinie, car $(f + g)$ cesse d'être définie et continue aux points où f et g prennent des valeurs infinies de signe différent.

Il sera d'autre part utile d'examiner le cas particulier d'une suite $\{\varphi_n\}$ monotone convergeant selon T_1 vers une fonction en escalier φ, ce qui, si par exemple $(\varphi - \varphi_n) \geqslant 0$, $\{\varphi_n\}$ étant une suite croissante, revient à étudier, au point de vue de la convergence simple une suite de fonctions $(\varphi - \varphi_n)$ en escalier positives, suite décroissante et convergeant selon T_1 vers zéro.

Enfin il est utile de remarquer que, pour une suite monotone de fonctions en escalier, la condition de Cauchy pour la distance associée à la norme ν_1 prend une forme plus simple, indiquée par l'énoncé suivant.

III. 2. A. — Proposition. *$\{\varphi_n\}$ étant une suite croissante de fonctions en escalier, pour que $\{\varphi_n\}$ soit une suite de Cauchy selon ν_1, il faut et il suffit que les intégrales* I (φ_n) *soient toutes bornées supérieurement par un nombre fini* C *indépendant de* n.

En effet, on a vu que la condition de Cauchy

$\lim\limits_{p, q \to +\infty} I(|\varphi_p - \varphi_q|) = 0$ entraîne que $I(\varphi_n)$ est une suite de Cauchy dans R, donc convergente, donc bornée supérieurement.

Inversement, si la suite $I(\varphi_p)$, qui est croissante comme $\{\varphi_n\}$, admet une borne supérieure finie, elle converge vers une limite I. Il en résulte que, ε étant un nombre positif donné, pour $p > q \geqslant N(\varepsilon)$ on aura $I(\varphi_p) - I(\varphi_q) < \varepsilon$. Mais l'hypothèse de croissance de $\{\varphi_n\}$ entraîne que $I(|\varphi_p - \varphi_q|) = I(\varphi_p - \varphi_q) > \varepsilon$.

La suite $\{\varphi_n\}$ est donc bien de Cauchy selon ν_1.

CHAPITRE IV

FONCTIONS INTÉGRALES AU SENS DE LEBESGUE CONSTRUCTION DE L_1

IV. 1. — SUITES $\{\varphi_n\}$ CROISSANTES, DE CAUCHY POUR ν_1

ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite croissante de fonctions en escalier ; elle admet, pour la convergence simple, une limite f, finie ou non.

Si de plus $\{\varphi_n\}$ est de Cauchy pour ν_1, l'ensemble des points x où $f(x) = +\infty$ a des propriétés importantes que nous allons étudier dans ce paragraphe.

IV. 1. A. — DÉFINITION. *Une partie* A *de* R *est dite ensemble négligeable s'il existe une suite* $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ *de fonctions en escalier possédant les propriétés suivantes :*

1) *La suite* $\{\varphi_n\}$ *est croissante.*

2) *La suite des intégrales* $I(\varphi_n)$ *a une borne supérieure finie* C.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty, \ \forall\ x$ *fixé* $\in A$.

REMARQUES.

1) On peut, sans diminuer la généralité de cette définition, supposer $\varphi_n \geqslant 0$, $\forall\ n$. Car, s'il n'en est pas ainsi, il suffit de considérer la suite des fonctions $(\varphi_n - \varphi_1)$ qui a les propriétés voulues.

2) On peut de plus imposer à la borne supérieure finie des $I(\varphi_n)$ d'être inférieure à un nombre positif ε quelconque donné à l'avance. En effet si $\{\varphi_n\}$ a les propriétés 1, 2, 3, il en est de même de $\left\{\dfrac{\varphi_n}{K}\right\}$. C étant la borne supérieure des $I(\varphi_n)$, il suffit alors de choisir K tel que $\dfrac{C}{K} < \varepsilon$.

IV. 1. B. — PROPOSITION. *Pour que* A *soit négligeable, il faut et il suffit que cet ensemble possède les propriétés suivantes :*

Pour tout $\varepsilon > 0$ *donné, il existe une suite dénombrable* $\{j_n\}_{n=1,2,\dots}$ *d'intervalles* $j_n = [\alpha_n, \beta_n[$, $\alpha_n < \beta_n$ tels que.

a) $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} j_n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \varepsilon$ avec $\lambda_n = \beta_n - \alpha_n$.

Ces conditions équivalent aux suivantes.

Pour tout $\varepsilon > 0$ *donné, il existe une suite* $\{e_n\}_{n=1,2\dots}$ *d'ensembles élémentaires* e_n *tels que*

α) $e_n \subset e_{n+1}$, $\forall\, n \geqslant 1$, et $A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} e_n$

β) $l(e_n) < \varepsilon$, $\forall_n \geqslant 1$, $l(e_n)$ *étant la longueur de* e_n, *définie en* (II. 2. A.).

Ces deux groupes de conditions sont équivalents, car, si $\{j_n\}$ vérifie a) et b), $\{e_n\}$ avec $e_n = \bigcup_{K=1}^{n} j_k$ vérifie α), et β) en raison de l'inégalité $l(e_n) \leqslant \sum_{K=1}^{n} \lambda_k$, conséquence de [II. 2. B, 4)] ; et, inversement, si $\{e_n\}$ vérifie α) et β), soient $e'_1 = e_1$, $e'_n = e_n - e_{n-1}$ $(n > 1)$. Les e'_n sont deux à deux disjoints, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} e'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, et $\sum_{n=1}^{\infty} l(e'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(e_n) < \varepsilon$.

Chaque e'_n étant la réunion d'intervalles du type j deux à deux disjoints, l'ensemble dénombrable de ces intervalles vérifie a) et b).

Soient maintenant A négligeable, $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions qu'on suppose positives et vérifiant 1), 2), 3), H un nombre positif indépendant de n.

Si on appelle e_n l'ensemble des x tels que $\varphi_n(x) \geqslant H$, $\{e_n\}$ et A vérifient α). En effet $e_n \subset e_{n+1}$ car $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$, et $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ en raison de la condition 3). D'autre part, si on considère la fonction $\psi(x)$ égale à zéro si $x \notin e_n$, à H si $x \in e_n$, l'inégalité $\psi \leqslant \varphi_n$ entraîne $I(\psi) = l(e_n)$. $H \leqslant I(\varphi_n) \leqslant C$. Donc, si on choisit $H > \frac{C}{\varepsilon}$, β) est vérifiée.

Inversement, soit A tel que, pour tout ε, il existe au moins une suite $\{e_n\}$, dépendant naturellement de ε, et vérifiant α) et β).

Choisissons une suite de nombres $\{\varepsilon_p\}_{p=1,2,\dots}$ positifs et tels que la série de terme général ε_p converge, par exemple $\varepsilon_p = \frac{1}{2^p}$ $(p \geqslant 1)$.

A chaque ε_p correspond une suite $\{e^p{}_n\}_{n=1,2,\dots}$ vérifiant α) et β).

Désignons par $\psi^p{}_n$ la fonction caractéristique de $e^p{}_n$, et posons $\varphi_n = \sum_{p=1}^{n} \psi^p{}_n$. La suite $\{\varphi_n\}$ vérifie, avec A, les propriétés 1), 2) et 3). En effet $e^p{}_n \subset e^p{}_{n+1}$ entraîne $\psi^p{}_n \leqslant \psi^p{}_{n+1}$, $\forall_n$ et p donc $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. De plus

$$I(\varphi_n) = \sum_{p=1}^{n} I(\psi^p{}_n) = \sum_{p=1}^{n} l(e^p{}_n) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p = 1.$$

Enfin, puisque $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} e^p{}_n$, $\forall^p$, quels que soient K entier fixé et x fixé $\in A$ il existe des entiers $n_1, n_2, \dots n_K$ tels que $x \in e_{n_j}{}^j$ $(1 \leqslant j \leqslant K)$. Donc, pour $n \geqslant N_K = \max_{1 \leqslant j \leqslant K} (n_j)$, x appartient à chacun des ensembles $e^j{}_n$ $(1 \leqslant j \leqslant K)$ donc $\varphi_n(x) \geqslant K$, ce qui prouve que $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = +\infty$.

REMARQUES.

1) Les propriétés a) et b), ou α) et β), peuvent, en raison de (IV. 1. B), servir de définition aux ensembles négligeables.

2) Dans a) et b), la nature des intervalles j_n (ouverts, fermés, semi-ouverts) est sans importance.

Car, si on remplace $[\alpha_n, \beta_n$ [ou] α_n, β_n [ou] $\alpha_n, \beta_n]$ par $[\alpha_n, \beta_n]$, a) est vrai à fortiori, b) est inchangé. Et inversement, si a) et b) sont vrais avec $j'_n = [\alpha'_n, \beta'_n]$, ils le restent avec $j_n =]\, \alpha'_n - \varepsilon_n, \beta'_n + \varepsilon_n$ [ou $j_n = [\alpha'_n, \beta'_n + \varepsilon_n$ [ou $j_n =]\, \alpha'_n - \varepsilon_n, \beta'_n]$ et $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$, la quantité ε intervenant dans b) étant remplacée par $3\,\varepsilon$, donc encore arbitrairement petite.

3) On peut, dans a) et b), remplacer les (j_n) par des ensembles élémentaires e_n, en remplaçant, dans la condition b), $\lambda_n = \beta_n - \alpha_n$ par $l(e_n)$.

En effet, chaque e_n est la somme d'un nombre fini d'intervalles du type j_n, disjoints, donc tels que la somme de leurs longueurs soit égale à $l(e_n)$, ce qui assure la permanence de la condition b).

4) On peut, sans changer substantiellement la définition, supposer les j_n disjoints deux à deux.

Par exemple, partant des j_n vérifiant a) et b), on pose $e_n = \bigcup_{p=1}^{n} j_p$, $e'_1 = e_1$, $e'_n = e_n - e_{n-1}$ $(n > 1)$, puis on prend pour $\{j'_p\}$ les intervalles disjoints dont la réunion constitue chaque e'_n. Ils forment une suite dénombrable vérifiant a), et à fortiori b), comme on le voit en appliquant (II. 2. B).

IV. 1. C. — PROPOSITION. *Tout ensemble contenu dans un ensemble négligeable est négligeable. Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

On peut voir directement la première propriété sur la définition (IV. 1. A), la deuxième propriété sur la définition (IV. 1. B) au moyen de a) et b).

REMARQUE. Il en résulte en particulier que tout ensemble dénombrable est négligeable.

IV. 1. D. — DÉFINITION. *On dit qu'une propriété où intervient un élément* x *quelconque de* R *a lieu presque partout sur* R *si elle est vraie pour tout* x *de* R *sauf peut-être pour* x *appartenant à un ensemble négligeable.*

EXEMPLE : la fonction f considérée au début de (IV. 1) est finie presque partout sur R, l'ensemble des x tels que $f(x) = +\infty$ étant négligeable.

IV. 2. — CONVERGENCE SIMPLE D'UNE SUITE DÉCROISSANTE $\{\varphi_n\}$, POSITIVE, CONVERGEANT, SELON LA NORME ν_1, VERS LA FONCTION NULLE

Soit une suite décroissante de fonctions $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$ On suppose que chaque fonction φ_n est positive ou nulle, et que la suite $\{\varphi_n\}$ converge, au sens de la norme ν_1, vers la fonction nulle, ce qui peut ici s'exprimer par $\lim_{n \to \infty} I(\varphi_n) = O$. D'après les deux premières hypothèses, $\{\varphi_n\}$ converge en convergence simple, sur tout R. vers une fonction limite $f \geqslant O$, partout finie, puisque inférieure à φ_1. Cette fonction limite a de plus les deux propriétés suivantes :

IV. 2. A. — LEMME. *α étant un nombre strictement positif quelconque donné, l'ensemble* e (f $\geqslant \alpha$), *des* x *tels que* f (x) $\geqslant \alpha$ *peut être recouvert par un ensemble élémentaire de longueur arbitrairement petite.*

Pour chaque x, $\{\varphi_n(x)\}$ est une suite décroissante qui converge vers $f(x)$. Donc $f(x) \geqslant \alpha \rightleftarrows \varphi_n(x) \geqslant \alpha$, $\forall_n \geqslant 1$, ce qu'on peut exprimer par : $e\,(f \geqslant \alpha) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} e\,(\varphi_n \geqslant \alpha)$. Or $e\,(\varphi_n \geqslant \alpha)$ est un ensemble élémentaire dont la longueur l_n vérifie $\alpha\, l_n \leqslant I(\varphi_n)$. Comme $\lim_{n \to \infty} I(\varphi_n) = O$, ε étant un nombre strictement positif donné, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $I(\varphi_N) \leqslant \alpha\, \varepsilon$, donc $l_N \leqslant \varepsilon$. L'ensemble $e\,(\varphi_N \geqslant \alpha)$ est l'ensemble élémentaire cherché.

IV. 2. B. — LEMME. *L'ensemble* e (f > O) *est négligeable.*

En effet $e\,(f > O) = \bigcup_{K=1}^{\infty} e\,(f \geqslant \frac{1}{K})$. C'est donc une réunion dénombrable d'ensembles négligeables (d'après IV. 2. A), c'est-à-dire un ensemble négligeable, en raison de (IV. 1. C).

IV. 2. C. — LEMME. *Si la suite décroissante de fonctions en escalier* $\{\varphi_n\}$ *converge, en convergence simple, partout sur* R, *vers zéro, on a* $\lim_{n \to +\infty} I(\varphi_n) = O$.

La fonction φ_1, en escalier, est nulle hors d'un intervalle fini $[a_1, b_1]$ et inférieure à une constante finie M_1.

Toutes les fonctions φ_n sont nulles hors de ce même intervalle et bornées supérieurement par M_1, puisque $\{\varphi_n\}$ est décroissante et tend vers zéro. La fonction φ_n est continue sauf en un nombre fini de points, extrémités de paliers. Soit $\{\alpha_p\}_{p=1,2,\ldots}$ la suite dénombrable des points de discontinuité des φ_n ($n = 1, 2,\ldots$). Soit i_p un intervalle semi-ouvert à droite, de centre α_p, de longueur $l_p = \varepsilon . 2^{-p}$. On désigne par λ_n la fonction en escalier égale à φ_n sur les intervalles i_p ayant pour centre un point de discontinuité de φ_n, et nulle ailleurs. On a $0 \leqslant I(\lambda_n) \leqslant M_1\varepsilon$. Soit $\psi_n = \varphi_n - \lambda_n$. La suite $\{\varphi_n\}$ tendant en décroissant vers zéro en chaque point de $[a_1, b_1]$, les fonctions φ_n et λ_n restant constantes par paliers, et ψ_n étant nulle quand $\lambda_n \neq O$, on en déduit que, pour chaque point $x_i \in [a_1, b_1]$, il existe un intervalle ouvert j_i de centre x_i tel que

$x \in j_i \to O \leqslant \psi_n(x) \leqslant \varepsilon$ pour $n > N(x_i, \varepsilon)$.

En vertu du théorème de Borel-Lebesgue, relatif à l'intervalle fermé borné $[a_1, b_1]$, ψ_n converge donc uniformément vers zéro sur $[a_1, b_1]$;

ε donné, il existe un entier $N(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε tel que $O \leqslant \psi_n(x) < \varepsilon, \forall\ x \in [a_1, b_1]$, pour $n \geqslant N(\varepsilon)$. Donc
$n \geqslant N(\varepsilon) \rightarrow I(\psi_n) \leqslant (b_1 - a_1)\,\varepsilon$. (2)

Comme $I(\varphi_n) = I(\psi_n) + I(\lambda_n)$, il résulte de (1) et (2) que, pour $n \geqslant N(\varepsilon)$, on a $I(\varphi_n) \leqslant (M_1 + b_1 - a_1)\,\varepsilon$.

Comme $\varphi_n \geqslant O$, ceci prouve que $\lim\limits_{n \to \infty} I(\varphi_n) = O$.

IV. 2. D. — Théorème. *Soit* $\{\varphi_n\}$ *une suite décroissante de fonctions en escalier positives. Pour que* $\lim\limits_{n \to \infty} I(\varphi_n) = O$, *il faut et il suffit que la suite* $\{\varphi_n\}$ *converge vers zéro en convergence simple, presque partout sur* R.

La condition est nécessaire d'après le lemme (IV. 2. B).

Inversement soit $\{\varphi_n\}$ une suite décroissante de fonctions en escalier positives, convergeant vers zéro en convergence simple, sauf sur un ensemble e négligeable.

D'après (IV. 1. A) il existe une suite croissante $\{\mu_n\}$ de fonctions en escalier telles que $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(x) = +\infty$ pour tout $x \in e$, et que $I(\mu_n) < \varepsilon$, nombre positif donné quelconque. (1).

Soit $\psi_n = \varphi_n - \mu_n$.

La suite $\{\psi_n^+\}$ est décroissante et converge vers zéro, en convergence simple, partout sur R. On peut donc lui appliquer le lemme (IV. 2. C), et on a $\lim\limits_{n \to \infty} I(\psi_n^+) = O$. (2)

Comme $I(\varphi_n) = I(\psi_n) + I(\mu_n) \leqslant I(\psi_n^+) + \varepsilon$ d'après (1), on obtient en raison de (2) :

$\lim\limits_{n \to \infty} I(\varphi_n) \leqslant \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, indépendant de n, on a donc bien $\lim\limits_{n \to \infty} I(\varphi_n) = O$.

Remarques.

1) Le théorème (IV. 2. D) montre que, pour une suite monotone de fonctions en escalier de même signe, il y a équivalence entre la convergence vers zéro selon la norme ν_1 et la convergence simple presque partout vers zéro.

2) Si $\{\varphi_n\}$ est une suite croissante de fonctions en escalier convergente, en convergence simple, vers une fonction en escalier φ, on a $I(\varphi) = \lim\limits_{n \to +\infty} I(\varphi_n)$, comme on le voit en appliquant (IV. 2. C) à la suite des fonctions $(\varphi - \varphi_n)$.

C'est cette méthode qu'on va généraliser dans le paragraphe suivant : $\{\varphi_n\}$ étant une suite croissante de fonctions en escalier telle que la suite $\{I(\varphi_n)\}$ converge, et si f est la fonction limite, en convergence simple, de $\{\varphi_n\}$, on essaiera de définir l'intégrale $I(f)$ de f par la formule $I(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} I(\varphi_n)$.

IV. 3. — DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE Φ_1, F_1, L_1

IV. 3. A. — DÉFINITION. *Soit* f *une fonction, limite en convergence simple d'une suite croissante* $\{\varphi_n\}$ *de fonctions en escalier* φ_n *telles que la suite* $\{I(\varphi_n)\}$ *de leurs intégrales ait une borne supérieure finie. On appelle intégrale de* f *et on note* I(f) *le nombre* $I(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} I(\varphi_n)$

REMARQUES.

1) Cette limite existe et est finie puisque la suite croissante $\{I(\varphi_n)\}$ est bornée supérieurement par un nombre fini.

2) Pour la suite *croissante* $\{\varphi_n\}$ il est équivalent de supposer que la suite $\{I(\varphi_n)\}$ a une borne supérieure finie, ou qu'elle est convergente, ou que $\{\varphi_n\}$ est une suite de Cauchy selon la norme ν_1.

3) Si f est encore en fonction en escalier, on retrouve par la définition (IV. 3. A) la valeur déjà connue de $I(f)$, d'après la deuxième remarque suivant (IV. 2. D).

4) Pour justifier la notation $I(f)$, il faudra prouver que la limite de $I(\varphi_n)$ ne dépend pas en réalité de la suite particulière $\{\varphi_n\}$, mais seulement de f.

Si on considère maintenant une fonction égale à zéro presque partout, soit g, elle est, d'après la définition d'un ensemble négligeable, inférieure à à une fonction f du type précédent, dont l'intégrale, au sens de (IV. 3. A), est inférieure à un nombre positif ε donné quelconque. De même pour $(-g)$. Donc, si on peut attribuer une intégrale à g, il faut, pour que cette intégrale reste une application linéaire croissante, que sa valeur soit nulle. D'où la définition suivante :

IV. 3. B. — *On attribue à toute fonction nulle presque partout une intégrale nulle.*

Les deux conventions (IV. 3. A) et (IV. 3. B) conduisent, si on veut maintenir la linéarité de I, à la définition suivante.

IV. 3. C. — DÉFINITION. *On dit que* $f \in \Phi_1$ *si* f *est égale, presque partout sur* R, *à la limite, en convergence simple, d'une suite croissante* $\{\varphi_n\}$ *de fonctions en escalier telles que la suite* $\{I(\varphi_n)\}$ *ait une borne supérieure finie. On note*

$$f \underset{pp}{=} \lim_{n \to \infty} \varphi_n.$$

On prend pour intégrale de f *et on note* I(f) *le nombre*

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(\varphi_n).$$

Nous allons voir que $I(f)$ ne dépend pas de la suite particulière $\{\varphi_n\}$ choisie, et que cette intégrale possède, par rapport à l'ensemble Φ_1, certaines des propriétés de I pour l'ensemble Φ des fonctions en escalier.

REMARQUE. Dans Φ_1, la relation $f_1 \underset{pp}{=} f_2$ est une relation d'équivalence que nous désignerons désormais par E'_1. Toutes les fonctions d'une même classe de $\dfrac{\Phi_1}{E'_1}$ ont même intégrale d'après la définition précédente.

IV. 3. D. — LEMME. *Si* f $\in \Phi_1$, *si* φ *est une fonction en escalier vérifiant* $\varphi \underset{pp}{\leqslant} f$, *on a* $I(\varphi) \leqslant I(f)$.

En effet la suite de fonctions en escalier $\{(\varphi - \varphi_n)\}$ tend en décroissant vers une fonction égale presque partout à $(\varphi - f)$, donc négative presque partout. Donc la suite décroissante de fonctions en escalier positives $\{(\varphi - \varphi_n)+\}$ tend, en décroissant, presque partout vers zéro, et, d'après (IV. 2. D), $\lim\limits_{n\to\infty} I\{(\varphi - \varphi_n)+\} = 0$. (1)

Mais $I(\varphi) - I(\varphi_n) = I(\varphi - \varphi_n) \leqslant I\{(\varphi - \varphi_n)+\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}[I(\varphi) - I(\varphi_n)] = I(\varphi) - I(f)$.

La relation (1) entraîne par conséquent le résultat voulu : $I(\varphi) - I(f) \leqslant 0$.

IV. 3. E. — LEMME. *Soient* f_1 *et* f_2 *deux fonctions de* Φ_1, $\{\varphi^1{}_n\}$ *et* $\{\varphi^2{}_n\}$ *les deux suites servant à définir, selon* (IV. 3. A), *leurs intégrales* $I(f_1)$ *et* $I(f_2)$. *L'inégalité* $f_1 \underset{pp}{\leqslant} f_2$ *entraîne* $I(f_1) \leqslant I(f_2)$.

En effet, on peut appliquer le lemme (IV. 3. D) à $\varphi^1{}_n$ et f_2, quel que soit n, car $\varphi^1{}_n \underset{pp}{\leqslant} f_1 \underset{pp}{\leqslant} f_2$. D'où $I(\varphi^1{}_n) \leqslant I(f_2)$, $\forall\, n$.

Comme $I(f_1) = \lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi^1{}_n)$, il en résulte $I(f_1) \leqslant I(f_2)$.

Corollaires. 1) $f_1 \underset{pp}{=} f_2 \Rightarrow I(f_1) = I(f_2)$, car on a à la fois $f_1 \underset{pp}{\leqslant} f_2$ et et $f_2 \underset{pp}{\leqslant} f_1$, d'où le résultat par double application du lemme.

En particulier le nombre I (f) défini par (IV. 3. A) ne dépend pas en réalité de la suite particulière $\{\varphi_n\}$ mais seulement de f, et peut donc être noté $I(f)$.

2) I *est une application croissante de* $\dfrac{\Phi_1}{E'_1}$ *dans* R.

(E'_1 défini dans la remarque de IV. 3. C.)

IV. 3. F. — PROPOSITION. *Soient* f_1 *et* f_2 *deux fonctions quelconques de* Φ_1, α *un nombre réel positif fini.*

1) $f_1 + f_2$, αf_1, sup (f_1, f_2) et inf (f_1, f_2) *appartiennent à* Φ_1.

2) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$, $I(\alpha f_1) = \alpha I(f_1)$.

Car, $\{\varphi^1{}_n\}$ et $\{\varphi^2{}_n\}$ étant deux suites croissantes convergeant vers deux fonctions égales presque partout respectivement à f_1, et f_2, les fonctions envisagées dans 1) sont, dans l'ordre, égales presque partout respectivement aux limites des suites croissantes $\{\varphi^1{}_n + \varphi^2{}_n\}$, $\{\alpha\varphi^1{}_n\}$, $\{\sup(\varphi^1{}_n, \varphi^2{}_n)\}$, $\{\inf(\varphi^1{}_n, \varphi^2{}_n)\}$, donc appartiennent à Φ_1, et leurs intégrales s'obtiennent par passage à la limite. Notamment $I(f_1 + f_2) = \lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi^1{}_n + \varphi^2{}_n) =$

$$\lim_{n\to\infty}[I(\varphi^1{}_n) + I(\varphi^2{}_n)] = \lim_{n\to\infty} I(\varphi^1{}_n) + \lim_{n\to\infty} I(\varphi^2{}_n). = I(f_1) + I(f_2).$$

De même $I(\alpha f_1) = \lim_{n\to\infty} I(\alpha\varphi^1{}_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} I(\varphi^1{}_n) = \alpha I(f_1)$.

REMARQUE (IV. 3. F) ne prouve pas que I est une forme linéaire sur Φ_1. Il faudrait encore pour cela que, si $f \in \Phi_1$, $(-f) \in \Phi_1$, d'où il résulteterait que la différence de deux fonctions de Φ_1 appartiendrait à Φ_1. Mais ceci n'est pas vrai en général. Car, si f appartient à Φ_1, il existe un nombre fini m (le minimum de φ_1 par exemple) tel que $f(x)^e \geqslant m$ presque partout sur R, mais en général il n'existe pas de nombre fini M tel que $f(x) \leqslant M$ presque partout sur R, donc $(-f)$, en général, ne peut pas appartenir à Φ_1.

Pour que la nouvelle intégrale I soit une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions intégrables, il faut donc considérer un ensemble plus vaste que Φ_1. D'après ce qui précède, f étant une fonction quelconque de Φ_1, on attribuera à $(-f)$ l'intégrale $-I(f)$; si f_1 et f_2 sont deux fonctions quelconques de Φ_1, on attribuera à $(f_1 - f_2)$ l'intégrale $I(f_1) - I(f_2)$.

IV. 3. G. — DÉFINITION. *On dit que la fonction* h *appartient à* F_1 *si* $h \underset{pp}{=} f_1 - f_2$, f_1 *et* f_2 *appartenant à* Φ_1. *On appelle intégrale de* h, *et on note* I(h), *le nombre*

$$I(h) = I(f_1) - I(f_2).$$

REMARQUE. L'ensemble de fonctions F_1 est, d'après la remarque ci-dessus, strictement plus grand que Φ_1. Pour justifier la définition de l'intégrale $I(h)$ il faut montrer que ce nombre ne dépend que de h et non du choix particulier de f_1 et f_2 qui a servi à définir $I(h)$. C'est l'objet de la proposition suivante.

IV. 3. H. — PROPOSITION. *Si* f_1, f_2, g_1, g_2 *sont quatre fonctions de* Φ_1, *on a :*

$$(f_1 - f_2 \underset{pp}{=} g_1 - g_2) \Longrightarrow I(f_1) - I(f_2) = I(g_1) - I(g_2).$$

En effet l'hypothèse peut s'écrire $f_1 + g_2 \underset{pp}{=} f_2 + g_1$. Or $(f_1 + g_2)$ et $(f_2 + g_1)$ appartiennent à Φ_1 d'après (IV. 3. F), donc, d'après le corollaire 1 de (IV. 3. E), $I(f_1 + g_2) = I(f_2 + g_1)$, qui peut s'écrire, d'après (IV. 3. F) $I(f_1) + I(g_2) = I(f_2) + I(g_1)$, équivalente à l'égalité annoncée.

Nous allons voir maintenant que presque toutes les propriétés principales de l'intégrale desfonctions en escalier sont encore vraies pour l'intégrale des fonctions de F_1, qui sont en fait les fonctions « absolument intégrales » ou « sommables » au sens de Lebesgue sur la droite entière.

IV. 3. I. — THÉORÈME. *L'intégrale* I(f) *est une forme linéaire croissante sur* F_1.

Si h_1 et h_2 appartiennent à F_1, on a $h_1 \underset{pp}{=} f_1 - f_2$ et $h_2 \underset{pp}{=} g_1 - g_2$, les quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 appartenant à Φ_1

D'où $h_1 + h_2 \underset{pp}{=} (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$, ce qui montre que $h_1 + h_2 \in F_1$, car $(f_1 + g_1) \in \Phi_1$ et $(f_2 + g_2) \in \Phi_2$ d'après (IV. 3. F), et donne la valeur de l'intégrale de cette fonction :

$$\mathrm{I}(h_1 + h_2) = \mathrm{I}(f_1 + g_1) - \mathrm{I}(f_2 + g_2) = \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(g_1) - \mathrm{I}(f_2) - \mathrm{I}(g_2)$$
$$= [\mathrm{I}(f_1) - \mathrm{I}(f_2)] + [\mathrm{I}(g_1) - \mathrm{I}(g_2)] = \mathrm{I}(h_1) + \mathrm{I}(h_2).$$

De même $h \in \mathrm{F}_1 \Longrightarrow \eta \underset{pp}{=} f_1 - f_2 \Longrightarrow -h \underset{pp}{=} f_2 - f_1 \Longrightarrow -h \in \mathrm{F}_1$ et $\mathrm{I}(-h) = -\mathrm{I}(h)$.

Ceci, joint à (IV. 3. F), montre que, α étant un nombre réel fini de signe quelconque, si h appartient à F_1 (αh) appartient à F_1 et $\mathrm{I}(\alpha h) = \alpha \mathrm{I}(h)$, ce qui achève de démontrer que I est une forme linéaire sur F_1.

Elle est croissante car :

$h_1 \leqslant h_2 \Longleftrightarrow f_1 + g_2 \leqslant f_2 + g_1 \Longrightarrow \mathrm{I}(f_1 + g_2) \leqslant \mathrm{I}(f_2 + g_1)$ d'après (IV. 3. E) ce qui peut s'écrire, en utilisant (IV. 3. F) :

$\mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(g_2) \leqslant \mathrm{I}(f_2) + \mathrm{I}(g_1) \Longleftrightarrow \mathrm{I}(f_1) - \mathrm{I}(f_2) \leqslant \mathrm{I}(g_1) - \mathrm{I}(g_2)$, c'est l'inégalité qu'on voulait démontrer.

IV. 3. J. — Proposition. *Si* h *appartient à* F_1, *il en est de même pour* h^+, h^-, *et* $|h|$. *Et l'on a*

$$\mathrm{I}(h) = \mathrm{I}(h^+) - \mathrm{I}(h^-), \quad \mathrm{I}(|h|) = \mathrm{I}(h^+) + \mathrm{I}(h^-).$$

Par hypothèse $h \underset{pp}{=} f_1 - f_2$, $f_1 \in \Phi_1$, $f_2 \in \Phi_1$. D'après (IV. 3. F) cela implique que $\sup(f_1, f_2) \in \Phi_1$ et $\inf(f_1, f_2) \in \Phi_1$.

Or $h^+ \underset{pp}{=} \sup(f_1, f_2) - f_2$, $h^- \underset{pp}{=} \sup(f_1, f_2) - f_1$, $|h| \underset{pp}{=} \sup(f_1\, f_2) - \inf(f_1, f_2)$, donc ces trois fonctions appartiennent encore à F_1. Les relations $h = h^+ - h^-$, $|h| = h^+ + h^-$ et la linéarité de I sur F_1 entraînent les relations indiquées entre intégrales.

Remarques. 1) La relation $|h| = \sup(f_1, f_2) - \inf(f_1, f_2)$ montre que $\mathrm{I}(|h|) = \mathrm{I}\{\sup(f_1, f_2)\} - \mathrm{I}\{\inf(f_1, f_2)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}\{\sup(\varphi^1_n, \varphi^2_n)\} - \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}\{\inf(\varphi^1_n, \varphi^2_n)\}$ si $\{\varphi^1_n\}$ et $\{\varphi^2_n\}$ sont deux suites croissantes de fonction en escalier servant à définir $\mathrm{I}(f_1)$ et $\mathrm{I}(f_2)$. On obtient donc

$\mathrm{I}(|h|) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}\{\sup(\varphi^1_n, \varphi^2_n) - \inf(\varphi^1_n, \varphi^2_n)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}(|\varphi^1_n - \varphi^2_n|)$.

2) Si h_1 et h_2 appartiennent à F_1, il en est de même pour $\sup(h_1, h_2)$ et $\inf(h_1, h_2)$.

On peut par exemple remarquer que

$\sup(h_1, h_2) = \frac{1}{2}[h_1 + h_2 + |h_1 - h_2|]$, $\inf(h_1, h_2) = \frac{1}{2}[h_1 + h_2 - |h_1 - h_2|]$, et appliquer (IV. 3 J.).

IV. 3. K. — Théorème. h *étant une fonction quelconque de* F_1, *posons* $\mathrm{N}_1(h) = \mathrm{I}(|h|)$. *Cette application de* F_1 *dans* R *a les propriétés suivantes :*

1) $\mathrm{N}_1(h) \geqslant 0$, $\mathrm{N}_1(0) = 0$.

2) $\mathrm{N}_1(h_1 + h_2) \leqslant \mathrm{N}_1(h_1) + \mathrm{N}_1(h_2)$, $\forall\ h_1, h_2 \in \mathrm{F}_1$.

3) $\mathrm{N}_1(\alpha h) = |\alpha|\, \mathrm{N}_1(h)$, $\forall\ \alpha \in \mathrm{R}$ et $\forall\ h \in \mathrm{F}_1$.

En effet 1) résulte de la croissance de I, 2) de la relation $|h_1 + h_2| \leqslant |h_1| + |h_2|$, de la croissance et de la linéarité de I, et 3) de la relation $|\alpha h| = |\alpha|\,|h|$ et de la linéarité de I.

REMARQUE. — Soit $h \in F_1$, donc $h \underset{pp}{=} f_1 - f_2$, f_1 et $f_2 \in \Phi_1$.

Soient $\{\varphi_n^1\}$ et $\{\varphi_n^2\}$ deux suites croissantes de fonctions en escalier suivant à définir $I(f_1)$ et $I(f_2)$, et $\varphi_n = \varphi_n^1 - \varphi_n^2$.

On a $\lim\limits_{n \to \infty} N_1(h - \varphi_n) = 0$;

car $I(|h - \varphi_n|) = I(|(f_1 - \varphi_n^1) - (f_2 - \varphi_n^2)|) \leqslant I(f_1 - \varphi_n^1) + I(f_2 - \varphi_n^2)$ et ces deux quantités positives tendent vers zéro pour $n \to +\infty$.

IV. 3. L. — THÉORÈME. *Soit* h *une fonction quelconque de* F_1. *On a*

$$N_1(h) = 0 \rightleftarrows h \underset{pp}{=} 0$$

Comme $h \underset{pp}{=} 0 \rightleftarrows |h| \underset{pp}{=} 0$ et que $N_1(h) = I(|h|)$, on sait, par la définition (IV. 3. B.), que $N_1(h) = 0$ dès que $h \underset{pp}{=} 0$.

Inversement soit $h \in F_1$. On a $h = f_1 - f_2$ sauf sur un ensemble négligeable, avec f_1 et f_2 appartenant à Φ_1. Il existe donc deux suites croissantes $\{\varphi_n^1\}$ et $\{\varphi_n^2\}$ de fonctions en escalier telles que

$f_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^1$ sauf sur un ensemble e_1 négligeable

$f_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^2$ sauf sur un ensemble e_2 négligeable.

Considérons d'abord la suite décroissante $\{\varphi_p^1 - \varphi_n^2\}$ (p fixé, n variable $\geqslant p$).

On a $\varphi_p^1 - f_2 = \lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_p^1 - \varphi_n^2)$ sauf sur e_2.

D'autre part $I\{(\varphi_p^1 - \varphi_n^2)^+\} \leqslant I\{(\varphi_n^1 - \varphi_n^2)^+\} \leqslant I(|\varphi_n^1 - \varphi_n^2|)$

Or, d'après la remarque de (IV. 3. J.),

$\lim\limits_{n\to\infty} I(|\varphi_n^1 - \varphi_n^2|) = I(|h|) = 0$. Donc à fortiori $\lim\limits_{n\to\infty} I\{(\varphi_p^1 - \varphi_n^2)^+\} = 0$.

Il résulte alors de (IV. 2. D.) que $\lim\limits_{n\to\infty} \{(\varphi_p^1 - \varphi_n^2)^+\} \underset{pp}{=} 0$, donc que $\varphi_p^1 - f^2 \leqslant 0$ sauf sur un ensemble négligeable e'_p.

Ceci étant vrai quel que soit p, on en déduit que $h \leqslant 0$ sauf peut-être sur une ensemble négligeable $e_1 U e_2 U \left(\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} e'_p\right)$.

Même conclusion pour $(-h)$. Donc $h \underset{pp}{=} 0$.

REMARQUE. La relation d'équivalence (E'_1) $h_1 \underset{pp}{=} h_2$ est donc la même que la relation d'équivalence $N_1(h_1 - h_2) = 0$, dans F_1, c'est-à-dire la relation (E_1) de (III. 1. C.).

IV. 3. M. — THÉORÈME. *L'espace* $\frac{F_1}{E_1}$, *muni des opérations* $(h_1 + h_2)$ *et* (αh) *est un espace vectoriel normé pour la norme* N_1. *L'intégrale* I *peut-être considérée comme une application linéaire croissante de* $\frac{F_1}{E_1}$ *dans* R, *continue quand* $\frac{F_1}{E_1}$ *est muni de la topologie associée à* N_1. *Rappelons que la relation d'équivalence* E_1 *peut s'exprimer par*

$$h_1 \underset{pp}{=} h_2 \text{ ou } N_1(h_1 - h_2) = 0.$$

Ceci résume l'essentiel des résultats démontrés précédemment. On peut remarquer que la somme de deux fonctions de F_1 est définie seulement presque partout (pour tout x sauf peut-être sur l'ensemble négligeable où les deux fonctions sont infinies de signe différent) mais la somme des deux classes correspondantes de $\frac{F_1}{E_1}$ est définie sans ambiguïté.

L'intégrale de Lebesgue possède donc, pour $\frac{F_1}{E_1}$, les mêmes propriétés principales que l'intégrale des fonctions en escalier pour Φ.

IV. 3. N. — DÉFINITION. *On désigne par* L_1 *l'espace quotient* $\frac{F_1}{E_1}$ *considéré en* (IV. 3. M.).

C'est un espace vectoriel normé. On va montrer dans le paragraphe suivant qu'il est complet pour N_1, donc que c'est un espace de Banach. Ceci prouvera notamment que c'est la meilleure extension possible de l'intégrale des fonctions en escalier, au sens de (III. 1).

IV. 4. — AUTRES PROPRIÉTÉS DE L'ESPACE VECTORIEL NORMÉ L_1

Le but principal de ce paragraphe est de montrer que L_1 est complet pour la norme N_1, c'est-à-dire que toute suite $\{h_n\}_{n=1,2,\dots}$ de fonctions de L_1, de Cauchy pour la norme N_1, converge selon la norme N_1 vers une fonction de L_1. Nous commencerons par étudier le cas plus simple des suites de Cauchy monotones.

IV. 4. A. — LEMME. *Soit* $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$ *une suite croissante de fonctions de* Φ_1, *telle que la suite* $\{I(f_n)\}$ *ait une borne supérieure finie. Il existe alors une fonction* f *de* Φ_1 *telle que* $f \underset{pp}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, *et on a* $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

Quel que soit l'entier K positif, puisque f_k appartient à Φ_1, il existe une suite croissante $\{\varphi_n^k\}_{n=1,2,\dots}$ de fonctions en escalier telles que $f_k = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^k$ en tout point de R, sauf peut-être sur e_k négligeable.

Considérons la suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions en escalier définies par $\varphi_n = \sup\limits_{1\leqslant K\leqslant n} (\varphi_n^k)$. Cette suite est croissante, comme chacune des suites $\{\varphi_n^k\}$.

Les inégalités $\varphi_n^k \underset{pp}{\leqslant} f_k \leqslant f_n$ $(1 \leqslant K \leqslant n)$ entraînent $\varphi_n \underset{pp}{\leqslant} f_n$ donc $I(\varphi_n) \leqslant I(f_n)$. La suite des intégrales $\{I(\varphi_n)\}$ admet donc à fortiori une borne supérieure finie. Par conséquent, d'après (IV. 3. C), la fonction $f = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ appartient à Φ_1 et $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(\varphi_n)$.

D'autre part, comme $f_n \underset{pp}{=} \lim\limits_{P\to\infty} \varphi_P^n$ et $f = \lim\limits_{P\to\infty} \varphi_P$, l'inégalité $\varphi_P^n \leqslant \varphi_P$ pour $P > n$ entraîne $f_n \underset{pp}{\leqslant} f$. On a donc la double inégalité $\varphi_n \leqslant f_n \leqslant f$ qui, jointe aux résultats concernant $\{\varphi_n\}$ et f, donne les deux conclusions suivantes : $f \underset{pp}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ et $I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} I(f_n)$.

REMARQUE. Ce lemme montre que, si on applique à Φ_1 le procédé utilise pour passer de Φ à Φ_1, on retrouve Φ_1 lui-même.

IV. 4. B. — THÉORÈME. *Soit* $\{h_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *une suite croissante de fonctions de* F_1, *telle que la suite* $\{I(h_n)\}$ *ait une borne supérieure finie. Il existe alors une fonction* h *de* F_1 *telle que* $h \underset{pp}{=} \lim\limits_{n\to\infty} h_n$, *et on a* $I(h) = \lim\limits_{n\to\infty} I(h_n)$.

Cet énoncé équivaut au suivant.

Etant donnée une série de fonctions k_n *positives de* F_1 *telles que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(k_n) < +\infty$, *il existe une fonction* k *de* F_1 *telle que* $k \underset{pp}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n$ *et* $I(k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(k_n)$.

L'équivalence entre ces deux énoncés résulte du fait que la différence de deux fonctions de F_1 appartient à F_1. On passe alors du premier énoncé au second en posant $h_n = \sum\limits_{p=1}^{n} k_p$, du second au premier en posant $h_{n+1} - h_n = k_n$.

Démontrons le second énoncé. Par hypothèse $k_n = f_n - g_n$, $f_n \in \phi_1$, $g_n \in \phi_1$. On peut retrancher de g_n, fonction de ϕ_1, une fonction en escalier φ_n *de telle sorte que* $g^*_n = g_n - \varphi_n \geqslant 0$ et $I(g^*_n) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

Alors $f^*_n = f_n - \varphi_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(f^*_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(k_n) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(g^*_n) < +\infty$.

On peut alors appliquer (IV. 4. A) à $\left\{\sum\limits_{p=1}^{n} f^*_p\right\}$ et $\left\{\sum\limits_{p=1}^{n} g^*_p\right\}$, comme $k_n = f^*_n - g^*_n$, on en déduit par différence les résultats cherchés.

IV. 4. C. — THÉORÈME. *Soit* $\{h_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *une suite de fonctions de* F_1, *de Cauchy pour la norme* N_1, *c'est-à-dire telle que*

$$\lim_{p,q\to\infty} I(|h_p - h_q|) = 0$$

1) *Il existe une suite* $\{h_{n_i}\}_{i=1,2,\ldots}$, *extraite de la suite initiale, et qui converge presque partout, en convergence simple, vers une fonction* h *de* F_1, *possédant la propriété suivante :*

$$\lim_{n\to\infty} I(|h - h_n|) = 0 \qquad (1)$$

2) *Pour qu'une fonction* h_1 *de* F_1 *vérifie* $\lim\limits_{n\to\infty} I(|h_1 - h_n|) = 0$, *il faut et il suffit qu'elle soit égale presque partout à* h.

3) *Si une autre suite extraite* $\{h_{n_j}\}_{j=1,2,\ldots}$ *de la suite initiale admet presque partout, en convergence simple, une limite* h_2, h_2 *est égale presque partout à* h.

a) Pour obtenir les résultats de 1), il suffit de choisir dans la suite initiale une suite extraite $\{ h_{n_i} \}$ telle que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{I}(|h_{n_{i+1}} - h_{n_i}|) < +\infty$, par exemple, en prenant $\mathrm{I}(|h_{n_{i+1}} - h_{n_i}|) < \frac{1}{2^i}$ ce qui est possible en raison de la condition de Cauchy vérifiée par la suite initiale. Dans la suite du raisonnement, nous posons $k_i = h_{n_i}$

Il résulte du choix de k_i et du théorème (IV. 4. B.) (seconde forme) que la série $\sum_{p=1}^{\infty} |k_{p+1} - h_p|$ est presque partout convergente vers une fonction K_1 de F_1, et que $\mathrm{I}(\mathrm{K}_1) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{I}(|k_{p+1} - k_p|) \leqslant 1$.

Donc le reste $\sum_{p=1}^{\infty} |k_{p+1} - k_p|$ converge presque partout vers une fonction K_i de F_1, possédant les propriétés suivantes :

$\{\mathrm{K}_i(x)\}$ converge presque partout vers zéro pour $i \to +\infty$, et $\lim \mathrm{I}(\mathrm{K}_i) = 0$

On peut alors appliquer le théorème (IV. 4. B.) (première forme) à la suite $\{l_i\}$ de fonctions de F_1 définies par $l_i = k_i - \mathrm{K}_i$.

En effet cette suite est croissante; $\mathrm{I}(l_i) \leqslant 1 + \mathrm{I}(|k_i|) = 1 + \mathrm{I}(|h_{n_i}|)$; or, la suite $\{h_n\}$ étant de Cauchy pour N_1, la suite $\{\mathrm{I}(|h_n|)\}$ est de Cauchy dans R, donc bornée supérieurement. Par conséquent $\{\mathrm{I}(l_i)\}_{i=1,2\ldots}$ admet une borne supérieure finie et, d'après (IV. 4. B.),
il existe une fonction h de F_1 telle que

$$h \underset{pp}{=} \lim_{i\to\infty} l_i \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} \mathrm{I}(h - l_i) = 0 \tag{3}$$

Comme $h_{n_i} = k_i = l_i + \mathrm{K}_i$, (2) et (3) entraînent

$$h \underset{pp}{=} \lim_{i\to\infty} h_{n_i} \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} \mathrm{I}(|h - h_{n_i}|) = 0$$

En raison de la condition de Cauchy vérifiée par $\{h_n\}$ on déduit de la dernière relation : $\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(|h - h_n|) = 0$.

b) La partie 2) résulte de 1) et de l'inégalité triangulaire pour la norme N_1, car on en conclut $\mathrm{I}(|h - h_1|) = 0$, donc $h_1 = h$ d'après (IV. 3. L.).

c) La suite extraite $\{h_{n_j}\}$ est à fortiori de Cauchy pour N_1 comme la suite initiale. D'après les résultats précédents on peut en extraire une autre suite convergeant presque partout vers une fonction de F_1; mais, cette fonction est nécessairement égale presque partout à h_2, limite supposée de $\{h_{n_j}\}$. Donc $h_2 \in \mathrm{F}_1$ et $\lim_{j\to\infty} \mathrm{I}(|h_2 - h_{n_j}|) = 0$.

Mais, $\{h_n\}$ étant de Cauchy pour N_1, ceci entraîne $\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(|h_2 - h_n|) = 0$, donc $h_2 \underset{pp}{=} h$ d'après b).

Remarque. (IV. 4. A) et (IV. 4. B) sont des cas particuliers de (IV. 4. C),

(IV. 4. B) correspondant au cas d'une suite croissante, de Cauchy pour N_1. (IV. 4. C) prouve l'existence de la limite h de $\{h_n\}$ selon la norme N_1, l'unicité de cette limite à un ensemble négligeable près, et donne un moyen d'obtenir h à partir de $\{h_n\}$ par un procédé de convergence simple. On ne peut pas « améliorer » ce théorème dans le sens suivant : il peut arriver que la suite initiale $\{h_n\}$, de Cauchy pour N_1, ne converge, en convergence simple, pour aucun point de R.

Conclusion. On a donc prouvé que L_1 est un espace de Banach. Si on applique (IV. 4. C) à une suite de fonctions en escalier, on voit que toute suite de fonctions en escalier, de Cauchy pour ν_1, converge selon N_1 vers une fonction de L_1, que L_1 est isomorphe au complété de Φ pour la norme ν_1, donc, d'après (III. 2), que L_1 est la meilleure extension possible de l'intégrale des fonctions en escalier par passages à la limite, si on veut que, dès qu'une fonction f est intégrable, sa valeur absolue le soit aussi, tout en conservant les propriétés initiales de l'intégrale des fonctions en escalier.