Annales de la faculté des sciences de Toulouse

I. Giorgiutti

Groupes de Grothendieck. Introduction

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 26 (1962), p. 151-207
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1962_4_26__151_0>

GROUPES DE GROTHENDIECK

INTRODUCTION

Si G est un groupe fini et si k est un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos, il est bien connu que les caractères de G permettent d'étudier de manière commode les modules sur k[G]. Lorsque k n'est plus un corps on peut substituer aux caractères de G des « groupes de Grothendieck » associés à diverses sous-catégories pleines de la catégorie des modules de type fini sur k[G] (SWAN, [20]). De plus, c'est à l'aide de tels groupes qu'il a été possible d'étendre aux modules projectifs sur les algèbres de groupes ([20], [11]) et sur certaines algèbres non commutatives des théorèmes tels que le théorème 1 de ([17]). Cependant dans ([11]) nous utilisions les caractères modulaires de Brauer et un théorème de Brauer sur la matrice de Cartan de $\mathbf{F}_p[G]$. Il nous a alors semblé que la théorie des caractères modulaires s'exposait de façon plus satisfaisante à l'aide des groupes de Grothendieck ainsi que beaucoup de résultats de la théorie des représentations des algèbres artiniennes. Cela fait l'objet du chapitre IV et d'une partie du chapitre III, le reste de ce chapitre étant consacré aux groupes de Grothendieck de certaines sous-catégories de la catégorie des modules de type fini sur une algèbre A. Comme beaucoup de ces résultats étaient valables pour des catégories de Modules sur des Algèbres sur des préschémas, nous avons préféré grouper ces résultats dans le chapitre II. Le chapitre I donne des généralités sur les groupes de Grothendieck.

Dans presque tout ce travail nous n'utiliserons que des résultats d'algèbre homologique, d'algèbre commutative et des résultats de ([5]).

Nous ne considérons jamais les problèmes liés à la théorie des « représentations induites » pour lesquels nous renvoyons à ([20]).

Nous avons présenté une partie de ce travail au Séminaire J.-P. Serre, 1960-1961.

Pour terminer cette introduction nous remercions M. J.-P. SERRE pour l'aide constante qu'il nous a apporté tant dans l'élaboration que dans la rédaction de cette thèse. Nous remercions aussi M. DEHEUVELS qui, après nous avoir initié à la théorie des représentations et à l'algèbre homologique n'a cessé de s'intéresser à nos travaux. Nos remerciements à M. CARTAN qui a accepté de présider le jury de cette thèse et à M. MALLIAVIN qui a bien voulu nous donner le sujet de la seconde thèse

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

SOMMAIRE

Les § 1 et 2 sont essentiellement des rappels. Soit C une catégorie abélienne et D une sous-catégorie pleine de C satisfaisant à la condition 1 b), on montre comment on peut attacher à D un groupe abélien $K(D)$ appelé groupe de Grothendieck de D qui est solution d'un problème universel pour les fonctions additives sur D à valeurs dans les groupes abéliens (cf. [4] et [14]), puis nous donnons quelques propriétés élémentaires de ces groupes.

Le § 3 étudie les homomorphismes de groupes de Grothendieck associés à certains foncteurs. En particulier, lorsque D' est une sous-catégorie pleine de D, il existe un homomorphisme canonique de $K(D')$ dans $K(D)$. Nous esquissons alors la démonstration d'un théorème de Grothendieck qui donne des conditions très générales pour que cet homomorphisme soit un isomorphisme. Ce théorème sera très utilisé dans le chapitre II.

Le § 4 introduit une suite exacte de groupes de Grothendieck associés à une sous-catégorie épaisse D' d'une catégorie abélienne D, à la catégorie D et à la catégorie quotient de D par D'. C'est à l'aide de cette suite que nous voulons généraliser les suites exactes de ([4], prop. 7) et de ([20], prop. 2.1). Pour terminer nous considérons trois sortes de catégories, la première intervient dans l'étude des modules projectifs de type fini sur un anneau A (et aussi chez les topologues pour l'étude des classes de fibrés stables), les deux autres dans l'étude des catégories dont tous les objets sont de longueur finie. Dans chacun de ces cas nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux objets de la catégorie aient même image dans les groupes de Grothendieck associés.

1.1. — Soit C une catégorie abélienne et soit D une sous-catégorie de C. On suppose :

a) que D est une sous-catégorie pleine de C. On rappelle (cf. [15], 0_{III}, 8.1.5) que les objets de D sont des objets de C, que si E_1 et E_2 sont des objets de D, $\mathrm{Hom}_D(E_1, E_2) = \mathrm{Hom}_C(E_1, E_2)$ et que la loi de composition des morphismes de D est induite par celle de C.

b) qu'il existe un ensemble S d'objets de D tel que tout objet de D soit isomorphe à un élément de S.

1.2. — On dit qu'une fonction f de D dans un groupe abélien G est additive si pour toute suite exacte de C

$$0 \to E \to E' \to E'' \to 0$$

telle que E, E', E″ soient des objets de D, on a

$$f(E') = f(E) + f(E'').$$

Pour tout groupe abélien G, les fonctions additives de D dans G forment un sous-groupe $A_D(G)$ de l'ensemble des fonctions de S dans G. On définit de manière évidente un foncteur covariant $G \rightsquigarrow A_D(G)$ de la catégorie des groupes abéliens dans la catégorie des groupes abéliens.

Soit alors $K(D)$ le groupe abélien défini par générateurs et relations de la manière suivante :

— tout élément E de S définit un générateur $[E]$ de $K(D)$.

— toute suite exacte

$$O \to E \to E' \to E'' \to O, \qquad E, E', E'' \in S$$

définit une relation : $[E'] - [E] - [E''] = O$.

Soit E un objet de D, par hypothèse il existe $E' \in S$ tel que E soit isomorphe à E'. Soit φ_D la fonction qui à E associe l'élément $[E']$ de $K(D)$, on a $\varphi_D \in A_D(K(D))$. Si G est un groupe abélien et si $g \in \mathrm{Hom}(K(D), G)$ alors $f = g \circ \varphi_D \in A_D(G)$. Réciproquement, pour toute fonction $f \in A_D(G)$ il existe un homomorphisme unique g de $K(D)$ dans G tel que $f = g \circ \varphi_D$. Autrement dit le couple $(K(D), \varphi_D)$ représente le foncteur $G \rightsquigarrow A_D(G)$. Cela montre que le groupe $K(D)$ « ne dépend pas » de l'ensemble S. Le groupe $K(D)$ s'appelle le *groupe de Grothendieck* de D et φ_D l'application canonique de D dans $K(D)$.

On écrira souvent par la suite $[E]_D$ au lieu de $\varphi_D(E)$ et même $[E]$ si aucune confusion n'est à craindre.

Remarque 1.3. — Il résulte immédiatement des définitions que tout $x \in K(D)$ est de forme $x = \sum_{i=1}^{n} n_i [E_i]$, où $n_i \in \mathbf{Z}$ et où E_i est un objet de D.

Si de plus D est stable pour les sommes directes finies tout élément x de $K(D)$ est de la forme $x = [E] - [F]$, où E et F sont des objets de D.

Remarque 1.4. — Si D est stable pour les sommes directes infinies alors $K(D) = O$. En effet, soit E un objet de D et soit, pour tout entier n, E_n objets de D isomorphe à E. Posons $F = \oplus_n E_n$, alors $F \oplus E \simeq F$. Donc $[F] = [F] + [E]$ et $[E] = O$.

§ 2. — Lemmes élémentaires.

Lemme 2.1. — Soit E *un objet de D, et soit* $O = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ *une suite croissante de sous-objets de* E. *On suppose que pour* $O < i \leqslant n$, E_i et E_i / E_{i-1} *sont des objets de D. Alors* $[E] = \sum_{i=1}^{n} [E_i/E_{i-1}]$.

Démonstration par récurrence sur n en utilisant la suite exacte $O \to E_{n-1} \to E \to E/E_{n-1} \to O$.

2.2. — Soit $E_\cdot : O \to E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} E_{n-2} \cdots\cdots \xrightarrow{\partial_1} E_0 \to O$

un complexe fini de *D*. On dira que E. *est strictement dans D* si les objets $B_i = \mathrm{Im}\,(\partial_{i+1})$, $Z_i = \ker\,(\partial_i)$ et $H_i = Z_i/B_i$ sont dans *D*.

Lemme 2.3. — Soit E. *un complexe fini* de *D. Si* E *est strictement dans D* (cf. 2.2), *on a alors, avec les notations de* (2.2)

$$\sum_i (-1)^i\,[E_i] = \sum_i (-1)^i\,[H_i].$$

§ 3. — CARACTÈRE FONCTORIEL.

3.1. — Soit *C*, *C′*, *C″* des catégories et soient *D*, *D′*, *D″* des sous-catégories de *C*, *C′*, *C″* respectivement. On suppose que ces sous-catégories satisfont aux conditions de (1.1).

Soit T (resp. T′) un foncteur de *C* dans *C′* (resp. de *C′* dans *C″*). On suppose que T (resp. T′) transforme un objet de *D* (resp. *D′*) en un objet de *D′* (resp. *D″*) et que T (resp. T′) est exact sur *D* (resp. *D′*). La fonction $\varphi_{D'} \circ$ T est une fonction additive de *D* dans K(*D′*). D'après (1.2), elle définit un homomorphisme [T] caractérisé par la relation :

(3.1.1) $[T]([E]) = [T(E)]$, pour tout objet E de *D*.

Il est d'autre part immédiat de vérifier que :

(3.1.2) $[T'] \circ [T] = [T' \circ T]$.

Lemme 3.2. — En plus des hypothèses de (3.1) *on suppose que* $T : C \to C'$ *est une équivalence de catégories et que* T *définit une équivalence de catégories entre D et D′. Alors* $[T] : K(D) \to K(D')$ *est un isomorphisme.*

Exemple 3.3. — Soit *C* une catégorie abélienne, soit *D* une sous-catégorie de *C* satisfaisant aux conditions de (1.1) et soit *D′* une sous-catégorie pleine de *D*. Alors, *D′* est une sous-catégorie de *C* satisfaisant aux conditions de (1.1). Le foncteur identique de *C* satisfait aux conditions de (3.1), il lui est donc associé un homomorphisme.

(3.3.1) $K(D') \to K(D)$.

On appellera cet homomorphisme *l'homomorphisme canonique de* K(*D′*) *dans* K(*D*).

Proposition 3.4 (GROTHENDIECK [14]). — *Soit C une catégorie abélienne et soit D une sous-catégorie pleine de C satisfaisant aux conditions de (1.1). Soit D′ une sous-catégorie pleine de D. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

a) *Pour toute suite exacte*

$$O \to E' \to E \to E'' \to O$$

de C telle que E *et* E″ *soient des objets de D* (*resp. D′*), E′ *est un objet de D* (*resp. D′*).

b) *Pour tout objet* E *de D, il existe* $n_E \in \mathbf{Z}$ *tel que pour toute suite exacte*

$$O \to F \to E_n \to E_{n-1} \to \dots\dots\dots \to E_0 \to E \to O$$

dans laquelle E_i, $O \leqslant i \leqslant n$, *est un objet de D′ et* $n > n_E$, F *est un objet de D′.*

c) *Soient* E, E′, E″ *des objets de D et soient* $u : E \to E'$ *un morphisme et* $v : E'' \to E'$ *un épimorphisme. Il existe alors un objet* F *de D′, un morphisme* $u' : F \to E''$ *et un épimorphisme* $v' : F \to E$ *tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{v'} & E \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ E'' & \xrightarrow{v} & E' \end{array}$$

soit commutatif.

Alors l'homomorphisme canonique (3.3.1) *est un isomorphisme.*

Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration (cf. [14] th. 2.3 et [4] th. 2). Soit E un objet de D, on montre d'abord qu'il existe une résolution finie de E par des objets de D' :

$$(E_.) \qquad O \to F_m \to F_{m-1} \to \ldots\ldots \to F_o \to E \to O.$$

On pose alors $f(E_.) = \sum_{i \geqslant O} (-1)^i [F_i]_{D'}$.

On montre ensuite que $f(E_.)$ ne dépend que de E. Si $E_.$ et $E'_.$ sont deux résolutions finies de E, on construit une résolution finie $E''_.$ de E et un épimorphisme h (resp. h′) de $E''_.$ sur $E_.$ (resp. $E'_.$) induisant l'identité sur E ([4], lemme 14); il suffit alors de montrer que $f(E''_.) = f(E'_.)$. Pour cela on prouve que le complexe $F_. = \ker(h)$ est acyclique en toute dimension et que ses bords et ses cycles sont des objets de D' et on applique le lemme (2.3).

On montre ensuite que $f(E_.)$ est une fonction additive de E (cf. [4], lemme 12). Il existe donc, d'après (1.2), un homorphisme $f : K(D) \to K(D')$ caractérisé par la condition $\bar{f}([E]) = f(E_.)$. Il est alors trivial de vérifier que cet homomorphisme est l'inverse de l'homomorphisme canonique de $K(D')$ dans $K(D)$.

3.5. — Reprenons maintenant les notations et les hypothèses de (3.1). On désigne par $F = (F^i)$ (resp. $G = (G^i)$) soit un foncteur cohomologique ,soit un foncteur homologique et on suppose que pour tout objet E de D (resp. E′ de D'), les $F^i(E)$ (resp. $G^i(E')$) sont des objets de D′ (resp. D″), nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. On pose alors : $[F](E) = \sum_i (-1)^i [G^i(E')]$ (resp. $[G](E') = \sum_i (-1)^i G^i(E')$.

Rappelons qu'une sous-catégorie pleine D_1 d'une catégorie abélienne C_1 est dite *épaisse* si pour toute suite exacte

$$O \to E_1 \to E'_1 \to E''_1 \to O$$

de C_1, E'_1 est un objet de D_1 si et seulement si E_1 et E''_1 sont des objets de D_1.

Lemme 3.6. — Si, en plus des hypothèses de (3.5) *D′ est une sous-catégorie épaisse de C′, alors le foncteur* F *définit un homomorphisme* $[F] : K(D) \to K(D')$ *caractérisé par la relation :*

$$[F]([E]) = \sum_i (-1)^i [F^i(E)],$$

pour tout objet E *de D.*

En effet, il résulte immédiatement de (2.2) que la fonction $[T](E) = \sum_i (-1)^i [F^i(E)]$ est additive.

Lemme 3.7. — Si en plus des conditions de (3.5) *les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) *La catégorie D' (resp. D'') est une sous-catégorie épaisse de C'* (resp. C'').

b) *Il existe un foncteur* H *de C dans C'' satisfaisant à des conditions analogues à celles de* F *et de* G.

c) *Il existe, pour tout objet* E *de D une suite spectrale aboutissant aux* $H^k(E)$ *et dont le terme initial est* $G^j(F^i(E))$.

Alors : $[H] = [G] \circ [F]$.

Démonstration immédiate à l'aide des lemmes (2.1) et (2.3).

§ 4. — Quelques cas particuliers.

4.1. — Soit D une catégorie abélienne satisfaisant à la condition (1.1.b) et soit D' une sous-catégorie épaisse de D (cf. 3.5). D'après ([11], III, 1) on peut associer à D et D' une catégorie abélienne D/D' : la catégorie quotient de D par D'. Les objets de D/D' sont les objets de D et si E et E' sont des objets de D, $\mathrm{Hom}_{D/D'}(E, E') = \varinjlim_{F,F'} \mathrm{Hom}_D(F, E'/F')$, où F et F' parcourent les sous-objets de E et de E' tels que E/F et F' soient des objets de D'. Soit T le foncteur canonique de D dans D/D', T est un foncteur exact, il définit donc un homomorphisme [T] de $K(D')$ dans $K(D/D')$.

Proposition 4.2. — Sous les hypothèses et avec les notations de (4.1), *on a la suite exacte*

$$K(D') \to K(D) \xrightarrow{[T]} K(D/D') \to O. \tag{4.2.1}$$

En effet, soit $K = K(D)/K(D')$; puisque pour tout objet E de D on a $T(E) = O$, [T] se factorise à travers un homomorphisme $t : K \to K(D/D')$. On va définir un homomorphisme $t' : K(D/D') \to K$ et montrer que t' est l'inverse de t.

Soit F un objet de D/D' ; il existe alors un objet E de D tel que $T(E) = F$. Soit e l'image canonique de E dans K; nous allons montrer que e ne dépend que de F. En effet, soit E' un objet de D tel que $T(E') = T(E) = F$ et soit e' l'image canonique de E' dans K. D'après ([11], III, 2) il existe des sous-objets E_1 et E_2 (resp. E'_1 et E'_2) de E (resp. E') tels que

$$E_1 \subset E_2 \subset E \quad (\text{resp. } E'_1 \subset E'_2 \subset E'),$$

que E_1 et E/E_2 (resp. E'_1 et E'/E'_2) soit des objets de D' et que $E_2/E_1 = E'_2/E'_1$. Cela signifie que $e = e'$.

D'après ([11], III, 1, cor. 1), pour toute suite exacte

(4.2.1) $$O \to F \to F_1 \to F_2 \to O$$

de D/D', il existe une suite exacte

(4.2.2) $$O \to F' \to F'_1 \to F'_2 \to O$$

de D telle que la suite exacte déduite de (4.2.2.) par T soit isomorphe à la suite exacte (4.2.1). Cela montre que la fonction $F \rightsquigarrow e$, définie ci-dessus est additive; elle définit donc un homomorphisme t' de $K(D/D')$ dans K. Il est immédiat de vérifier que t' est l'inverse de t.

4.3. — Soit I un ensemble d'indices et soit pour tout $i \in I$, une catégorie abélienne D_i satisfaisant à la condition (1.1.b) et soit $\coprod_{i \in I} D_i$ la somme directe de la famille $(D_i)_{i \in I}$; on rappelle que $\coprod_{i \in I} D_i$ est la sous-catégorie pleine de $\prod_{i \in I} D_i$ qui est formée des objets $(E_i)_{i \in I}$ tels que E_i soit l'objet nul de D_i sauf pour un nombre fini d'indices. Pour tout $i \in I$, il existe un foncteur exact Θ_i de D_i dans $\coprod_{i \in I} D_i$ défini par $\Theta_i(E) = (E_j)_{j \in I}$, où E_j est égal à E si $i = j$, et à O si $i \neq j$ et qui identifie D_i à une sous-catégorie pleine de $\coprod_{i \in I} D_i$. Il existe donc d'après (3.3) un homomorphisme canonique $[\Theta_i] : K(D_i) \to K(\coprod_{i \in I} D_i)$ et donc un homomorphisme canonique de $\coprod_{i \in I} K(D_i)$ dans $K(\coprod_{i \in I} D_i)$.

Proposition 4.4. — L'homomorphisme canonique

(4.4.1) $$\coprod_{i \in I} K(D_i) \to K(\coprod_{i \in I} D_i)$$

est un isomomorphisme.

En effet, soit $E = (E_i)_{i \in I}$ un objet de $\coprod_{i \in I} (D_i)$, puisque E_i est l'objet nul de D_i sauf pour un nombre fini d'indices, $([E_i])_{i \in I}$ est un élément de $\coprod_{i \in I} K(D_i)$ et la fonction de $\coprod_{i \in I} D_i$ dans $\coprod_{i \in I} K(D_i)$ ainsi définie est additive. D'où un homomorphisme de $K(\coprod_{i \in I} D_i)$ dans $\coprod_{i \in I} K(D_i)$ qui est de manière évidente l'inverse de (4.4.1).

4.5. — Soit D une catégorie abélienne satisfaisante à la condition (1.1.b). On suppose de plus que *les objets de D sont de longueur finie*. Soit alors T l'ensemble des types d'objets simples de D et soit, pour tout $t \in T$, E_t un objet simple de D de type t.

Soit maintenant E un objet de D, et soit pour tout $t \in T$, $\Theta_t(E)$ le nombre de quotients de Jordan-Hölder de E de type t. Il résulte des propriétés des suites de Jordan-Hölder que la fonction $\Theta : D \to \mathbf{Z}^{(T)}$, définie par la relation $\Theta(E) = (\Theta\ (E))_{t \in T}$, est une fonction additive; elle définit donc un homomorphisme $[\Theta] : K(D) \to \mathbf{Z}^{(T)}$.

Lemme 4.6. — Sous les hypothèses de (4.5) l'homomorphisme $[\Theta]$ *est un isomorphisme.*

En effet, cet homomorphisme est surjectif puisque Im(K(D)) contient la base canonique de $\mathbf{Z}^{(T)}$.

Cet homomorphisme est injectif : soit en effet $x \in K(D)$ tel que $[\Theta](x) = O$. D'après (1.3) il existe des objets E_1 et E_2 de D tels que $x = [E_1] - [E_2]$; par définition $[\Theta]([E_1]) = [\Theta]([E_2])$ signifie que E_1 et E_2 ont mêmes quotients de Jordan-Hölder; donc, d'après le lemme (2.1), $[E_1] = [E_2]$ et $x = O$.

Proposition 4.7. — Sous les hypothèses et avec les notations de (4.5) K(D) *est un groupe abélien libre de base* $([E_t])_{t \in T}$. *De plus, pour tout objet* E *de D, la composante d'indice* t *de* E *est égale au nombre de quotients de Jordan-Hölder de* E *de type* t.

C'est une conséquence immédiate de (4.6).

Dans ce qui suit on appellera la base $([E_t])_{t \in T}$ *la base canonique de* K(D).

Corollaire 4.8. — Soit D une catégorie abélienne satisfaisant aux conditions de (4.5) et soient E_1 *et* E_2 *des objets de D. Alors* E_1 *et* E_2 *ont même image dans* K(D) *si et seulement si ils ont mêmes quotients de Jordan-Hölder.*

Corollaire 4.9. — Si D′ est la sous-catégorie pleine de D formée des objets semi-simples de D, alors l'homomorphisme canonique de K(D') *dans* K(D) *est un isomorphisme.*

4.10. — Soit C une catégorie abélienne et soit D une sous-catégorie de C satisfaisant aux conditions de (1.1). On suppose de plus que toute suite exacte de D est scindée et que D est stable pour les sommes directes finies.

Soit alors S un ensemble d'objets de D tel que tout objet de D soit isomorphe à un élément de S (cf. 1.1). Soient $E_1, E_2 \in S$ la relation : il existe un élément E_3 de D tel que $E_1 \oplus E_3 \cong E_2 \oplus E_3$ est une relation d'équivalence dans S : soit S′ l'ensemble quotient.

Il est immédiat de vérifier que la somme directe dans D définit dans S′ une opération qui fait de S′ un monoïde commutatif. Soit K′ son symétrisé. L'application canonique de D dans K′ est additive; elle définit donc un homomorphisme canonique de K(D) dans K′.

Proposition 4.11. — Si D est une catégorie satisfaisante aux conditions de (4.10), l'homomorphisme canonique de K(D) *dans* K′ *est un isomorphisme.*

En effet, cet homomorphisme est surjectif puisque Im(K(D)) contient S′.

Cet homomorphisme est injectif : soit, en effet x un élément de $K(D)$ dont l'image dans K' est nulle, et soient E_1 et E_2 des objets de D tels que $x = [E_1] - [E_2]$ (cf. 1.3). Par hypothèse E_1 et E_2 ont même image dans S' et cela signifie qu'il existe un objet E_3 de D tel que $E_1 \oplus E_3 \cong E_2 \oplus E_3$. On a donc $[E_1] = [E_2]$ et donc $x = O$.

Corollaire 4.12. — Soit D une catégorie satisfaisant aux conditions de (4.10) et soient E_1 *et* E_2 *des objets de D. Alors* E_1 *et* E_2 *ont même image dans* $K(D)$ *si et seulement si il existe un objet* E_3 de D *tel que* $E_1 \oplus E_3 \cong E_2 \oplus E_3$.

4.13. — Soit C une catégorie abélienne et soit D une sous-catégorie pleine de C satisfaisant aux conditions de (1.1). On suppose de plus :

a) que toutes les suites exactes de D sont scindées,

b) que D est stable pour les sommes directes finies,

c) que tout objet E de D est une somme directe finie d'objets indécomposables de D et que cette décomposition est unique à un automorphisme de E près.

Soit alors T l'ensemble des types d'objets indécomposables de D et soit F_t, $t \in T$, un objet indécomposable de type t. Soit E un objet de D et soit $E = \coprod_i E_i$ une décomposition de E en somme directe d'objets indécomposables. On désigne alors par $\Theta_t(E)$ le nombre de E_i isomorphes à E_t. D'après *c*) $\Theta_t(E)$ est indépendant de la décomposition choisie et d'après *a*) la fonction Θ de D dans $\mathbf{Z}^{(T)}$ définie par la relation $\Theta(E) = (\Theta_t(E))_{t \in T}$ est additive, elle définit donc un homomorphisme :

(4.13.1) $$K(D) \to \mathbf{Z}^{(T)}.$$

Proposition 4.14. — Avec les hypothèses et les notations de (4.13), $K(D)$ *est un groupe abélien libre de base* $([E_t])_{t \in T}$.

Il suffit, en effet, de démontrer que l'homomorphisme (4.13.1) est un isomorphisme.

Cet homomorphisme est surjectif puisque $\mathrm{Im}(K(D))$ contient la base canonique de $\mathbf{Z}^{(T)}$.

Cet homomorphisme est injectif. En effet, soient x un élément du noyau de (4.13.1); d'après (1.3) $x = [E_1] - [E_2]$, où E_1 et E_2 sont des objets de D, E_1 et E_2 ont même image dans $\mathbf{Z}^{(T)}$ ce qui signifie que E_1 et E_2 sont isomorphes et donc que $[E_1] = [E_2]$ et achève la démonstration. On a en outre démontré :

Corollaire 4.15. — Deux objets E_1 *et* E_2 *de D sont isomorphes si et seulement ils ont même image dans* $K(D)$.

CHAPITRE II

GROUPES DE GROTHENDIECK ASSOCIÉS A DES CATÉGORIES DE MODULES SUR LES PRÉSCHÉMAS

SOMMAIRE

Soit X un préschéma localement noethérien et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre cohérente comme Module sur $\mathcal{O}_X$ et soit $M_{\mathcal{A}}$ la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules cohérents comme $\mathcal{O}_X$-Module. On pose

$$K(M_{\mathcal{A}}) = \mathrm{M}_{\mathcal{A}}$$

Le § 1 définit diverses sous-catégories pleines de $M_{\mathcal{A}}$ en particulier la sous-catégorie $P_{\mathcal{A}}$ formée des $\mathcal{A}$-Modules de $M_{\mathcal{A}}$ dont les localisés en tout point x de X sont des $\mathcal{A}_x$-modules projectifs. (On pose alors $\mathrm{P}_{\mathcal{A}} = K(\boldsymbol{P}_{\mathcal{A}})$. Puis on donne des conditions pour que les groupes de Grothendieck, associés à ces diverses catégories, soient isomorphes.

On définit enfin une application bilinéaire $\Theta_{\mathcal{A}}$ de $\mathrm{P}_{\mathcal{A}} \times \mathrm{M}_{\mathcal{A}}$ dans $\mathrm{M}_{\mathcal{O}_X}$ qui généralise les relations d'orthogonalité des caractères (resp. des caractères modulaires) d'un groupe fini.

Le § 2 traite des morphismes de groupes de Grothendieck associés à des morphismes d'Algèbres.

Le § 3 généralise une suite exacte de Borel-Serre par la méthode des catégories quotients.

Le § 4 considère le cas où $\mathcal{A}$ est une Algèbre de groupe. Soit G un tel groupe, et soit $\mathrm{P}'_{\mathcal{A}}$ le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie pleine $P_{\mathcal{A}}$ de $M_{\mathcal{A}}$ formée des $\mathcal{A}$-Modules qui sont localement libres sur $\mathcal{O}_X$. On montre que l'application diagonale de G définit sur $\mathrm{P}'_{\mathcal{A}}$ une structure d'anneau et que $\mathrm{M}_{\mathcal{A}}$ est un $\mathrm{P}'_{\mathcal{A}}$-Module. On étudie enfin comment les homomorphismes définis au § 2 se comportent vis-à-vis de ces structures

1. DÉFINITIONS

1.1. — Soit X un préschéma localement noethérien ([15], 1.6.1), soit $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural et soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre cohérente ([15], 0, 5.3.7). On désigne par $M_{\mathcal{A}}$ la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules qui sont cohérents comme $\mathcal{O}_X$-Modules.

On note $\mathrm{M}_{\mathcal{A}} = K(M_{\mathcal{A}})$.

On désigne par $P'_{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de $M_{\mathcal{A}}$ formée des $\mathcal{A}$-Modules dont les localisés en tout point x de X sont libres sur $\mathcal{O}_{X,x}$. On pose $\mathrm{P}'_{\mathcal{A}} = K(P'_{\mathcal{A}})$.

On désigne par $H'_{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de $M_{\mathcal{A}}$ formée des objets de $M_{\mathcal{A}}$ dont les localisés en tout point x de X sont de dimension projective finie sur $\mathcal{O}_{X,x}$. On pose $H'_{\mathfrak{A}} = K(H'_{\mathfrak{A}})$.

On désigne par $P_{\mathfrak{A}}$ la sous-catégorie pleine de $M_{\mathfrak{A}}$ formée des $\mathfrak{A}$-Modules dont les localisés en tout point x de X sont des $\mathfrak{A}_x$-Modules projectifs. On pose $P_{\mathfrak{A}} = K(P_{\mathfrak{A}})$.

On désigne enfin par $H_{\mathfrak{A}}$ la sous-catégorie pleine de $M_{\mathfrak{A}}$ définie par les $\mathfrak{A}$-Modules dont les localisés en tout point x de X sont de dimension projective finie sur $\mathfrak{A}_x$. On pose $H_{\mathfrak{A}} = K(H_{\mathfrak{A}})$.

On appelle homomorphisme de Cartan et on note $c_{\mathfrak{A}}$ l'application canonique de $P_{\mathfrak{A}}$ dans $M_{\mathfrak{A}}$. Cette terminologie sera justifiée au chapitre III.

Remarque 1.2. — Soit $\mathcal{E}$ un $\mathfrak{A}$-Module, nous dirons que $\mathcal{E}$ est un $\mathfrak{A}$-Module cohérent (resp. quasi-cohérent) s'il est cohérent (resp. quasi-cohérent) comme $\mathcal{O}_X$-Module.

Il est immédiat de vérifier que cette définition de $\mathfrak{A}$-Module quasi-cohérent coïncide avec celle de ([13], 4.1).

De plus, si X est un préschéma localement noethérien et si $\mathfrak{A}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre cohérente, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{E}$ est un $\mathfrak{A}$-Module cohérent,

b) $\mathcal{E}$ est de présentation finie.

Lemme 1.3. — *La catégorie* $P_{\mathfrak{A}}$ (*resp.* $P'_{\mathfrak{A}}$) *est la sous-catégorie pleine de* $M_{\mathfrak{A}}$ *formée des* $\mathfrak{A}$-*Modules* $\mathcal{E}$ *tels que, pour tout ouvert affine* U *de* X, $\Gamma(\mathcal{E}|U)$ *soit un* $\Gamma(\mathfrak{A}|U)$-*module projectif* (*resp. un* $\Gamma(\mathcal{O}_X|U)$-*module projectif*).

Puisque tout module projectif de type fini sur un anneau local est libre le lemme 1.3. est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 1.4. — *Soit* C *un anneau commutatif noethérien, soit* B *une* C-*algèbre de type fini comme* C-*module et soit* E *un* B-*module de type fini. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) E *est* B-*module projectif,*

b) *Pour tout idéal premier* p *de* C, E_p *est un* B_p -*module projectif.*

En effet, si E est un B-module projectif E_p est un B_p -module projectif. Réciproquement, il est facile de voir que, pour tout idéal premier p de C, pour tout B-module de type fini E et pour tout B-module F

$$C_p \otimes \mathrm{Ext}^1_B(E, F) \simeq \mathrm{Ext}^1_{B_p}(E_p, F_p).$$

Donc, si pour tout idéal premier p, E_p est un B_p -module projectif alors $C_p \otimes \mathrm{Ext}^1_B(E, F) = 0$. Il résulte alors de ([6], II, 4, n° 4) que $\mathrm{Ext}^1_B(E, F) = 0$, pour tout B-module F; cela signifie que E est projectif et achève la démonstration.

Lemme 1.5. — *Soit* X *un préschéma noethérien. S'il existe sur* X *un* $\mathcal{O}_X$-*Module ample* (cf. [15], II, 4.5), *tout objet de* $M_{\mathfrak{A}}$ *est quotient d'un objet de* $P_{\mathfrak{A}}$.

En effet, soit $\mathcal{E}$ un objet de $M_{\mathfrak{A}}$. D'après ([15], II, 4.5.5), il existe un

$\mathcal{O}_X$-Module cohérent localement libre $\mathcal{L}$ et un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme surjectif de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}$. Le $\mathcal{A}$-Module $\mathcal{E}$ est donc un quotient de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$.

Proposition 1.6. — Si X *est un préschéma noethérien et s'il existe sur* X *un faisceau ample, alors* $H_{\mathcal{A}}$ *est la sous-catégorie pleine de* $M_{\mathcal{A}}$ *formée des objets de* $M_{\mathcal{A}}$ *qui admettent une résolution finie par des objets de* $P_{\mathcal{A}}$.

En effet, soit $\mathcal{E}$ un objet de $M_{\mathcal{A}}$ et soit

$$O \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}_O \leftarrow \mathcal{F}_1 \leftarrow \dots\dots \leftarrow \mathcal{F}_n \leftarrow O$$

une résolution de $\mathcal{E}$ par des objets de $P_{\mathcal{A}}$; par définition, pour tout point x de X',

$$O \leftarrow \mathcal{E}_x \leftarrow (\mathcal{F}_o)_x \leftarrow (\mathcal{F}_1)_x \leftarrow \dots\dots \leftarrow (\mathcal{F}_n)_x \leftarrow O$$

est une résolution $\mathcal{A}_x$-projective de $\mathcal{E}_x$; donc $\mathcal{E}_x$ est un objet de $H_{\mathcal{A}}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ un objet de $H_{\mathcal{A}}$. Il existe alors un entier $n_{\mathcal{E}}$ tel que pour tout point x de X on ait $dh_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{E}_x) < n_{\mathcal{E}}$. En effet, pour tout $x \in X$, on peut construire une résolution.

$$O \leftarrow \mathcal{E}_x \leftarrow L_o \leftarrow L_1 \leftarrow \dots\dots \leftarrow L_{n(x)} \leftarrow O$$

de $\mathcal{E}_x$ par des $\mathcal{A}_x$-modules projectifs de type fini. Il résulte alors de ([13], 4.1.3) et de ([15], O, 5.2.7) qu'il existe un voisinage U(x) de x et une résolution

$$O \leftarrow \mathcal{E}|U(x) \leftarrow \mathcal{L}'_o \leftarrow \mathcal{L}'_1 \leftarrow \dots\dots \leftarrow \mathcal{L}'_{n(x)} \leftarrow O$$

de $\mathcal{E}|U(x)$ par des objets de $P_{\mathcal{A}|U(x)}$. Donc, pour tout point y de U(x), $dh_{\mathcal{A}_y}(\mathcal{E}_y) \leqslant n(x)$. L'existence de $n_{\mathcal{E}}$ résulte alors du caractère noethérien de X.

D'après le lemme (1.5) on peut pour tout entier m construire une résolution de $\mathcal{E}$:

$$O \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}_o \leftarrow \mathcal{F}_1 \leftarrow \dots\dots \leftarrow \mathcal{F}_m \leftarrow \mathcal{F} \leftarrow O$$

dans laquelle les $\mathcal{A}$-Modules $\mathcal{F}_i$, $O \leqslant i \leqslant m$, sont des objets de $P_{\mathcal{A}}$. Si $m > n_{\mathcal{E}}$ on a $m > \sup_{x \in X}(dh_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{E}_x))$ alors, d'après ([10], VI, propr. 2.1), pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{A}_x$-module projectif. Cela achève la démonstration de (1.6). On a de plus démontré le résultat suivant :

Lemme 1.7. — Sous les hypothèses de la proposition (1.6), *pour tout objet* $\mathcal{E}$ *de* $H_{\mathcal{A}}$ *il existe un entier* $n_{\mathcal{E}}$ *satisfaisant à la condition suivante : soit*

$$O \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n-1} \to \dots\dots \to \mathcal{E}_o \to \mathcal{E} \to O$$

une suite exacte telle que $\mathcal{E}_i$, $O \leqslant i \leqslant n$, *soit un objet de* $P_{\mathcal{A}}$ *alors* $\mathcal{F}$ *est un objet de* $P_{\mathcal{A}}$ *dès que* $n > n_{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.8. — *Si* X *est un préschéma noethérien et s'il existe sur* X *un* $\mathcal{O}_X$*-Module ample, alors l'application canonique de* $P_{\mathcal{A}}$ *dans* $H_{\mathcal{A}}$ *est un isomorphisme.*

Montrons, en effet que les hypothèses de la proposition (I, 3.4) sont satisfaites. Il est immédiat de démontrer l'hypothèse a) de cette proposition. De même, l'hypothèse b) n'est autre que la conclusion du lemme (1.7). Vérifions l'hypothèse c) : soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ des objets de $H_{\mathcal{A}}$, $u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$

un morphisme et $v : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ un épimorphisme. Soit alors $\mathcal{F}'$ le produit fibré de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}''$ au-dessus de $\mathcal{E}'$, c'est-à-dire le sous-Module de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}''$ formé des éléments (e, e'') pour lesquels $u(e) = v(e'')$. D'après le lemme (1.5) il existe un objet $\mathcal{F}$ de $P_{\mathfrak{A}}$ et un épimorphisme $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, soit alors v' (resp. u') le composé de f et de la première (resp. la seconde) projection de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}''$. Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{E}$, u', v' satisfont aux conditions de (I, 3.4.c).

Proposition 1.9. — Si X *est un préschéma noethérien, s'il existe un* $\mathcal{O}_X$*-Module ample et si* $\mathfrak{A}$ *est localement libre sur* $\mathcal{O}_X$, *alors* $H'_{\mathfrak{A}}$ *est la sous-catégorie pleine de* $M_{\mathfrak{A}}$ *formée des* $\mathfrak{A}$*-Modules qui admettent une résolution finie par des objets de* $P'_{\mathfrak{A}}$.

Soit $\mathcal{E}$ un objet de $H'_{\mathfrak{A}}$. On montre d'abord, comme dans (1.6) qu'il existe un entier $n'(\mathcal{E})$ tel que $dh_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x) \leqslant n'(\mathcal{E})$.

D'après (1.5), $\mathcal{E}$ est quotient, comme $\mathcal{O}_X$-Module, d'un objet $\mathcal{F}'$ de $P'_{\mathcal{O}_X}$;soit $\mathcal{F} = \mathfrak{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}'$, alors $\mathcal{E}$ est quotient de $\mathcal{F}$, comme $\mathfrak{A}$-Module, et $\mathcal{F}$ est un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$. On peut donc construire une résolution

$$0 \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{F}_0 \leftarrow \mathcal{F}_1 \leftarrow \ldots\ldots \leftarrow \mathcal{F}_m \leftarrow \mathcal{L} \leftarrow 0$$

de $\mathcal{E}$, dans laquelle $\mathcal{F}_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$, est un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$, Si $m > n'(\mathcal{E})$, d'après ([10], VI, prop. 2.1) $\mathcal{L}$ est aussi un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$. Cela achève la démonstration.

Corollaire 1.10. — Sous les hypothèses de la proposition (1.9) l'homomorphisme canonique $P'_{\mathfrak{A}} \to H'_{\mathfrak{A}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration analogue à celle de (1.8).

Proposition 1.11. — Si en plus des hypothèses de (1.9), pour tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ *est un anneau régulier, l'homomorphisme canonique de* $P'_{\mathfrak{A}}$ *(resp.* $H'_{\mathfrak{A}}$ *) dans* $M_{\mathfrak{A}}$ *est un isomorphisme.*

En effet, d'après (1.10), il suffit de montrer que l'homomorphisme canonique de $H'_{\mathfrak{A}}$ dans $M_{\mathfrak{A}}$ est un isomorphisme. Soit $\mathcal{E}$ un objet de $M_{\mathfrak{A}}$ et soit x un point de X; puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, $\mathcal{E}_x$ est de dimension homologique finie. Donc $\mathcal{E}$ est aussi un objet de $H'_{\mathfrak{A}}$ et cela montre que $H'_{\mathfrak{A}}$ est égale à $M_{\mathfrak{A}}$ et achève la démonstration.

Proposition 1.12. — Soit X *un préschéma localement noethérien et soit* $\mathfrak{A}$ *une* $\mathcal{O}_X$*-Algrèbre cohérente. Il existe alors une application bilinéaire* $\Theta_{\mathfrak{A}}$ *de* $P_{\mathfrak{A}} \times M_{\mathfrak{A}}$ *dans* $M_{\mathcal{O}_X}$ *telle que* $\Theta_{\mathfrak{A}}([\mathcal{E}][\mathcal{F}]) = [Hom_{\mathfrak{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})]$, *pour tout objet* $\mathcal{E}$ *(resp.* $\mathcal{F}$*) de* $P_{\mathfrak{A}}$ *(resp.* $M_{\mathfrak{A}}$*).*

En effet, le foncteur, $Hom_{\mathfrak{A}}$ de $P_{\mathfrak{A}} \times M_{\mathfrak{A}}$ dans $M_{\mathcal{O}_X}$ est exact en chacun de ses arguments; la proposition en résulte aussitôt.

§ 2. — Caractère fonctoriel.

2.1. — Soient X (resp. Y) un préschéma localement noethérien, $\mathfrak{A}$ (resp.

$\mathcal{B}$) une $\mathcal{O}_X$-Algèbre (resp. $\mathcal{O}_Y$-Algèbre) cohérente et soit $f = (\varphi, \psi)$ un morphisme de préschémas de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$; soit enfin $\xi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, un morphisme compatible avec les structures d'algèbre de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ et $h = (\varphi, \xi)$ le morphisme d'espaces annelés $(X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ associé.

On rappelle que la donnée de ξ est équivalente à la donnée d'un morphisme de $f^*(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{B}$ dans $f(\mathcal{A})$).

2.2. — On considère tout le foncteur

(2.2.1) $$\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{A} \otimes_{f(\mathcal{B})} f^*(\mathcal{E}) = h^*(\mathcal{E})$$

Ce foncteur est un foncteur exact de $P_{\mathcal{B}}$ dans $P_{\mathcal{A}}$, on note alors $h^!_P$ l'homomorphisme de $P_{\mathcal{B}}$ dans $P_{\mathcal{A}}$ associé à ce foncteur.

Si $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$, alors $h^*(\mathcal{E}) = f^*(\mathcal{E})$ et le foncteur

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow f^*(\mathcal{E})$$

est un foncteur exact de $P_{\mathcal{B}}$ dans $P_{\mathcal{A}}$ (resp. de $P'_{\mathcal{B}}$ dans $P'_{\mathcal{A}}$); on note $f^!_P$ (resp. $f^!_{P'}$) l'homomorphisme associé à ce foncteur.

Proposition 2.3. — Si Y est un préschéma noethérien, si $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$ *et si tous les anneaux locaux de* $\mathcal{O}_Y$ *sont réguliers, il existe un homomorphisme* $f^!_M : M_{\mathcal{B}} \to M_{\mathcal{A}}$ *défini par la relation suivante : pour tout objet* $\mathcal{E}$ *de* $M_{\mathcal{B}}$,

$$f^!_M([\mathcal{E}]) = \sum_i (-1)^i [\,Tor_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E})].$$

Soit, en effet F_i le foncteur $\mathcal{E} \rightsquigarrow Tor_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{E})$. Le foncteur $F = (F_i)$ est un foncteur homologique et $F_i(\mathcal{E}) = O$ sauf pour un nombre fini d'entre eux. La proposition résulte alors de (I, 3.6).

Remarque 2.4. — Supposons vérifiées les hypothèses de (2.3) et désignons par $c'_{\mathcal{B}}$ l'homomorphisme canonique de $P'_{\mathcal{B}}$ dans $M_{\mathcal{B}}$; on a alors $f^!_M \circ c'_{\mathcal{B}} = f^!_{P'}$.

En effet, soit $\mathcal{E}$ un objet de $P'_{\mathcal{B}}$. Alors $F_i(\mathcal{E}) = O$ si $i \geqslant 1$, donc $f^!_M \circ c'_{\mathcal{B}}([\mathcal{E}]) = [f^*(\mathcal{E})] = f^!_P([\mathcal{E}])$.

2.5. — On considère maintenant le foncteur

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow f_*(\mathcal{E})$$

de la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules dans la catégorie des $\mathcal{B}$-Modules. On suppose que Y est un préschéma noethérien et que f est propre; il résulte de ([15], III, 1.4.12) que pour tout objet $\mathcal{E}$ de $M_{\mathcal{A}}$ et tout $i > O$, $R^i f_*(\mathcal{E})$ est un objet de $M_{\mathcal{B}}$. D'après ([15], III, 3.2.1) les $R^i f_*(\mathcal{E})$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. D'après (I, 3.6), il existe un homomorphisme, noté encore $h_!$ et tel que

$$h_!([\mathcal{E}]) = \sum_i (-1)^i [R^i f_*(\mathcal{E})].$$

2.6. — Soit maintenant $(V, \mathcal{O}_V)$ un préschéma localement noethérien, soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{O}_V$-Algèbre cohérente, soit $g = (\varphi', \psi')$ un morphisme de préschémas de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dans $(V, \mathcal{O}_V)$ et soient $\xi' = \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'Algèbres et $k = (\varphi', \xi')$ le morphisme d'espaces annelés associé.

D'après le lemme (I, 3.2), on a $h^!_P \circ k^!_P = (k \circ h)^!_P$.

Si $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B} = g^*(\mathcal{C})$ on a de même

$$f^!_P \circ g^!_P = (g \circ f)^!_P \text{ et } f^!_{P'} \circ g^!_{P'} = (g \circ f)^!_{P'}.$$

Si Y et $\mathcal{A}$ (resp. V et $\mathcal{B}$) satisfont aux conditions de la proposition (2.3) on montre à l'aide du lemme (I, 3.7) que $f^!_M \circ g^!_M = (g \circ f)^!_M$.

On montre de même que si Y et f (resp. V et g) satisfont aux conditions de (2.5) on a $g! \circ f! = (g \circ f)!$.

§ 3. — QUELQUES SUITES EXACTES.

3.1. — Soit C une catégorie abélienne localement noethérienne (cf. [11], II, 3) et soit D une sous-catégorie épaisse de C (cf. I, 3.5). Soit C' (resp. D') la sous-catégorie épaisse de C (resp. D) formée des objets noethériens de C (resp. D).

Soient E et F des objets de C'/D', E et F sont aussi des objets de C' (cf. I, 4.1). D'autre part,

$$\mathrm{Hom}_{C'/D'}(E, F) = \varinjlim_{E', F'} \mathrm{Hom}_{C'}(E', F/F')$$

où E′ et F′ sont des sous-objets de E et de F tels que E/E′ et F′ soient des objets de D'. Mais, puisque E et F sont noethériens, tout sous-objets de F dans C est aussi un sous-objet de F dans C' et tout quotient de E dans C est aussi un quotient dans C'. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{C'/D'}(E, F) = \varinjlim_{E', F'} \mathrm{Hom}_C(E', F/F') = \varinjlim_{E', F'} \mathrm{Hom}_{C'}(E', F/F') = \mathrm{Hom}_{C/D}(E, F).$$

On a donc démontré le lemme suivant :

Lemme 3.2. — Sous les hypothèses et avec les notations de (3.1) C'/D' est équivalente à la sous catégorie pleine de C/D définie par les objets de C'.

Corollaire 3.3. — Si en plus des hypothèses de (3.1), il existe, pour tout objet noethérien E *de C/D, un objet* F *de C' tel que* E *et* F *soient isomorphes dans C/D, alors C'/D' est équivalente à la sous-catégorie épaisse C/D définie par les objets noethériens de C/D.*

Proposition 3.4. — Soit X *un préschéma localement noethérien, soient* U *un ouvert de* X *et* F *le complémentaire de* U *dans* X *et soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$-Algèbre cohérente. Alors, la catégorie $M_{\mathcal{A}|U}$ est équivalente à la catégorie quotient de $M_{\mathcal{A}}$ par la sous-catégorie épaisse de $M_{\mathcal{A}}$ formée des $\mathcal{A}$-Modules dont le support est contenu dans* F.

Soit j l'injection canonique de U dans X et soit T le foncteur $\mathcal{E} \rightsquigarrow j^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E}|U$, de la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathcal{A}|U$-Modules quasi cohérents.

Soit maintenant $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{A}|U$-Module quasi-cohérent, d'après ([15], I, 9.2.2.a) $j_*(E')$ est un $\mathcal{A}$-Module quasi-cohérent. Soit alors S le foncteur $\mathcal{E}' \rightsquigarrow j_*(\mathcal{E}')$ de la catégorie des $\mathcal{A}|U$-Modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules quasi-cohérents.

Le foncteur T est exact et ker(T) est formé des $\mathcal{A}$-Modules dont la restriction à U est égale à O (cf. [11], III prop. 5). D'autre part S est un foncteur adjoint à T et $T \circ S$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des $\mathcal{A}|U$-Modules quasi-cohérents. Il résulte alors de ([11], III, prop. 5) que la catégorie des $\mathcal{A}|U$-Modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie quotient de la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules quasi-cohérents par la sous-catégorie épaisse formée des $\mathcal{A}$-Modules dont le support est contenu dans F.

Soit maintenant $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{A}|U$-Module cohérent et soit $\mathcal{F}' = j_*(\mathcal{E}')$. D'après ([15], 1, 9.4.7) il existe un sous $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$ tel que $\mathcal{G}'|U = \mathcal{E}'$. Soit $\mathcal{G}$ le sous-$\mathcal{A}$-Module de $\mathcal{F}'$ engendré par $\mathcal{G}'$. Le $\mathcal{A}$-Module $\mathcal{G}$ est cohérent et $\mathcal{G}|U = \mathcal{E}'$. Les hypothèses du corollaire (3.3.) sont satisfaites et cela achève la démonstration.

3.5. — Soit, comme ci-dessus, X un préschéma localement noethérien, soit U un ouvert de X et soit F le complémentaire de U dans X. On désigne par $M_{\mathcal{A}}(F)$ le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie épaisse $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ définie par les $\mathcal{A}$-Modules dont le support est contenu dans F.

Proposition 3.6. — Soit X *un préschéma localement noethérien,* U *un ouvert de* X *et* F *le complémentaire de* U *dans* X *et* j *l'immersion canonique de* U *dans* X. *On a alors la suite exacte :*

$$(3.6.1) \qquad M_{\mathcal{A}}(F) \to M_{\mathcal{A}} \xrightarrow{j^!} M_{\mathcal{A}|U} \to O.$$

La proposition résulte immédiatement de (3.4) et de la suite exacte (I, 4.1.2) associée aux catégories quotient.

3.7. — Soit $\mathcal{J}$ un idéal de définition de F, soit $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_X / \mathcal{J}$ et soit i l'immersion canonique de $(F, \mathcal{O}_F)$ dans $(X, \mathcal{O}_X)$; d'après ([15], O_I, 5.3.11), $i^*(\mathcal{A})$ est une $\mathcal{O}_F$-Algèbre cohérente. D'autre part, pour tout $i^*(\mathcal{A})$-Module cohérent $\mathcal{E}'$, le $\mathcal{A}$-Module $i_*(\mathcal{E}')$ est cohérent; de plus le foncteur $\mathcal{E}' \rightsquigarrow i_*(\mathcal{E}')$ est exact, il définit donc un homomorphisme

$$i_! : M_{i^*(\mathcal{A})} \to M_{\mathcal{A}} \quad .$$

Proposition 3.8. — Soient X *un préschéma noethérien,* F *un sous-préschéma et* i *l'immersion canonique de* F *dans* X, *et soient* U *le complémentaire de* F *dans* X *et* j *l'immersion canonique de* U *dans* X. *On a alors la suite exacte*

$$(3.8.1) \qquad M_{i^*(\mathcal{A})} \to M_{\mathcal{A}} \to M_{\mathcal{A}|U} \to O.$$

En effet, soit $\mathcal{E}'$ un $i^*(\mathcal{A})$-Module cohérent; $i_*(\mathcal{E}')$ est un $\mathcal{A}$-Module cohérent et son support est contenu dans F, d'où un foncteur exact de $\mathcal{M}_{i^*(\mathcal{A})}$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(F)$ et un homomorphisme $i'_! : M_{i^*(\mathcal{A})} \to M_{\mathcal{A}}(F)$. Il est immédiat de vérifier que $i_!$ est le composé de $i'_!$ et de l'homomorphisme canonique de $M_{\mathfrak{A}}(F)$ dans $M_{\mathfrak{A}}$. Compte tenu de la suite exacte (3.6.1) il suffit pour démontrer la proposition de montrer que $i'_!$ est une surjection.

Soit alors $\mathcal{E}$ un objet de $M_{\mathfrak{A}}(F)$. Puisque X est un noethérien et que $\mathcal{E}$ est noethérien, il existe un entier n tel que $\mathcal{J}^n.\mathcal{E} = O$, d'où une filtration

$$O = \mathcal{J}^n.\mathcal{E} \subset \mathcal{J}^{n-1}.\mathcal{E} \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{J}.\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$$

de $\mathcal{E}$. On a donc d'après I, 2.2),

$$[\mathcal{E}] = \sum_{i=O}^{n-1} [\mathcal{J}^i.\mathcal{E} / \mathcal{J}^{i+1}.\mathcal{E}] \text{ dans } M_{\mathfrak{A}}(F).$$

Puisque pour tout A-Module E″ annulé par I, $i_*i^*(\mathcal{E}'')$ est isomorphe à E″, $i'_!$ est donc surjectif. Cela achève la démonstration.

3.9. — Soit maintenant X un préschéma localement noethérien intègre, soit x le point générique de X et soit $M_{\mathfrak{A}}(T)$ la sous-catégorie épaisse de $M_{\mathfrak{A}}$ formé des objets de $M_{\mathfrak{A}}$ qui sont des $\mathcal{O}_X$-Modules de torsion ([15], I, 7.4).

Proposition 3.10. — La catégorie des $\mathfrak{A}_x$-modules de type fini est équivalente à la catégorie quotient de $M_{\mathfrak{A}}$ par $M_{\mathfrak{A}}(T)$ et on a la suite exacte :

(3.10.1) $$M_{\mathfrak{A}}(T) \to M_{\mathfrak{A}} \to M_{\mathfrak{A}_x} \to O.$$

Démonstration analogue à celle des propositions (3.4) et (3.6).

§ 4. — Algèbres de groupes.

4.1. — Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma localement noethérien, soit G un groupe fini et soit $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_X[G]$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des $\mathfrak{A}$-Modules; on définit sur $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$ une structure de $\mathfrak{A}$-Module en posant $g.(e \otimes e') = g.e \otimes g.e'$, pour tout $g \in G$, tout $e \in E$ et tout $e' \in \mathcal{E}'$.

Soit alors $\mathcal{E}$ un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$ et $\mathcal{E}'$ un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$ (resp. $M_{\mathfrak{A}}$), alors $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'$ est un objet de $P'_{\mathfrak{A}}$ (resp. $M_{\mathfrak{A}}$). Soit $\Delta : P_{\mathfrak{A}} \times P'_{\mathfrak{A}} \to P'_{\mathfrak{A}}$ (resp. $\Delta' : P'_{\mathfrak{A}} \times M_{\mathfrak{A}} \to M_{\mathfrak{A}}$) le foncteur

$$(\mathcal{E}, \mathcal{E}') \rightsquigarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}';$$

comme ce foncteur est exact en chacun de ses arguments on en déduit un homomorphisme

$$[\Delta] : P'_{\mathfrak{A}} \otimes P'_{\mathfrak{A}} \to P'_{\mathfrak{A}}$$

(resp. $[\Delta'] : P'_{\mathfrak{A}} \otimes M_{\mathfrak{A}} \to M_{\mathfrak{A}}$).

Proposition 4.2. — Soit X un préschéma localement noethérien, soit G un groupe fini et $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_X[G]$. Alors $[\Delta]$ définit sur $P'_{\mathfrak{A}}$ une structure d'anneau commutatif unitaire.

La démonstration de cette proposition est immédiate. Remarquons que l'unité de l'anneau $P'_{\mathfrak{A}}$ est l'image canonique dans $P'_{\mathfrak{A}}$ du Module $\mathcal{O}_X$ sur G opère trivalement.

Proposition 4.3. — Sous les hypothèses de (4.2) [Δ'] *définit sur* $M_{\mathfrak{A}}$ *une structure de* $P'_{\mathfrak{A}}$*-Module unitaire.*

4.4. — En plus des hypothèses de (4.1) on suppose qu'il existe sur X un $\mathcal{O}_X$-Module ample et que tous les anneaux locaux de $\mathcal{O}_X$ sont réguliers. Il résulte alors de (1.11) que $P'_{\mathfrak{A}}$ et $M_{\mathfrak{A}}$ sont canoniquement isomorphes. Cet isomorphisme définit donc sur $M_{\mathfrak{A}}$ la structure d'anneau suivante :

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des objets de $M_{\mathfrak{A}}$ et soit

$$O \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}_o \leftarrow \mathcal{E}_1 \leftarrow \dots\dots \leftarrow \mathcal{E}_n \leftarrow O$$

une résolution finie de $\mathcal{E}$ par des éléments de $P'_{\mathfrak{A}}$ (cf. (1.9)). On a alors :

$$[\mathcal{E}] = \sum_{i=O}^{n} (-1)^i [\mathcal{E}_i] \quad \text{et} \quad [\mathcal{E}].[\mathcal{E}'] = \sum_{i=O}^{n} (-1)^i [\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}']$$

En calculant $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ à l'aide de la résolution ci-dessus et en appliquant le lemme (I, 2 2), on voit que

(4.4.1) $$[\mathcal{E}] \cdot [\mathcal{E}'] = \sum_i (-1)^i [\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}\ \mathcal{E}')]$$

4.5. — Soit X (resp. Y) un préschéma localement noethérien, soit f = (φ, ψ) un morphisme de préschéma de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$, soit G (resp. H) un groupe fini et soit σ un homomorphisme de H dans G; on pose $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_X[G]$ (resp. $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_Y[H]$). Soit alors ξ l'homomorphisme d'Algèbre de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ associé de manière évidente à f et à σ et soit $h = (\varphi, \xi)$.

Proposition 4.6. — Si $\sigma : H \to G$ *est un isomorphisme, l'homomorphisme* $f^{!}_{P'}$ *défini en* (2.2) *est un homomorphisme d'algèbres. Si de plus* X *est noethérien et* f *propre on a, pour tout* $x \in M_{\mathfrak{A}}$ *(resp.* $y \in P'_{\mathfrak{B}}$*)*

(4.6.1) $$h_!(f'_{P'}(y) \cdot x) = y \cdot h_!(x).$$

La première partie de la démonstration est immédiate. Pour démontrer la seconde partie, il suffit (cf. [4], 6.d) de prouver que pour tout objet $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) de $M_{\mathfrak{A}}$ (resp. $P'_{\mathfrak{B}}$) on a un isomorphisme de $\mathfrak{B}$-Modules

(4.6.2) $$R^p f_*(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{F} = R^p f_*(\mathcal{E} \otimes f^*(\mathcal{F})).$$

D'après ([15], 0_{III}, 12.2.3), il existe un $\mathcal{O}_Y$-isomorphisme du premier membre de (4.6.2) sur le second. Cet isomorphisme étant fonctoriel, on en déduit que c'est aussi un $\mathfrak{B}$-isomorphisme.

4.7. — Supposons maintenant que f soit un isomorphisme et que σ soit une injection. Alors le foncteur $\mathcal{E} \rightsquigarrow h^*(\mathcal{E})$ de $P'_{\mathfrak{B}}$ dans $P'_{\mathfrak{A}}$ (resp. $P_{\mathfrak{B}}$

dans $\Gamma_{\mathcal{A}}$) est exact, il définit donc (cf. 2.1) un homomorphisme $h^{!}_{P'}$ (resp $h^{!}_{P}$) de $P'_{\mathcal{B}}$ dans $P'_{\mathcal{A}}$ (resp. $P_{\mathcal{B}}$ dans $P_{\mathcal{A}}$). De même le foncteur $\mathcal{E} \rightsquigarrow f_{*}(\mathcal{E})$ est un foncteur exact de $M_{\mathcal{A}}$ dans $M_{\mathcal{B}}$, il définit donc un homomorphisme $h_{!}$ (cf. 2.5) de $M_{\mathcal{A}}$ dans $M_{\mathcal{B}}$.

Proposition 4.8. — Sous les hypothèses de (4.7) $h_{!}$ *est un homomorphisme d'algèbres. De plus, pour tout* $x \in P'_{\mathcal{A}}$ (resp. $P_{\mathcal{A}}$) *et tout* $y \in M_{\mathcal{A}}$, *on a*

(4.8. 1) $$h^{!}_{P'}(x . h_{!}(y)) = h^{!}_{P'}(x) . y \ .$$

(4.8.2) $$(\textit{resp.}\ h^{!}_{P}(x . h_{!}(y)) = h^{!}_{P}(x) . y\ ) .$$

La démonstration étant essentiellement celle de ([20], prop. 1.2) nous ne la reproduirons pas.

Proposition 4.8. — Soit X *un préschéma localement noethérien, soit* G *un groupe fini et soit* $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{X}[G]$; *alors* $P'_{\mathcal{A}}$ *est une* $P_{\mathcal{O}_X}$ *-algébre augmentée.*

En effet, soit E (resp. E′) un objet de $P_{\mathcal{O}_X}$ (resp. $P'_{\mathcal{A}}$); alors

$$[E] . [E'] = [\mathcal{E}] \otimes_{\mathcal{O}_X} [\mathcal{E}']$$

L'augmentation est définie par l'homomorphisme h ! (cf. 4.8) associé à l'injection de l'élément neutre $\{e\}$ de G.

CHAPITRE III

EXEMPLES DIVERS

SOMMAIRE

Ce chapitre est un cas particulier du chapitre II, on suppose que X est affine.

Le § 1 donne d'abord un dictionnaire permettant de passer du langage du chapitre II à celui des catégories de modules sur des algèbres. Soit donc R un anneau commutatif noethérien et A une algèbre de type fini comme module sur R, on considère la catégorie $\mathcal{M}_A$ des modules de type fini sur A (on pose $M_A = K(\mathcal{M}_A)$) puis diverses sous-catégories pleines de $\mathcal{M}_A$ en particulier la sous-catégorie $\mathcal{P}_A$ des modules projectifs de type fini (on pose $P_A = K(\mathcal{P}_A)$) et on transcrit les résultats du chapitre II.

Le § 2 traite le cas artinien. On y détermine M_A, puis après un rappel de la théorie des enveloppes projectives, P_A ; on en déduit des propriétés des A-modules projectifs et on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux objets de $\mathcal{M}_A$ (resp. $\mathcal{P}_A$) aient même image dans M_A (resp. P_A). On montre en particulier que M_A (resp. P_A) est un groupe abélien libre et qu'il possède une base canonique indexée par l'ensemble S des types de modules simples sur A et que la matrice de l'application canonique de P_A dans M_A par rapport à ces bases n'est autre que la matrice de Cartan de A.

Puis on suppose que A est une algèbre sur un corps K, on étudie alors les homomorphismes de groupes de Grothendieck associés aux extensions de K. Soit L une telle extension, cette étude est alors essentiellement celle des modules sur $L \otimes_K A$ qui « proviennent » de modules semi-simples sur A (voir (2.2.13)). Le lemme (2.2.7) permet de se ramener au cas où A est une algèbre simple.

Enfin on fait quelques rappels sur les algèbres de groupes finis sur un corps de caractéristique nulle, on redémontre en particulier un théorème de Witt.

Le § 3 donne quelques propriétés du groupe P_A lorsque A est une algèbre finie sur un anneau local noethérien R. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R, soit $\bar{R}$ le corps des restes de R et soit $\bar{A} = \bar{R} \otimes_R A$. On compare P_A et $P_{\bar{A}}$, on montre en particulier que si R est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique P_A et $P_{\bar{A}}$ sont canoniquement isomorphes.

Dans le § 4 on suppose que R est un anneau noethérien intègre de dimension 1. Nous ne donnons que quelques propriétés des groupes P_A et M_A pour l'étude desquels il convient de se rapporter aux travaux de H. BASS ([2], [3]), D. S. RIM ([16]) et R. SWAN ([20], [21]). Lorsque $A = \mathbf{Z}[G]$, nous donnons quelques propriétés de l'homomorphisme de Cartan $c_{\mathbf{Z}[G]}$.

§ 1. — Généralités sur les groupes de Grothendieck associés a des catégories de modules sur des algèbres.

1.1. — Nous allons transcrire les résultats du chapitre II lorsque X est un schéma affine noethérien. La donnée de X est alors équivalente à celle d'un anneau commutatif noethérien R et la donnée de $\mathfrak{A}$ à celle d'une R-algèbre A, de type fini comme R-module.

On désigne par $\mathcal{M}_A$ la catégorie des A-modules de type fini et on pose $M_A = K(\mathcal{M}_A)$.

On désigne par $\mathcal{P}_A$ la catégorie des A-modules projectifs de type fini et on pose $P_A = K(\mathcal{P}_A)$.

On désigne par $\mathcal{H}_A$ la catégorie des A-modules de type fini et de dimension projective finie. On pose $H_A = K(\mathcal{H}_A)$.

On désigne par $\mathcal{P}'_A$ (resp. $\mathcal{H}'_A$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_A$ formée des A-modules qui sont projectifs (resp. de dimension projective finie) pour la structure de R-module sous-jacente. On pose $P'_A = K(\mathcal{P}'_A)$ et $H'_A = K(\mathcal{H}'_A)$.

Soit Φ le foncteur canonique de la catégorie des A-modules dans la catégorie des $\mathfrak{A}$-Modules. Le foncteur Φ définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$. On identifie M_A et $M_{\mathfrak{A}}$ à l'aide de l'isomorphisme $[\Phi]$ associé à Φ (I. 3.2).

D'après le lemme (1.3) le foncteur Φ définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{P}_A$ (resp. $\mathcal{P}'_A$) et $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$ (resp. $\mathcal{P}'_{\mathfrak{A}}$). On identifie à l'aide de $[\Phi]$ les groupes de Grotendieck associés à ces catégories.

D'après la proposition (II, 1.6), le foncteur Φ définit une équivalence de catégorie entre $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}$. On identifie à l'aide de $[\Phi]$ les groupes H_A et $H_{\mathfrak{A}}$.

Proposition 1.2. — L'homomorphisme canonique $P_A \to H_A$ *est un isomorphisme.*

C'est la transcription de la proposition (II, 1.8).

1.3. — On suppose maintenant que A est un R-module projectif.

Les hypothèses de la proposition (II, 1.9) sont satisfaites. Il résulte alors de cette proposition que Φ définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{H}'_A$ et $\mathcal{H}'_{\mathfrak{A}}$. Comme plus haut on identifie à l'aide de $[\Phi]$ les groupes H'_A et $H'_{\mathfrak{A}}$. La transcription de (1.10), (1.11) et (1.12) donne alors :

Proposition 1.4. — Si A *est un R-module projectif, l'homomorphisme canonique* $P'_A \to H'_A$ *est un isomorphisme.*

Proposition 1.5. — Si R *est un anneau régulier et si* A *est un* R-*module projectif, l'homomorphisme canonique de* P'_A *dans* M_A *est un isomorphisme.*

Proposition 1.5. — Soit R *un anneau commutatif noethérien et soit* A *une* R-*algèbre qui est de type fini comme* R-*module. Il existe alors une* *application bilinéaire* θ_A *de* $P_A \times M_A$ *dans* M_R *telle que* $\theta_A([E],[F]) = [\mathrm{Hom}_A(E,F)]$, *pour tout objet* E *(resp.* F*) de* $\mathcal{P}_A$*(resp.* $\mathcal{M}_A$*).*

1.6. — Soit maintenant R (resp. S) un anneau commutatif noethérien et $u : R \to S$, un homomorphisme d'anneaux, soit A (resp. B) une R-algèbre qui est un R-module (resp. S-module) de type fini et soit $v : A \to B$ un u-homomorphisme d'algèbres.

Soit E (resp. F) un A-module (resp. B-module).

Compte tenu des identifications précédentes, l'homomorphisme $v_!$ de (II, 2.5) est associé au foncteur

$$F \rightsquigarrow F_{[v]}$$

Il n'est défini que si $B_{[v]}$ est un A-module de type fini.

De même le foncteur

$$E \rightsquigarrow B \otimes_A F$$

permet de définir les homomorphismes suivants :

$v^!_P : P_A \to P_B$ tel que $v^!_P([E]) = [B \otimes_A E']$, pour tout A-module projectif E′.

$v^!_M : M_A \to M_B$, lorsque $B_{[v]}$ est un A-module plat. On a alors $v^!_M([E]) = [B \otimes_A E]$.

$u^!_{P'} : P'_A \to P'_B$, lorsque $B = S \otimes_R A$.

Lorsque $B = S \otimes_R A$, on écrira $u^!_P$ (resp. $u^!_M$) au lieu de $v^!_P$ (resp. $v^!_M$).

Proposition 1.7. — On suppose que R *est un anneau régulier, que* $B = S \otimes_R A$ *et que* A *est un* R*-module projectif. Il existe alors un homomorphisme* $u^!_M : M_A \to M_B$ *tel que*

(1.7.1) $$u^!_M([E]) = \sum (-1)^i [\mathrm{Tor}^R_i(S,E)],$$

pour tout A-module de type fini E.

C'est la transcription dans le cas affine de (II, 2.3).

2.8. — Soit maintenant R un anneau intègre, soit K le corps des fractions de R et soit j l'injection canonique de R dans K. Soit A une R-algèbre de type fini comme R-module et soit $B = S \otimes_R A$. Nous désignerons alors par $\mathcal{M}_A(T)$ la sous-catégorie épaisse de $\mathcal{M}_A$ définie par les objets de $\mathcal{M}_A$ qui sont des R-modules de torsion et soit $M_A(T) = K(\mathcal{M}_A(T))$.

Proposition 1.9. — Sous les hypothèses et avec les notations de (1.8), on a la suite exacte

(1.9.1) $$M_A(T) \to M_A \to M_B \to 0.$$

La proposition résulte immédiatement de (II, 3.10).

§ 2. — GROUPES DE GROTHENDIECK ASSOCIÉS A DES CATÉGORIES DE MODULES SUR LES ANNEAUX ARTINIENS

2.1. — *Généralité.*

2.1.1. — Soit A un anneau artinien, soit S l'ensemble des types de A-modules simples et soit, pour tous $s \in S$, E_s un A-module simple de type s.

On désigne par $\mathcal{M}_A$ la catégorie des A-modules de type fini et on pose $K(\mathcal{M}_A) = M_A$.

Proposition 2.1.2. — Si A *est un anneau artinien, alors* M_A *est un groupe abélien libre de base* $([E_s])_{s \in S}$.

En effet, d'après ([5], § 2. prop. 3), tout objet $\mathcal{M}_A$ est de longueur finie. La proposition résulte de (I, 4.7).

Corollaire 2.1.3. — Soient E *et* E′ *des A-modules de type fini; pour que* E *et* E′ *aient même image dans* M_A *il faut et il suffit qu'ils aient mêmes quotients de Jordan-Hölder.* .

C'est une conséquence immédiate de (I, 4.8).

2.1.4. — Soit A un anneau artinien et soit r(A) le radical de A. Soient $B = A/r(A)$ et u l'homomorphisme canonique de A sur B; soit alors F un B-module u définit sur F une structure de A-module, on désigne alors par $F_{[u]}$ le module F muni de cette structure. Soit enfin $u_!$ l'homomorphisme associé au foncteur $F \rightsquigarrow F_{[u]}$.

Lemme 2.1.5. — L'homomorphisme $u_! : M_B \to M_A$ *est un isomorphisme.*

En effet cet homomorphisme est trivialement surjectif. Montrons qu'il est injectif : soit $x \in M_B$ et soit F et F′ des objets de $\mathcal{M}_B$ tels que $x = [F] - [F']$ (I, 1.3). Si $u_!(x) = 0$, on a $[F_{[u]}] = [F'_{[u]}]$. D'après (2.1.3), $F_{[u]}$ et $F'_{[u]}$ ont mêmes quotients de Jordan-Hölder; puisque ces modules sont annulés par r(A) ils sont semi-simples et donc isomorphes. Cela montre que $x = 0$ et donc que $u_!$ est interjectif.

2.1.6. — Avant d'aborder l'étude du groupe P_A associé à la catégorie $\mathcal{P}_A$ des A-modules projectifs de type fini, nous allons donner quelques définitions et énoncer quelques théorèmes relatifs aux catégories avec enveloppes projectives (cf. [18] 3.2 et [11]).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et soit $f : E \to F$ un épimorphisme de $\mathcal{C}$. On dit que f est essentiel si tout sous-objet de E tel que $f(E') = F$ est égal à E.

Proposition 2.1.7. — Deux suites exactes de $\mathcal{C}$

$$E \xrightarrow{f} F \to 0 \qquad\qquad E' \xrightarrow{f'} F \to 0$$

où f *et* f′ *sont essentiels et où* E *et* E′ *sont projectifs, sont isomorphes.*

Le couple (E,f) de la proposition (2.1.7.) est appelé l'enveloppe projective de F.

On dit que C est une catégorie ave cenveloppes projectives si tout objet de C possède une enveloppe projective dans C.

Proposition 2.1.8. — Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *La catégorie C est une catégorie avec enveloppes projectives.*

b) *Tout objet de C est quotient d'un objet projectif et pour tout épimorphisme* $f : E \to F$ *de C il existe un sous-objet* E' *de* E *minimal pour l'égalité* $f(E') = F$.

Corollaire 2.9. — Soit C une catégorie abélienne avec enveloppes projectives, soit E *un objet projectif de C et soit* $f : E \to F$ *un épimorphisme de C. Alors* $E = E' \oplus E''$, *où* E' *et* E'' *sont des sous-objets de* E *et où* E' *est minimal parmi les sous-objets de* E *tels que* $f(E') = E$. *De plus le couple* $(E', f/E')$ *est une enveloppe projective de* F.

Proposition 2.1.10. — Soit C une catégorie avec enveloppes projectives et soit $f : E \to F$ *un épimorphisme de C. Si* f *est essentiel* E *est un quotient de l'enveloppe projective de F.*

Proposition 2.1.11. — Soit C une catégorie avec enveloppes projectives, soit E *un objet projectif de C et soit* $f : E \to F$ *un épimorphisme. Il existe alors un épimorphisme de* E *sur l'enveloppe projective de* F.

On dit qu'un objet projectif de C est indécomposable s'il n'est pas somme directe de deux sous-objets propres.

Proposition 2.1.12. — Soit C une catégorie avec enveloppes projectives et soit E *un objet de C. Pour que l'enveloppe projective de* E *soit indécomposable il faut et il suffit que* E *ne soit pas somme de deux sous-objets propres de* E.

Proposition 2.1.13. — Soit C une catégorie avec enveloppes projectives et soit I *un ensemble fini. Soit* M_i, $i \in I$, *des objets de C et soit* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, *Soit* P (*resp.* P_i) *l'enveloppe projective de* M (*resp.* M_i), *alors :* $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$.

Proposition 2.1.14. — Soit C une catégorie avec enveloppes projectives et soit E *un objet projectif de C. Si* E *est noethérien* E *est une somme directe de projectifs indécomposables.*

2.1.15. — Nous supposons maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe que A est un anneau artinien et nous désignons par S l'ensemble des types de A-modules simples et, pour tout $s \in S$, par E_s un A-module simple de type s. Soit alors F_s l'enveloppe projective de E_s D'après (2.12) F_s est un module projectif indécomposable.

Proposition 2.1.16. — La catégorie M_A est une catégorie avec enveloppes projectives.

D'après ([5], § 2, prop. 7) la condition b) de (2.1.8.) est vérifiée et cela achève la démonstration.

Lemme 2.1.17. — Soit F *un projectif indécomposable de M_A. Il existe* $s \in S$ *tel que* $F_s \simeq F$.

Soit, en effet, E' le quotient de F par son radical. D'après (2.1.12) E' est simple, il existe donc $s \in S$ tel que $E' = E_s$. Comme F est l'enveloppe projective de E', cela achève la démonstration.

Lemme 2.1.18. — Soient s *et* $s' \in S$, F_s *est isomorphe à* $F_{s'}$ *si et seulement si* $s = s'$.

Soit E'_s (resp. $E'_{s'}$) le quotient de F_s (resp. $F_{s'}$) par son radical. Si $F_s = F'_s$ alors $E'_s = E'_{s'}$ et $s = s'$. La réciproque est une conséquence immédiate de l'unicité des enveloppes projectives.

Proposition 2.1.19. — Le groupe P_A *est un groupe abélien libre de base* $([F_s])_{s \in S}$.

En effet, toutes les suites exactes de P_A sont scindées, P_A est stable pour les sommes directes finies. Il résulte, enfin, de ([5], § 2, n° 2, th. 1) tout objet E de P_A est une somme directe finie d'objets indécomposables de P_A et que cette décomposition est unique à un automorphisme de E près. La proposition résulte alors de (I, 4.14).

La base $([F_s])_{s \in S}$ est appelée *la base canonique de* P_A.

Corollaire 2.1.21. — Soient E *et* E' *des modules projectifs de type fini. Pour que* E *et* E' *soient isomorphes il faut et il suffit que* E *et* E' *aient même image dans* P_A.

Ce corollaire résulte immédiatement de (I, 4.15).

Corollaire 2.1.22. — Soit F *un objet de* P_A. *La coordonnée d'indice s de* [F] *par rapport à la base canonique de* P_A *est égale au plus grand entier* n *tel que* F_s^n *soit facteur direct de* F.

2.1.23. — Rapportons maintenant M_A et P_A à leur base canonique. A l'homomorphisme de Cartan C_A de P_A dans M_A est alors associée une matrice carrée $c_A = (c_{s,t})_{s \times t \in S \times S}$. Il résulte immédiatement des définitions que la matrice c_A est la matrice de Cartan de A au sens classique (cf. [1]).

Proposition 2.1.24. — Soit A *un anneau artinien et soit* c_A *sa matrice de Cartan, on suppose que* $\det(c_A) \neq O$. *Soient* F *et* F' *des A-modules projectifs de type fini; pour que* F *et* F' *soient isomorphes il faut et il suffit que* F *et* F' *aient mêmes quotients de Jordan-Hölder.*

En effet, si F et F' sont isomorphes ils ont mêmes quotients de Jordan-Hölder.

Réciproquement, si F et F' ont mêmes quotients de Jordan-Hölder, $c_A([F]) = c_A([F'])$, d'après (2.1.13). Puisque $\det(c_A) \neq O$, C_A est injectif, et par suite $[F] = [F']$ dans P_A. La proposition résulte alors de (2.1.21).

2.1.25. — Soit maintenant K un corps. D'après (2.1.2) M_K est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}$ et cela nous permet d'identifier ces deux groupes. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K; il est immédiat de vérifier qu'avec l'identification faite ci-dessus, on a $[V] = \mathrm{rg}_K(V)$.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe on suppose que A est une K-algèbre de dimension finie sur K. Soit alors E (resp. F) un objet de M_A (resp. P_A) et soit $s \in S$. On désigne par a(E,s) (resp. b(F,s)) la composante d'indice s de

$[E]$ (resp. $[F]$) par rapport à la base canonique de M_A (resp. P_A). On pose de plus $r_s = rg_K(\mathrm{Hom}_A(E_s, E_s))$.

Lemme 2.1.26. — Sous les hypothèses de (2.1.25) *il existe une application bilinéaire* $\theta_A: P_A \times M_A \to \mathbf{Z}$ *telle que* $\theta_A([F],[E]) = rg_K(\mathrm{Hom}_A(F,E))$ *pour tout objet* E *(resp.* F*) de* M_A *(resp.* P_A*).*

C'est, en effet, une conséquence immédiate de (1.1.5).

Lemme 2.1.27. — Sous les hypothèses de (2.1.26), la matrice de θ_A *par rapport aux bases canoniques de* P_A *et de* M_A *est diagonale et non dégénérée.*

Lemme 2.1.28. — Sous les hypothèses de (2.1.25) *on a :*

$$\theta_A([F_s],[E]) = r_s . a(E,s) \quad , \quad \theta_A([F],[E_s]) = r_s . b(F,s).$$

Ces deux lemmes résultent immédiatement des définitions.

2.2. — *Homomorphismes de groupes de Grothendieck associés à des changements de corps de base.*

2.2.1. — Soit en K un corps et L une extension de K. On désigne par $u : K \to L$, l'injection de K dans L. On pose $B = L \otimes_K A$ et on désigne par T l'ensemble des types de modules simples sur B. Si $t \in T$, on désigne par (cf.(2.1.15) E_t un module simple de type t et par F_t l'enveloppe projective de E_t.

Soit E un objet de M_A (resp. P_A), on rappelle que $u^!_M([E]) = [L \otimes_K E]$ (resp. $u^!_P([E]) = [(L \otimes_K E)]$. On suppose que L est de dimension finie sur K, soit alors F un objet de M_B (resp. P_B) le foncteur

$$F \rightsquigarrow F_{[u \otimes 1]}$$

de M_B dans M_A (resp. P_B dans P-) est exact, soit alors $u^M_!$ (resp. $u^P_!$) l'homomorphisme associé à ce foncteur.

Lemme 2.2.2. — L'homomorphisme $u^!_M : M_A \to M_B$ *est injectif.*

En effet, il existe une extension finie K′ de K telle que tout module simple sur $K' \otimes_K A$ soit absolument simple. Soit alors $L' = K'.L$ et soient u′, v, v′ les injections de K′ dans L′, de K dans K′ et de L dans L′ respectivement. Puisque $(v')^!_M u \circ {}^!_M = (u')^!_M \circ v^!_M$, il suffit de vérifier que $v^!_M$ et $(u')^!_M$ sont injectifs. Il est immédiat de vérifier que $(u')^!_M$ est un isomorphisme. Pour prouver que $v^!_M$ est injectif il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.3. — Soit L *une extension de* K *de degré* n, *et soit* $x \in M_A$ *(resp.* $x \in P_A$*). On a alors :*

$$u^M_! \circ u^!_M (x) = nx \quad (\textit{resp. } u^P_! \circ u^!_P (x) = nx).$$

En effet, soit E un A-module, on a $(L \otimes_K E)_{[u \otimes 1]} = K^n \otimes_K E = E^n$. Cela démontre le lemme lorsque $x = [E]$ et donc quel que soit x.

Lemme 2.2.4. — *L'homomorphisme* $u^!_P : P_A \to P_B$ *est injectif.*

Avec les notations de (2.2.2) il suffit de prouver que $v^!_P$ et $(u')^!_P$ sont injectifs. Pour $v^!_P$ c'est une conséquence immédiate de (2.2.3). Montrons que $(u')^!_P$ est un isomorphisme.

Soit E' un $(K' \otimes_K A)$-module et F' son enveloppe projective. Il est immédiat de vérifier que $L' \otimes_K F'$ est l'enveloppe projective de $L' \otimes_K E'$. En prenant pour E' les modules simples sur $K' \otimes_K A$, on voit que $(u')^!_P$ transforme la base canonique de $P_{K' \otimes_K A}$ en celle de $P_{L' \otimes_K A}$. Cela achève la démonstration.

Proposition 2.2.5. — *Soit* A *une K-algèbre de dimension finie sur* K, *soit* L *une extension de* K *et soit* $B = L \otimes_K A$. *Si* $\det(c_B) \neq O$, *alors* $\det(c_A) \neq O$.

En effet, soit C_B (resp. C_A) l'homomorphisme de Cartan de B (resp. A), C_B est injectif par hypothèse $u^!_P$ est injectif d'après (2.2.4). Puisque $u^!_M \circ C_A = C_B \circ u^!_P$, $u^!_M \circ C_A$ est injectif et donc aussi C_A. Cela achève la démonstration.

2.2.6. — On se propose maintenant d'étudier l'homomorphisme $u^!_M$. Soit alors $(m_{t,s})_{(t,s) \in T \times S}$ (resp. $(p_{t,s})_{(t,s) \in T \times S}$) la matrice de $u^!_M$ (resp. $u^!_P$) par rapport aux bases canoniques de M_A (resp. P_A) et de M_B (resp. P_B). On désigne par m(s) (resp. p(s)) le sous-ensemble de T formé des $t \in T$ tels que $m_{t,s} \neq O$ (resp. $p_{t,s} \neq O$.

Lemme 2.2.7. — *Quel que soit* $s \in S$ *on a* $m(s) = p(s)$. *De plus la famille* $(m(s))_{s \in S}$ *forme une partition de* T.

Supposons, en effet, que $t \notin \bigcup_{s \in S} m(s)$. Alors $m_{t,s} = O$, quelque soit $s \in S$. Soit alors $x = \sum_{s \in S} n_s [E_s]$ un élément de M_A, la composante d'indice t de $u^!_M(x)$ par rapport à la base canonique de M_B est égale à $\sum_{s \in S} (m_{t,s}) n_s$, elle est donc nulle. En prenant $x = [A]$ on aboutit à une contradiction. Cela montre que $T = \bigcup_{s \in S} m(s)$.

Supposons maintenant que $t \notin \bigcup_{s \in S} p(s)$, donc $p_{t,s} = O$, quel que soit $s \in S$. Soit alors $x = \sum_{s \in S} n_s [F_s]$ un élément de P_A, la composante d'indice t de $u^!_P(x)$ est alors égale à $\sum_{s \in S} (p_{t,s}) n_s$, elle est donc nulle. Comme

$u_{P}^{!}([A]) = [B]$ et comme tout projectif indécomposable est facteur direct de B, on aboutit à une contradiction. On a ainsi démontré que $T = \bigcup_{s \in S} p(s)$.

Mais d'après (2.1.9), l'assertion $p_{t,s} \neq O$ est équivallente à : F_t est facteur direct de $L \otimes_K F_s$. L'ensemble $p(s)$ est donc formé de $t \in T$ tels que F_t soit facteur direct de $L \otimes_K F_s$ et on a prouvé que, quel que soit $t \in T$, il existe $s \in S$ tel que F_t soit facteur direct de $L \otimes_K F_s$.

Soit maintenant $t \in p(s)$ (resp. $t \in m(s')$), alors F_t est facteur direct de $L \otimes_K F_s$ et E_t est un quotient de Jordan-Hölder de $L \otimes_K E_s$. Il en résulte (cf. 2.1.26) que

$$rg_K\,(\mathrm{Hom}_B(L \otimes_K F_s,\ \ L \otimes_K E_{s'})) \neq O.$$

On a donc aussi ([15], O, 6.2.2.1) $\mathrm{Hom}_A(F_s, E_{s'}) \neq O$ et cela montre que $s = s'$.

Comme $T = \bigcup_{s \in S} p(s) = \bigcup_{s \in S} m(s)$, il en résulte que $m(s) = p(s)$ et cela achève la démonstration.

2.2.8. — D'après le lemme (2.2.7) on peut identifier M_B à $\bigoplus_{s \in S} \mathbf{Z}^{(m(s))}$. Identifions M_A à $\bigoplus_{s \in S} \mathbf{Z}^{(\{s\})}$, il est alors immédiat de vérifier que $u_M^!$ est compatible avec cette décomposition en somme directe. Soit maintenant $s \in S$ et soit C l'anneau des homothéties de E_s et soit v l'épimorphisme $A \to C$. Il résulte de (2.1.5) que $v_!^M$ (resp. $(I \otimes v)_!^M$ identifie $\mathbf{Z}^{(\{s\})}$ et M_C (resp. $\mathbf{Z}^{(m(s))}$ et $M_{L \otimes_K C}$). Cela ramène l'étude de $u_M^! : M_A \to M_B$ au cas où A est un anneau simple.

2.2.9. — Soit maintenant σ un K-automorphisme de L et soit F un objet de M_B. On pose $F^{\sigma} = F_{[\sigma^{-1} \otimes 1]}$ et on dit qu'un B-module F′ est conjugué de F par σ si $F' \simeq F^{\sigma}$.

Il résulte immédiatement des définitions que $F^{\sigma} = F$ comme groupe abélien et que B opère dans F comme suit :

$$(k \otimes a) \perp f = \sigma^{-1}(k).a.f$$

quels que soient $k \in L$, $a \in B$ et $f \in F$.

Soit de plus $b = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de F sur L et soit $\rho_{F,b}$ (resp. $\rho_{F^{\sigma},b}$) la représentation matricielle de B associée à F et b (resp. F^{σ} et b) Soit $a \in A$ et soient $\rho_{F,b}(a) = (a_{i,j})$ et $\rho_{F^{\sigma},b}(a) = (b_{i,j})$, on a $a \perp e_j = \Sigma\, b_{i,j}\, e_i = \Sigma\, \sigma^{-1}(b_{i,j}) e_i$; comme $a \perp e_j = a e_j$ on a donc $b_{i,j} = \sigma(a_{i,j})$.

Remarque 2.2.10. — Soit E un objet de M_A, si $F = L \otimes_K E$ alors $F^{\sigma} \simeq F$. Il est en effet immédiat de vérifier que l'application $\sigma \otimes I$ est un isomorphisme de F sur F^{σ}.

2.2.11. — On suppose maintenant que A est une algèbre simple, alors A est isomorphe à une algèbre de matrices $M_r(D)$, sur un corps gauche D de centre K′ contenant K. On pose $m = [K' : K]_s$, $n = [K' : K]_i$ $d^2 = [D : K']$. On suppose que L est une extension algébriquement close de K et on désigne par P l'ensemble des K-plongements de K′ dans L et par L_p, $p \in P$, le corps L muni de la structure d'algèbre sur K définie par le plongement p.

Proposition 2.2.12. — *Si* A *est une K-algèbre simple et si* L *est algébriquement clos, on a, avec les notations des (2.2.11),* $u^!_M([E_s]) = nd\left(\sum_{t \in T} [E_t]\right)$, *pour l'unique élément* s *de* S.

En outre, quelque que soient $t, t' \in T$, F_t et $F_{t'}$ *sont conjugués par un K-automorphisme de* L. *De plus* $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(T) = m$.

En effet, on a $L \otimes_K A = L \otimes_K K' \otimes_{K'} A$, et on démontre en utilisant les résultats de ([5], § 8, I) que le noyau de l'homomorphisme de $L \otimes_K K'$ sur $\prod_{p \in P} L_p$ est égal au radical de $L \otimes_K K'$. On en déduit que le quotient de $L \otimes_K A$ par son radical est isomorphe à la L-algèbre $B' = \prod_{p \in P} L_p \otimes_K A$. Comme $M_B \simeq M_{B'}$ (2.1.5) on a $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(T) = m$.

Soit σ un K-automorphisme de L; alors, quel que soit $t \in T$, F^{σ}_t est un module simple de type $t' \in T$. Posons $\sigma(t) = t'$. On fait ainsi opérer le groupe Ω des K-automorphismes de L sur l'ensemble T. D'autre part, quel que soit $p \in P$, $L_p \otimes_K A$ est un module semi-simple isotypique, soit donc $t \in T$ tel que $L_p \otimes_K A = (F_t)^{n'}$; on a ainsi défini une application h de P dans T; on vérifie facilement que c'est une bijection.

Soit $p \in P$ et $\sigma \in \Omega$, alors $\sigma \otimes 1 : L_p \otimes_{K'} A \to L_{\sigma \circ p} \otimes_{K'} A$ est un isomorphisme de $L_p \otimes_{K'} A$ sur $(L_{\sigma \circ p} \otimes K' A)^{\sigma}$. Cela montre que $h(\sigma \circ p) = \sigma(h(p))$. Comme Ω est transitif sur P il l'est donc aussi sur T. On a donc $u^M_!([E_s]) = k\left(\sum_{t \in T} [F_t]\right)$, où k est un entier positif.

En particulier : $u^!_M(r[E_s]) = u^!_M([A]) = [B] = r.k\left(\sum_{t \in T} [E_t]\right)$, donc

$\dim_L(B) = r.k.m.r.d$. Comme $\dim_K(A) = m.n.d.r^2$ et que $\dim_L(B) = \dim_K(A)$ on a $k = n.d$. D'où la proposition.

Remarque 2.2.13. — Soit F un objet de M_B, on dit que F *provient d'un* A-*module* s'il existe un objet E de M_A tel que $F \simeq L \otimes_K E$. D'après (2.2.7), les assertions suivantes sont équivalentes :

a) l'homomorphisme $u^{!}_{M}$ est un isomorphisme,

b) tout module semi-simple sur B provient d'un A-module.

Nous dirons que K *décompose l'algèbre* A si le quotient de A par son radical est isomorphe à une algèbre de matrices sur K. Lorsque L est une extension algébriquement close de K, les deux assertions ci-dessus sont équivalentes à :

c) le corps K décompose l'algèbre A.

Remarque 2.2.14. — Supposons maintenant L algébriquement clos. Il résulte de la proposition (2.2.12) que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) tout B-module semi-simple F tel que $F \simeq F^{\sigma}$, quel que soit $\sigma \in \Omega_K$, provient d'un A-module,

b) le commutant de tout B-module simple est un corps commutatif, extension séparable de K.

§ 2.3. — CAS PARTICULIER : A EST UNE ALGÈBRE DE GROUPE FINI SUR UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NULLE.

2.3.1. — Soit G un groupe fini d'ordre n et soit K un corps. Jusqu'à la fin de ce paragraphe on pose $A = K[G]$ et on désigne par $F(G, K)$ l'algébre des fonctions de G à valeurs dans K.

Soit maintenant Γ un sous-groupe de $(Z/nZ)^*$, soit $\sigma \in \Gamma$ et soit n_σ un relèvement de σ dans Z. Alors, pour tout $g \in G$, g^{n_σ} est indépendant du relèvement choisi, on pose donc $g^{\sigma} = g^{n_\sigma}$.

Soit alors $R(x, y)$ la relation : « $x \in G$, $y \in G$ et il existe $\sigma \in \Gamma$ et $z \in G$ tels que $x = z^{-1} y^{\sigma} z$. » Cette relation est une relation d'équivalence et on appelle Γ-classes de G les classes de G par cette relation. Lorsque Γ est réduit à l'élément neutre les Γ-classes de G ne sont autres que les classes d'éléments de G conjugués par automorphismes intérieurs. On les appelle alors classes de G.

Soit a une classe de G et soient $x, y \in a$, on vérifie immédiatement que, quel que soit $\sigma \in \Gamma$, x^{σ} et y^{σ} appartiennent à la même classe, soit $\sigma(a)$ cette classe. Le groupe Γ opère donc sur l'ensemble des classes de G.

Soit maintenant p un nombre premier et soit $x \in G$, on dit que x est p-régulier s'il est d'ordre premier à p. Soit alors a une Γ-classe de G, on vérifie facilement que l'ensemble des éléments p-réguliers de a est soit vide soit égal à a. Dans ce dernier cas on dit que a est p-régulière et on note $C_{\Gamma,p}$ l'ensemble des Γ-classes p-régulières.

2.3.2. — On considère maintenant le foncteur exact

$$D : E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_K(E, K) = E^*$$

de $\mathcal{M}_A$ dans $\mathcal{M}_A$ (resp. $\mathcal{P}_A$ dans $\mathcal{P}_A$). On vérifie immédiatement que $(E^*)^* \simeq E$. Le foncteur D définit donc une involution $x \to x^*$ sur M_A (resp. P_A).

Lemme 2.3.3. — Quels que soient $x, y \in M_A$ *et* $z \in P_A$ *on a :*

$$\theta_A(x^*.z, y) = \theta_A(z, x.y).$$

On sait en effet que $x^*.z \in P_A$. D'après ([10], chap. II, propr. 8.1), quels que soient les A-modules E et F on a :

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_K(F, K)) \simeq \mathrm{Hom}_A(E \otimes_K F, K) \;;$$

cea démontre le lemme lorsque $y = 1$. Donc :

$$\theta_A(z, x.y) = \theta_A(z.(x.y)^*, 1) = \theta_A(z.x^*, y).$$

D'où le lemme.

2.3.4. — Nous supposerons jusqu'à la fin de ce paragraphe que K est un corps de caractéristique nulle. Il est alors facile de montrer que A est une algèbre semi-simple, P_A est donc canoniquement isomorphe à M_A et il en résulte que deux modules de type fini sur A sont isomorphes si et seulement si ils ont même usage canonique dans M_A.

Soit E un objet de M_A ; on appelle *caractère de* G *associé* à E et on note χE la fonction $g \rightsquigarrow \mathrm{Tr}_{E/K}(g)$ de G à valeurs dans K. On désigne par M'_A le sous-groupe de F(G, K) engendré par les caractères χ_E, pour E variable.

Il résulte par exemple de ([5], § 12, prop. 1) que la fonction $E \rightsquigarrow \chi_E$ de M_A dans M'_A est additive; elle définit donc un homomorphisme dit canonique de M_A dans M'_A, qu'on note m(K, G). Si $x \in M_A$, on convient d'écrire χ_x au lieu de m(K, G) (x). Si E_s est un module simple de type s on convient d'écrire χ_s au lieu de m(K, G) ($[E_s]$).

Soient E et E′ des objets de M_A. Il résulte immédiatement de la définition de [E].[E′] et de ([5], § 12, prop. 2) que $\chi_{E \otimes E'} = \chi_{[E].E']}$ $= \chi_{E'} \chi_{E'}$. Cela montre que M_A est stable pour la multiplication des fonctions et que m(K, G) est un homomorphisme d'anneaux.

On appellera l'anneau M'_A *l'anneau des caractères de* G *rationnels sur* K.

Théorème 2.3.5. — L'homomorphisme canonique de M_A *dans* M'_A est *un isomorphisme d'anneaux.*

En effet, cet homomorphisme est surjectif puisque M'_A est engendré par les fonctions χ_E pour E variable. Nous avons déjà démontré que c'est un homomorphisme d'anneaux. Il reste à prouver qu'il est injectif, cela va résulter du lemme suivant :

Lemme 2.3.6. — Soit K′ *une extension de* K, *alors l'application canonique de* $K' \otimes_{\mathbf{Z}} M_A$ *dans* F(G, K′) *est une injection.*

Soit x un élément du noyau de cette application. On a alors avec les notations de (2.1.1.)

$$x = \sum_{s \in S} a_s \otimes [E_s] \qquad \text{et} \qquad \sum_{s \in S} a_s \chi_{E_s} = O,$$

Puisque A est une algèbre semi-simple et K de caractéristique nulle, il existe pour tout $t \in S$, un élément y_t de A tel que

$$\chi_s(y_t) = 1 \quad \text{si} \quad s = t$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad s \neq t.$$

On a alors, quel que soit $s \in S$, $\sum_{t \in S} a_t \chi_t(y_s) = a_s = 0$. Cela montre que $x = 0$, et achève la démonstration du théorème (2.3.5).

2.3.7. — Soit maintenant $f, h \in F(G, K)$, l'application

$$(f, g) \rightsquigarrow 1/\mathrm{Card}(G) \; \Big(\sum_{g \in G} f(g^{-1}) \, . \, h(g) \Big)$$

définit une forme bilinéaire θ_A de $F(G, K) \times F(G, K)$ dans K.

Lemme 2.3.8. — La forme bilinéaire θ_A (cf. 1.2.26) *est l'image réciproque de la forme* θ'_A *relativement à l'application* $m(K, G)$.

L'involution $g \rightsquigarrow g^{-1}$ de G définit une involution dans $F(G, K)$. Soit $f \rightsquigarrow f^*$ cette involution. Il est immédiat de vérifier que, quel que soit $x \in M_A$, $\chi_{x^*} = \chi^*_x$.

Soit alors $x, y \in M_A$, on a :

$\theta_A(x, y) = \theta_A(x . y^*, 1)$, d'après (2.3.3)

et

$$\theta'_A(\chi_x, \chi_y) = \theta'_A(\chi_x \cdot \chi^*_y, 1)$$
$$= \theta'_A(\chi_x \cdot \chi_{y^*}, 1)$$
$$= \theta'_A(\chi_{x.y^*}, 1), \text{ comme on le vérifie immédiatement.}$$

Il suffit dès lors de montrer que, pour tout objet E de M_A, $\theta'_A(\chi_E, 1) = \theta_A([E], 1)$.

Par définition, $\theta_A([E], 1) = \mathrm{rg}_K\,(\mathrm{Hom}_A\,(E, K))$

$$= \mathrm{rg}_K\,(E^G)$$
$$= \mathrm{Tr}_{E/K}\,\Big((1/\mathrm{Card}(G))\,\Big(\sum_{g \in G} (g)\Big)\Big),$$

puisque $(1/\mathrm{Card}(G))\,\big(\sum_{g \in G} (g)\big)$. est un projecteur de E sur E^G

$$= (1/\mathrm{Card}(G))\,\Big(\sum_{g \in G} \chi_E(g)\Big)$$
$$= \theta'_A(\chi_E, 1).$$

Cela achève la démonstration du lemme.

Corollaire 2.3.8. (*Relations d'orthogonolité*). — *Soit* S *l'ensemble des types de* K[G]*-modules simples et soient* s *et* s′ *des éléments de* S. *On a alors, avec les notations de* (2.1.18) *et de* (2.3.4).

$$\sum_{g \in G} \chi_s(g^{-1})\,\chi_{s'}(g) = r_s, \quad si \quad s = s'$$
$$= 0 \quad , \quad si \quad s \neq s'.$$

2.3.9. — Soit maintenant L une extension algébriquement close de K, soit $\mathbf{Q}_n$ le corps des racines n-ièmes de l'unité sur $\mathbf{Q}$ et soit K′ le corps $K \cap \mathbf{Q}_n$. On notera G_n (resp. G_K) le groupe de Galois de $\mathbf{Q}_n$ sur $\mathbf{Q}$ (resp. de $\mathbf{Q}_n$ sur K′).

Dans ce qui suit on identifiera G_n et G_K à des sous-groupes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$; de manière plus précise, si $\sigma \in G_n$, et si x est une racine de l'unité, alors $\sigma(x)$ est de la forme x^m, $m \in \mathbf{Z}$, et cela détermine un élément unique de $(Z/nZ)^*$.

Lemme 2.3.10. — Avec les hypothèses et les notations de (2.3.9), on a :

$$\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}(M_{K[G]}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}(M_{[K'G]}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}((M_{\mathbf{Q}_n[G]})^{G_K}).$$

En effet, soit Ω_K (resp. $\Omega_{K'}$) le groupe des K-automorphismes (resp. K′-automorphismes) de L et soient S, T, S′ et T′ les ensembles de types de modules simples sur K[G], L[G], K′[G] et $\mathbf{Q}_n[G]$ respectivement. Nous avons vu que Ω_K et $\Omega_{K'}$ opèrent sur T et que G_K opère sur T′ (cf. 2.2.9).

D'après (2.2.12), on a, quels que soient $\sigma \in \Omega_K$ (resp. $\Omega_{K'}$), $x \in \mathbf{M}_{L[G]}$ et $g \in G$,

$$\chi_{\sigma(x)}(g) = \sigma(\chi_x(g)) \in \mathbf{Q}_n.$$

Cela montre que l'homomorphisme de $M_{L[G]}$ associé à σ ne dépend que de l'image de σ dans G_K . Comme l'application canonique de Ω_K (resp. Ω_K) dans G_K est surjective, on en déduit que les classes de T suivant Ω_K sont aussi les classes de T suivant $\Omega_{K'}$. Cela démontre la première égalité du lemme d'après (2.2.12) et (2.2.7).

On démontre de même que les classes de T suivant Ω_K sont en correspondance biunivoque avec les classes de T′ suivant G_K et on déduit la seconde égalité du lemme.

Lemme 2.3.11. — Soit $\sigma \in G_K \subset (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ *et soit* n_σ *un relèvement de* σ *dans* $\mathbf{Z}$. *On a alors, quels que soient* $g \in G$ *et* $\chi \in M'_{\mathbf{Q}_n[G]}$, $\sigma(\chi(g)) = \chi(g^{n_\sigma})$.

On remarque en effet que $\chi(g)$ est une somme de racines n-ièmes de l'unité, soit $\chi(g) = \sum_i x_i$ une telle somme. Alors :

$\sigma(\chi(g)) = \sum_i \sigma(x_i) = \sum_i x_i^{n_\sigma} = \chi(g^{n_\sigma})$, et cela démontre le lemme.

Théorème 2.3.12. — Soit G *un groupe fini d'ordre* n, *soit* K *un corps de caractéristique nulle et soit* S *l'ensemble des types de modules simples sur* K[G]. *Soit* $\mathbf{Q}_n$ *le corps des racines n-ièmes de l'unité sur* $\mathbf{Q}$, *soit* $G_K \subset (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ *le groupe de Galois de* $\mathbf{Q}_n$ *sur* $K \cap \mathbf{Q}_n$ *et soit* $\Sigma_{G,K}$ *l'ensemble des* G_K*-classes de* G (*cf. 2.3.1*). *Alors :* Card (S) = Card ($\Sigma_{G,K}$).

Soit C(G,K) l'algèbre des fonctions sur G constantes sur les G_K-classes de G et soit $\chi \in M'_{K[G]}$; il résulte de (2.3.11) que $\chi \in C(G,K)$ et alors la conclusion du théorème est équivalente à : $K \otimes_{\mathbf{Z}} M'_{K[G]} \to C(G,K)$ est un isomorphisme.

D'après le lemme (2.3.9), on peut, pour la démonstration du théorème supposer $K \subset \mathbf{Q}_n$ Lorsque $K = \mathbf{Q}_n$, on considère une extension algébriquement close L de K, alors Card (S) est égal, d'après (2.3.10), à la dimension sur L du centre de L[G], comme les classes de G forment une L-base du centre de L[G], le théorème est démontré lorsque $K = \mathbf{Q}_n$.

Cela montre en particulier qu'il existe, pour tout $x \in G$, une fonction $d_x \in M'_{\mathbf{Q}_n[G]}$ constante sur la classe b de x. Si T désigne l'ensemble des types de modules simples sur $\mathbf{Q}_n[G]$, d_x peut se mettre sous la forme $d_x = \sum_{t \in \mathbf{T}} b_t \chi_t$ on a alors, d'après (2.3.8), quel que soit $t' \in T$,

$$\theta_{\mathbf{Q}[G]}(\sum_{t \in T} b_t[E_t], [E'_t]) = \theta'_{\mathbf{Q}_n[G]}(d_x, \chi_{t'}).$$

On a donc, d'après (2.1.26), $b_t = n_t \chi_t(x^{-1})$, avec

$$n_t = r_t . \mathrm{Card}(b) / \mathrm{Card}(G) \in \mathbf{Q}.$$

Soit maintenant a la G_K-classe de x. Nous avons vu (2.3.1) que G_K opère sur les classes de G; soit donc N_B le stabilisateur de la classe b de x et soit $n_b = \mathrm{Card}(N_b)$. Soit, enfin, $d_a = \sum_{G_K} d_x$ (cf. 2.3.1).

On vérifie immédiatement que $d_a = n_b$ sur la G_K classe a de x et que $d_a = O$ ailleurs. De plus $d_a = \sum_{t \in T} A_t \chi_t$, avec $A_t = \sum_{\sigma \in G_K} n_t \chi_{\sigma(t^{-1})}(x)$ d'après (2.3.11). Il en résulte que A_t est invariant par G_K et donc que $A_t \in K$. Puisque d_a est invariante par G_K on a donc aussi $A_t = A_{\sigma(t)}$ quel que soit $\sigma \in G_K$. Cela montre que $d_a \in K \otimes_{\mathbf{Z}} (M'_{\mathbf{Q}_n[G]})^{G_K}$ et donc que $\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}((M'_{\mathbf{Q}_n[G]})^{G_K}) = \mathrm{Card}(\Sigma_{G_K})$. Cela achève la démonstration du théorème d'après (2.3.10).

Remarque 2.3.13. — Soit L une extension algébriquement close de $\mathbf{Q}_n$ et soit Ω le groupe des $\mathbf{Q}_n$-automorphismes de L. Soit F un L[G]-module, nous avons vu que quel que soit $\sigma \in \Omega$, $F^{\sigma} \simeq F$. BRAUER (cf. [8]) a démontré que tout F provenait d'un $\mathbf{Q}_n[G]$-module et donc que Q_n décompose l'algèbre $\mathbf{Q}_n[G]$ (cf. 2.2.13).

Nous n'utiliserons ce résultat que lorsque G est abélien, auquel cas il se démontre immédiatement à l'aide de (2.2.14).

§ 3. — Quelques propriétés du groupe P_A, lorsque A est une algèbre noethérienne sur un anneau local noethérien.

3.1. — Soit R un anneau local noethérien et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Soit A une R-algèbre qui est de type fini comme module sur R. On pose alors $\bar{R} = R/\mathfrak{m}R$, $\bar{A} = A/\mathfrak{m}A$. Le foncteur $E \rightsquigarrow \bar{E} = E/\mathfrak{m}E$ de P_A dans $P_{\bar{A}}$ est exact, il définit donc (cf. I, 3.1) un morphisme dit canonique et noté $(\mathfrak{m})^!$ de P_A dans $P_{\bar{A}}$.

Proposition 3.2. — Soient E_1 *et* E_2 *des objets de* P_A, *pour que* E_1 *et* E_2 *soient isomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient même image dans* P_A.

La condition est trivialement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Supposons que $[E_1] = [E_2]$ dans P_A, alors $(\mathfrak{m})^!([E_1]) = (\mathfrak{m})^!([E_2])$. Cela entraîne, d'après (2.1.21), que $\bar{E}_1$ est isomorphe à $\bar{E}_2$, on en déduit qu'il existe un homomorphisme f de E_1 dans E_2 compatible avec cet isomorphisme. On démontre à l'aide du lemme de Nakayama que f est un isomorphisme. D'où la proposition.

Corollaire 3.3. — L'application canonique $P_A \to P_{\bar{A}}$ *est injective.*

Soit, en effet x un élément du noyau de cette application, D'après (I, 1.3) x se met sous la forme $[E_1] - [E_2]$, E_1 et E_2 étant des objets de P_A. Par hypothèse $[\bar{E}_1] = [\bar{E}_2]$ dans $P_{\bar{A}}$. On démontre comme dans la proposition précédente, qu'alors $E_1 \simeq E_2$ et donc que $x = O$.

Corollaire 3.4. Le groupe P_A *est un groupe abélien libre de rang au plus égal à celui de* $P_{\bar{A}}$

Lemme 3.5. — Si R *est complet pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique, la catégorie* M_A *est une catégorie avec enveloppes projectives.*

En effet, d'après (2.1.8), il suffit de vérifier que pour tout module projectif E de M_A. Et tout épimorphisme $f = E \to F$, de M_A, il existe un sous-objet E′ de E minimal pour la relation $f(E') = F$. Nous allons construire un tel sous-module de E.

On désigne par $\bar{f}$ l'application de $\bar{E}$ dans $\bar{F}$ déduite de f par passage aux quotients. Posons, pour tout $n \geqslant o$, et pour tout A-module H, $H_n = H/\mathfrak{m}^{n+1}H$. Il résulte immédiatement du lemme de Nakayama que l'application canonique $H \to H_n$ est essentielle (2.1.7). On rappelle d'autre part que la catégorie M_{A_n} est une catégorie avec enveloppes projectives (cf. 2.1.16).

D'après (2.1.9), E_o peut s'écrire sous la forme $E_o = E'_o \oplus E''_o$, le couple (E'_o, f) étant une enveloppe projective de F_o dans M_{A_o}. Nous allons construire par récurrence sur n un A-module E'_n (resp. E''_u tel que $E'_{n-1} = E'_n/\mathfrak{m}^n E'_n$ (resp. $E''_{n-1} = E''_n/\mathfrak{m}^n E''_n$(et que $E_n = E'_n \oplus E''_n$. On vérifie à l'aide de 2.1.13) qu'il suffit de prendre pour E'_n(resp. E''_n) l'enveloppe projective de E'_{n-1}(resp. E''_{n-1}) dans M_{A_n}.

Soit alors $E' = \varprojlim E'_n$ (resp. $E'' = \varprojlim E''_n$), on a $E = E' \oplus E''$. De plus $f(E') = F$, puisque $\bar{f}(E'_0) = F_0$. On vérifie immédiatement que E' est minimal pour la relation $f(E') = F$. D'où le lemme.

Proposition 3.6. — Si R *est complet pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique, l'homomorphisme canonique* $P_A \to P_{\bar{A}}$ *est un isomorphisme.*

D'après (3.3), il suffit de démontrer que cet homomorphisme est surjectif. En effet, soit F un $\bar{A}$-module projectif, F est aussi un A-module; soit donc E son enveloppe projective dans M_A, alors $\bar{E} = E/\mathfrak{m}E$ est une extension essentielle de F, comme E est aussi A-projectif, on a $\bar{\bar{E}} = F$. Cela achève la démonstration.

3.7. — Jusqu'à la fin de ce paragraphe nous supposerons que R est complet.

Soit alors $\bar{S}$ l'ensemble des types de modules simples sur $\bar{A}$. Soit $\bar{s} \in \bar{S}$, soit $E_{\bar{s}}$ un module simple de type $\bar{s}$ et soit $F'_{\bar{s}}$ l'enveloppe projective de $E_{\bar{s}}$ dans M_A. Comme E_s est simple (resp. monogène), $F'_{\bar{s}}$ est indécomposable (resp. facteur direct de A). On montre, comme dans (2.1.17), que pour tout module projectif indécomposable E de M_A , il existe $s \in S$ tel que $\bar{E} \simeq E_{\bar{s}}$ Enfin, soient $\bar{s}$ et $\bar{t} \in \bar{S}$, il résulte immédiatement de (3.2) que $F'_{\bar{s}} \simeq F'_{\bar{t}}$ si et seulement si $\bar{s} = \bar{t}$.

Lemme 3.8. — La famille $([F'_{\bar{s}}])_{\bar{s} \in \bar{S}}$ *forme une base de* P_A.

En effet la famille $([E_{\bar{s}}])_{\bar{s} \in \bar{S}}$ (cf. 3.7) est une base de $P_{\bar{A}}$. Le lemme résulte alors de (3.6).

La base $([F'_{\bar{s}}])_{\bar{s} \in \bar{S}}$ de P_A sera appelée : *base canonique* de P_A.

Remarque 3.9. — Soit E un objet de P_A, d'après (2.1.14) E est somme directe de projectifs indécomposables; soit $E = \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} (F_s)^{n_{\bar{s}}}$ une telle décomposition en somme directe. Alors, $n_{\bar{s}}$ est la coordonnée d'indice $\bar{s}$ de $[E]$ par rapport à la base canonique de P_A. Le lemme (3.2) montre alors que cette décomposition est unique à un automorphisme de E près.

§. 4. — Quelques propriétés de P_A et de M_A lorsque A est une algèbre finie sur un anneau de dimension 1.

4.1. — Soit R un anneau noethérien intègre de dimension 1, soient R′ le corps des fractions de R et $j_R : R \to R'$ l'injection canonique de R dans R′. Soit m_R l'ensemble des idéaux maximaux de R et soit $\mathfrak{p} \in m_R$; on désigne par $u_{\mathfrak{p}}$ l'application canonique de R dans $R/\mathfrak{p}R$.

Soit A une algèbre finie sur R (i.e. de type fini comme module sur R). Pour tout $\mathfrak{p} \in m_R$, on écrira $\mathfrak{p}_!$ (resp. $\mathfrak{p}^!$) au lieu de $(u_{\mathfrak{p}})^M_!$ (cf. 1.6) (resp. $(u_{\mathfrak{p}})^!_M$). Soit E un $A/\mathfrak{p}A$-module de type fini, et soit $E_{[u_{\mathfrak{p}}]}$ le A-module déduit de E par restriction des scalaires; alors $\mathfrak{p}_!([E]) = [E_{u_{\mathfrak{p}}}]$.

Proposition 4.2. (SWAN, [20]). — *Avec les hypothèses et les notations de* (4.1), *on a la suite exacte :*

$$\coprod_{\mathfrak{p} \in m_R} M_{A/\mathfrak{p}A} \to M_A \to M_{R' \otimes_R A} \to O \tag{4.2.1}$$

Soit, en effet, pour tout $\mathfrak{p} \in m_R$, $\mathcal{M}_A(\mathfrak{p})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_A$ formée des A-modules de support $\mathfrak{p}$; l'application $u_{\mathfrak{p}}$ définit un homomorphisme de $M_{A/\mathfrak{p}A}$ dans $M_A(\mathfrak{p})$, il résulte de (I, 4.9) que cet homomorphisme est un isomorphisme. Soit maintenant $\mathcal{M}_A(T)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}_A$ formée des A-modules de torsion; on vérifie immédiatement que $\mathcal{M}_A(T)$ est somme directe des catégories $\mathcal{M}_A(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in m_R$ (cf. I, 4.3). La proposition résulte alors de (I, 4.4) et de (1.9.1).

Lemme 4.3. — *Soit* S *une partie multiplicativement stable de* R *et soit* U *le sous-espace de* Spec(R) *canoniquement isomorphe à* Spec($S^{-1}R$). *Si* U *est ouvert non vide dans* Spec(R), *on a la suite exacte :*

$$\coprod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) - U} M_{A/\mathfrak{p}A} \to M_A \to M_{S^{-1}A} \to O \tag{4.3.1}$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle de (4.2) à partir de (II, 3.4).

Corollaire 4.4. — *Soit* G *un p-groupe fini et soit* $n = p^m$ *l'ordre de* G. *L'application canonique de* $M_{\mathbf{Z}[G]}$ *dans* $M_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ *est un isomorphisme.*

En effet, on sait que tout module simple sur $\mathbf{F}_p[G]$ est isomorphe au module $\mathbf{F}_p$ sur lequel G opère trivialement (cf. 19). De la suite exacte : $O \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{F}_p \to O$ on déduit que l'image dans $M_{\mathbf{Z}[G]}$ d'un tel module est égale à O. Donc l'homomorphisme $M_{\mathbf{Z}[G]} \to M_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ est un isomorphisme, d'après (4.3.1).

4.4. — Soit R et A satisfaisant aux conditions de (4.1) et soit $A' = R' \otimes_R A$. Soit $\mathcal{P}^o_A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_A$ formée des A-modules projectifs que deviennent libres sur A′ par extension des scalaires de A à A′ (cf. [16], § 3). Soit P^o_A le groupe de Grothendieck de $\mathcal{P}^o_A$. Posons, enfin, $Cl_A = \operatorname{Ker}(P_A \to P_{A'})$.

Soit, maintenant, $\mathcal{N}_A$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_A$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathcal{N}_A$ est stable pour les sommes directes finies,

b) si F est un objet de $\mathcal{P}_A$, il existe un objet F′ de $\mathcal{P}_A$ tel que $F \oplus F'$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{N}_A$.

Posons $N_A = K(\mathcal{N}_A)$.

Lemme 4.5. — *Soit* $\mathcal{N}_A$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathcal{P}_A$ *satisfaisant aux conditions* a) *et* b) *de* (4.4). *Alors, l'homorphisme canonique de* N_A *dans* P_A *est injectif.*

Soit $x \in \operatorname{Ker}(N_A \to P_A)$. D'après *a*) x peut se mettre sous la forme $x = [E_1] - [E_2]$, E_1 et E_2 étant des objets de $\mathcal{N}_A$. D'après (I, 4.12), il existe un objet F de $\mathcal{P}_A$ tel que $E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$; soit alors F′ tel que $F \oplus F'$ soit isomorphe à un objet de $\mathcal{N}_A$. Alors $E_1 \oplus (F \oplus F') = E_2 \oplus (F \oplus F')$ et cela montre que $[E_1] = [E_2]$ dans N_A et donc que $x = O$.

Corollaire 4.6. — L'homomorphisme canonique $P^o_A \to P_A$ *est une injection.*

Proposition 4.7. — Le groupe P^o_A *est canoniquement isomorphe à* $Cl_A \times \mathbf{Z}$.

Soit E un objet de P^o_A ; $R' \otimes_R E$ est libre sur A′. *On appellera rang de* E *sur* A *et on notera* rg_A (E) *le rang de* $R' \otimes_R E$ *sur* A′.

Soit $\mathcal{L}_A$ la sous-catégorie de $\mathcal{P}^o_A$ formée des A-modules libres, $\mathcal{L}_A$ satisfait aux conditions a) et b) de (4.4). Cela définit donc une injection canonique i de $K(\mathcal{L}_A) = \mathbf{Z}$ dans P_A. D'autre part, l'application $E \rightsquigarrow rg_A(E)$ de P^o_A dans $\mathbf{Z}$ est additive, elle définit donc un homomorphisme noté aussi rg_A de P^o_A sur $\mathbf{Z}$. Il est trivial de vérifier que $rg_A \circ i = I$.

Soit maintenant $x \in Cl_A$, alors $x = [E_1] - [E_2]$, E_1 et E_2 étant des objets de $\mathcal{P}_A$ tels que $[R' \otimes_R E_1] = [R' \otimes_R E_2]$; d'après (2.1.21) on a alors $R' \otimes_R E_1 = R' \otimes_R E_2$. Soit E_3 un objet de $\mathcal{P}_A$ tel que $E_1 \oplus E_3$ soit libre, alors $R' \otimes_R (E_2 \oplus E_3)$ qui est isomorphe à $R' \otimes_R (E_1 \oplus E_3)$ est un A′-module libre, cela signifie que $E_1 \oplus E_3$ et $E_2 \oplus E_3$ sont des objets de $\mathcal{P}^o_A$ et donc que $x \in P^o_A$ et que $x \in \operatorname{Ker}(rg_A)$. Donc $Cl_A \subset \operatorname{Ker}(rg_A)$. D'où la proposition, puisque $\operatorname{Ker}(rg_A) \subset Cl_A$.

Proposition 4.8. — (Serre [17]). *Supposons, en plus des hypothèses de* (4.1), *que* A *soit un anneau commutatif. Alors* Cl_A *est isomorphe au groupe des classes de A-modules projectifs de rang* 1 (cf. [6], § 5, n° 4).

En effet, soit E un objet de $\mathcal{P}^o_A$ et soit $n_E = rg_A(E)$. Alors $\overset{n_E}{\wedge} E$ est un A-module projectif de rang 1; soit $f(E) = cl(\overset{n_E}{\wedge} E)$ (cf. [6], § 5, n° 4). La fonction f de $\mathcal{P}^o_A$ dans P(A) est additive, en effet soient E et F des objets de $\mathcal{P}^o_A$, il est facile de vérifier que $\overset{n_{(E \oplus F)}}{\wedge} (E \oplus F) = (\overset{n_E}{\wedge} E) \otimes_A (\overset{n_F}{\wedge} F)$

La fonction f définit donc un isomorphisme [f] de P^o_A dans le groupe P(A) des classes de modules projectifs de rang 1. On vérifie immédiatement que [f] est surjectif. Soit maintenant $x = [E_1] - [E_2] \in \ker[f]$, alors $f(E_1) = f(E_2)$. D'après ([17], prop. 7), il existe un module projectif de rang 1, F_1 (resp. F_2) de classe $f(E_1)$ (resp. $f(E_2)$) et un module libre L_1 (resp. L_2) tels que $E_1 = F_1 \oplus L_1$ et $E_2 = F_2 \oplus L_2$. Alors $x = [L_1] - [L_2]$. Cela montre que $\ker([f]) = \mathrm{Im}(K(\mathcal{L}_A))$. D'où la proposition.

Corollaire 4.9. — Si A *est un anneau de Dedekind, l'application canonique* $P_A \to M_A$ *est un isomorphisme et* $M_A = P(A) \times \mathbf{Z}$.

Corollaire 4.10. — Soit A *une algèbre de matrices sur un anneau commutatif* B *satisfaisant aux conditions de (4.1). Alors* Cl_A *est isomorphe au groupe* P(B) *des classes de modules projectifs rang* 1 *sur* B.

Soit $B = M_n(A)$, A^n est un (B,A) — bimodule de manière évidente; nous le désignerons par H. Le foncteur $E \rightsquigarrow H \otimes_A E$ définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ (cf. [11], chap. V, cor. 3), sa restriction à P_A définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$ et donc un isomorphisme de P_A sur P_B.

On vérifie immédiatement que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} O & \to & Cl_A & \to & P_A & \to & P_{A'} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O & \to & Cl_B & \to & P_B & \to & P_{B'} \end{array}$$

est commutatif. Et cela achève la démonstration puisque les flèches $P_A \to P_B$ et $P_{A'} \to P_{B'}$ sont des isomorphismes.

4.11. — Soit maintenant A′ une algèbre simple centrale sur un corps de nombres R′, soit R l'anneau des entiers de R′ et soit A un ordre maximal de A′. Soit Π l'ensemble des plongements de R′ dans le corps $\mathbf{R}$ des réels; si $p \in \Pi$, on désigne par $\mathbf{R}_p$ le corps $\mathbf{R}$ muni de la structure de R-algèbre définie par le plongement p.

Soit Π' le sous-ensemble de Π formé des p tels que $\mathbf{R}_p \otimes_R A'$ ne soit pas semblable à $\mathbf{R}$. Soit $I^+_{R'}$ le groupe des idéaux fractionnaires de R′ et soit $P^+_{R'}$, le sous-groupe de $I_{R'}$ défini comme suit : soit $a \in I_{R'}$, pour que a soit un élément de $P^+_{R'}$ il faut et il suffit qu'il existe $x \in R'$, tel que x soit positif pour tout plongement de Π' et que a soit égal à xR.

Théorème 4.12. (Eichler). — Avec les hypothèses et les notations de (4.11), $Cl_A = I_{R'}/P^+_{R'}$.

Nous renvoyons à ([21]) pour la démonstration de ce théorème.

4.13. — Supposons maintenant que $R = \mathbf{Z}$ et que $A = \mathbf{Z}[G]$. On se propose d'étudier le groupe $P_{\mathbf{Z}[G]}$ et de donner quelques résultats sur l'application de Cartan $C_{\mathbf{Z}[G]} : P_{\mathbf{Z}[G]} \to M_{\mathbf{Z}[G]}$.

Posons $Cl'_{\mathbf{Z}[G]} = \ker(M_{\mathbf{Z}[G]} \to M_{\mathbf{Q}[G]})$. Il est immédiat de vérifier que l'image de $Cl_{\mathbf{Z}[G]}$ par $C_{\mathbf{Z}[G]}$ est un sous-groupe de $Cl'_{\mathbf{Z}[G]}$.

4.14. — Soit P un objet de $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}[G]}$ d'après ([20], Th. 8.1) ou ([11], prop. 1) $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} P$ est un module libre sur $\mathbf{Q}[G]$. Cela permet de définir le rang de P sur $\mathbf{Z}[G]$ (cf. 4.6) et cela entraîne comme nous le démontrerons plus loin (IV, 4.2.1) que pour tout corps k, $k \otimes_{\mathbf{Z}} P$ est un module libre sur $k[G]$.

Soit, maintenant p un nombre premier *ne divisant pas l'ordre de* G. La catégorie $\mathcal{M}_{\mathbf{F}_p[G]}$ peut être considérée comme une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}[G]}$ (cf. [III], 1.1 et 1.2), puisque les groupes $P_{\mathbf{Z}[G]}$ et $H_{\mathbf{Z}[G]}$ sont canoniquement isomorphes, on a aussi un homomorphisme canonique de $M_{\mathbf{F}_p[G]}$ dans $P_{\mathbf{Z}[G]}$, soit $\tilde{p}_!$ cet homomorphisme. De manière plus précise, soit E un objet de $M_{\mathbf{F}_p[G]}$, il existe alors ([19]) une résolution de E par des objets de $\mathcal{P}_A$ de la forme

$$O \to P_1 \to P_2 \to E \to O.$$

Alors $\tilde{p}_!([E]) = [P_2] - [P_1]$.

Proposition 4.15. (Swan). — *Le groupe* $Cl_{\mathbf{Z}[G]}$ *est fini.*

La proposition résulte immédiatement du théorème de Swan ([20], th. A) et d'un théorème de Zassenhaus ([23]).

Corollaire 4.16. — Le noyau de l'application de Cartan : $P_{\mathbf{Z}[G]} \to M_{\mathbf{Z}[G]}$ *est fini.*

On vérifie immédiatement que ce noyau est un sous-groupe de $Cl_{\mathbf{Z}[G]}$.

Proposition 4.17. (Cf. [20], th. 7.1). — Soit G *un groupe fini d'ordre* n *et soit* P(n) *l'ensemble des nombres premiers qui ne divisent pas* n; *alors la suite* $\coprod_{p \in P(n)} M_{\mathbf{F}_p[G]} \to P_{\mathbf{Z}[G]} \to \mathbf{Z} \to O$ *est exacte.*

Soit F un objet de $P_{\mathbf{Z}[G]}$, soit $x \in F$ et soit p un nombre premier. Nous désignerons par $\sigma_p(x)$ l'image de x dans F/pF. Soit $a = [L] - [E]$ un élément du noyau de $P_{\mathbf{Z}[G]} \to \mathbf{Z}$, L étant supposé libre. Soit $m = rg_{\mathbf{Z}[G]}(L)$ (cf. 4.14), alors $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} L = \mathbf{Q}_{\mathbf{Z}} \otimes E$, donc E même rang que L. Puisque, d'après (4.14) $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}} E$ est libre de rang m sur $\mathbf{F}_p[G]$, on peut trouver $x \in E$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que les $\sigma_p(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, forment une base de E/pE sur $\mathbf{F}_p[G]$, quel que soit $p \notin P(n)$. Identifions L à $(\mathbf{Z}[G])^m$, soit alors e_i l'élément neutre du i-ème facteur de L. Soit enfin f l'homomorphisme de L dans E défini par les conditions $f(e_i) = x_i$, cet homomorphisme est injectif et E/f(L) n'a pas de p torsion si $p \notin P(n)$. Cela montre que a est un élément de l'image de $\coprod_{p \in P(n)} M_{\mathbf{F}_p[G]}$. Les autres vérifications étant immédiates cela achève la démonstration.

Corollaire 4.18. — L'image de $Cl_{\mathbf{Z}[G]}$ *par l'application de Cartan est un sous-groupe de* $Cl'_{\mathbf{Z}[G]}$. *De plus* $Cl'_{\mathbf{Z}[G]}$ *est engendré par ce sous-groupe et* *par l'image de* $\coprod_{p \in P(n)} M_{\mathbf{F}_p[G]}$.

Corollaire 4.19. — Si G *est un p-groupe* $Cl'_{\mathbf{Z}[G]}$ *est un quotient de* $Cl_{\mathbf{Z}[G]}$.

Cela résulte de (4.18) et de (4.4).

Proposition 4.20. — Soit G *un groupe fini d'ordre* n *et soit* $P'(n)$ *l'ensemble des diviseurs premiers de* n. *Soit* $p \in P'(n)$ *et soit* $H_{\mathbf{Z}[G]}(p)$ *le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie de* $M_{\mathbf{Z}[G]}$ *formée des* $\mathbf{Z}[G]$*-modules qui sont de dimension homologique finie et de support* $[p]$. *Alors la suite*

(4.20.1) $$\coprod_{p \in P'(n)} H_{\mathbf{Z}[G]}(p) \to P_{\mathbf{Z}[G]} \to P^{\circ}_{\mathbf{Z}[1/n][G]} \to O,$$

est exacte.

Soit $x \in \ker(P_{\mathbf{Z}[G]} \to P^{\circ}_{\mathbf{Z}[1/n][G]})$; écrivons x sous la forme $x = [E] - [F]$, E et F étant des objets de $P_{\mathbf{Z}[G]}$. En ajoutant un module libre L à E et F, on peut supposer que $\mathbf{Z}[1/n] \otimes E = \mathbf{Z}[1/n] \otimes F$ (cf. I, 4.12). Soit donc f un tel isomorphisme. Utilisant la platitude de $\mathbf{Z}[1/n]$ sur $\mathbf{Z}$, on montre qu'il existe un homomorphisme g de E dans F tel que $\mathbf{Z}[1/n] \otimes g = n^m f$, mais $n^m f$ est aussi un isomorphisme. Alors ker(g) et Coker(g) sont des modules de torsion dont le support est contenu dans $P'(n)$, E étant sans torsion $\ker(g) = O$ et donc $x \in \mathrm{Coker}(g)$. D'autre part, il est immédiat de vérifier que pour tout objet E de $H_{\mathbf{Z}[G]}(p)$, $p \in P'(n)$, $\mathbf{Z}[1/n] \otimes_{\mathbf{Z}} E = O$.

Il reste donc à montrer que $P_{\mathbf{Z}[G]} \to P^{\circ}_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ est surjectif. Il suffit pour cela de montrer que $Cl_{\mathbf{Z}[G]} \to Cl_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ est surjective. Il est facile de vérifier que $C_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ est un isomorphisme. Compte tenu de (4.18) il suffit donc de vérifier que $Cl'_{\mathbf{Z}[G]} \to Cl'_{\mathbf{Z}[1/n][G]}$ est surjective ce qui résulte de (4.18).

Corollaire 4.21. — Le noyau de $C_{\mathbf{Z}[G]}$ *est contenu dans le sous-groupe de* $P_{\mathbf{Z}[G]}$ *engendré par les images des groupes* $H_{\mathbf{Z}[G]}(p)$, $p \in P(n)$.

CHAPITRE IV

THÉORIE DE BRAUER

SOMMAIRE

On se propose dans ce chapitre de reprendre la théorie des caractères modulaires de BRAUER à l'aide des Groupes de GROTHENDIECK.

Soit R un anneau de Dedekind et soit R′ (resp. $\bar{R}$) le corps des quotients (resp. des restes) de R. Soit A une R-algèbre finie et soit A′ (resp. $\bar{A}$) l'algèbre $R' \otimes_R A$ (resp. $\bar{R} \otimes_R A$). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de R.

Le § 1 définit après SWAN un homomorphisme $d : M_{A'} \to M_{\bar{A}}$ (réduction module $\mathfrak{p}$) et ramène l'étude de d au cas où R est un anneau de valuation discrète complet.

Dans le § 2 on suppose A′ semi-simple. On définit alors un homomorphisme $\tilde{d}$ de $P_{\bar{A}}$ dans $M_{A'}$. on montre en particulier que d et $\tilde{d}$ sont adjoints par rapport aux formes bilinéaires $\theta_{\bar{A}}$ et $\theta_{A'}$ (2.6).

Dans le § 3 on étudie les caractères modulaires. Soit G un groupe fini d'ordre n et soit R un anneau de valuation discrète on suppose ou bien que R est complet ou bien qu'il contient les racines n-ièmes de l'unité. On pose $A = R[G]$; on définit alors en utilisant uniquement des homomorphismes canoniques de groupes de GROTHENDIECK et des résultats sur les caractères ordinaires un anneau M(R,G) qu'appelle *anneau des caractères modulaires de* G *rationnels sur* R. On démontre que cet anneau est canoniquement isomorphe à $M_{\bar{R}[G]}$ et qu'il est isomorphe à l'anneau des caractères modulaires de G au sens de BRAUER. On démontre aussi un théorème de WITT donnant le rang sur **Z** de $M_{k[G]}$, lorsque k est un corps de caractéristique $p \neq 0$.

Le § 4 donne quelques applications. Nous retrouvons en particulier un résultat de BRAUER sur la matrice de Cartan de k[G].

§ 1. — RÉDUCTION MODULO UN IDÉAL PREMIER.

1.1. — Soit R un anneau commutatif noethérien intègre de dimension 1, soit R′ le corps des fractions de R et soit j_R l'application canonique de R dans R′. Soit A une R-algèbre de type fini comme module sur R et soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de R; on pose $A' = R' \otimes_R A$, $\bar{A} = A/\mathfrak{p}A$ et on considère le foncteur

$$E \rightsquigarrow R/\mathfrak{p}R \otimes_R E$$

de M_A dans $M_{\bar{A}}$.

Lemme 1.2. — Si $R_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau de valuation discrète, il existe un* *homomorphisme* $\mathfrak{p}^! : M_A \to M_{\bar{A}}$ *tel que*

$$\mathfrak{p}^!([E]) = [E \otimes R/\mathfrak{p}R] - [\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{p}R, E)],$$

pour tout module E *de* M_A .

En effet, si $R_\mathfrak{p}$ est de valuation discrète

$\mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{p}R, E) = \mathrm{Tor}_i^R(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, E_\mathfrak{p}) = O$ si $i > 1$; la proposition résulte alors immédiatement de (I, 3.6).

Lemme 1.3. — Sous les hypothèses du lemme (1.2), on a en désignant par $i_\mathfrak{p}$ *l'injection canonique de* A *dans* $A_\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p}^! = (\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})^! \circ (i_\mathfrak{p})^!$$

Proposition 1.4 (Brauer, Swan). — *Si* $R_\mathfrak{p}$ *est un anneau de valuation discrète ,il existe un homomorphisme* $d_{A,\mathfrak{p}}$ *de* M_A *dans* $M_{\bar{A}}$ *caractérisé par la relation* $d_{A,\mathfrak{p}} \circ j_R^! = \mathfrak{p}^!$.

En effet, puisque $j_R^!$ est surjectif, il suffit de prouver que $\ker(\mathfrak{p}^!)$ $\ker(j_R^!)$. D'après (III, 5.2), $\ker(j_R^!)$ est engendré par les A-modules simples Soit E un tel module alors Supp(E) est un idéal maximal de R, soit $\mathfrak{q}$ cet idéal.

Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, il est immédiat que $\mathfrak{p}^!([E]) = O$.

Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, alors $(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})^!([E_\mathfrak{p}]) = E_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}] -$

$$[\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})].$$

Soit Π une uniformisante de $R_\mathfrak{p}$, de la suite exacte

$$O \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \to O$$

on déduit la suite exacte

$$O \leftarrow E_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \leftarrow E_\mathfrak{p} \xleftarrow{\pi} E_\mathfrak{p} \leftarrow \mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, E_\mathfrak{p}) \leftarrow O$$

Comme $E_\mathfrak{p}$ est annulé par π, on a

$$E_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \simeq E_\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, E_\mathfrak{p}).$$

Cela montre que $(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})^!([E_\mathfrak{p}]) = O$ et donc que $\mathfrak{p}^!([E]) = O$, d'après le lemme (1.3). D'où la proposition.

1.5. — Nous allons maintenant donner quelques sorites relatifs à l'application $d_{A,\mathfrak{p}}$. Soit S un anneau commutatif noethérien intègre de dimension 1, soit S′ son corps des fractions et soit j_S l'application canonique de S dans S′. Soit f une injection de R dans S et soit f′ l'injection de R′ dans S′ déduite de f.

On pose $B = S \otimes_R A$, $B' = S' \otimes_S B$, $h = f \otimes 1$ et $h' = f' \otimes 1$.

Soit maintenant $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de S. On suppose que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ est un idéal maximal de R et on désigne par $\bar{h}$ l'homomophisme de $A/\mathfrak{p}A$ dans $B/\mathfrak{q}B$ déduit de h.

On suppose de plus que $R_\mathfrak{p}$ et $S_\mathfrak{q}$ sont des anneaux de valuations discrète.

Lemme 1.6. — Si, en plus des conditions de (1.5), S *est un* R-*module de type fini et si* $\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}^e$, *on a*

(1.6.1) $$d_{A,\mathfrak{p}} \circ h'_! = e\,\bar{h}_! \circ d_{B,\mathfrak{q}}$$

Remarquons d'abord que, puisque S est un R-module de type fini B' (resp. $B/\mathfrak{q}B$) est aussi de type fini sur A' (resp. $A/\mathfrak{p}A$). Les symboles $h'_!$ et $\bar{h}_!$ ont donc un sens.

Soit E un objet de $\mathcal{M}_A$, on a

$h_! \circ j^!_S([E]) = [S' \otimes_R E] = j^!_R \circ h_!([E])$. Donc $d_{A,\mathfrak{p}} \circ h'_! \circ j^!_S = d_{A,\mathfrak{p}} \circ j^!_R \circ h_!$.

D'après (1.4), $d_{A,\mathfrak{p}} \circ j^!_R \circ h_! = \mathfrak{p} \circ h_!$.

D'autre part, pour tout objet F de $\mathcal{M}_B$ libre sur $S_\mathfrak{q}$, on a

$$\mathfrak{p}^! \circ h_!([E]) = [E/\mathfrak{p}E] = [F/\mathfrak{q}^e F] = e\,[F/\mathfrak{q}F] = e.\bar{h}_! \circ \mathfrak{q}^!([F]).$$

On en déduit aisément que $\mathfrak{p}^! \circ h_! = e.\bar{h}_! \circ \mathfrak{q}^!$. D'où finalement

$$d_{A,\mathfrak{p}} \circ h'_! \circ j_S = e.\bar{h}_! \circ \mathfrak{q}^! = e.\bar{h}_! \circ d_{B,\mathfrak{q}} \circ j_S.$$

Comme J_S est surjectif on a démontré (1.6.1).

On a de même :

Lemme 1.7. — Si, en plus des conditions de (1.5), $B_{[h]}$ *est un A-module plat, on a :*

(1.7.1) $$d_{B,\mathfrak{q}} \circ (h')^! = \bar{h}^! \circ d_{A,\mathfrak{p}}$$

Corollaire 1.8. — Si on identifie R *et* $R_\mathfrak{p}$ *à des sous-anneaux de* R', *on a alors :*

(1.8.1) $$d_{A,\mathfrak{p}} = d_{A_\mathfrak{p},\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}$$

Il suffit en effet d'appliquer le lemme précédent avec $S = R_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Corollaire 1.9. — Si R *est un anneau de valuation discrète maximal* $\mathfrak{p}$ *et si on identifie* A *a un sous-anneau du complété* $\hat{A}$ *de* A *pour la topologie* $\mathfrak{p}$*-adique, on a alors*

(1.9.1) $$d_{\hat{A},\mathfrak{p}\hat{A}}\,(h')^! = d_{A,\mathfrak{p}}.$$

Lemme 1.10. — Si $R_\mathfrak{p}$ *est un anneau de valuation discrète et si* A *est une algèbre de groupe fini, alors* $d_{A,\mathfrak{p}}$ *est un homomorphisme d'anneaux.*

En effet, d'après (1.8.1) il suffit de démontrer le lemme lorsque R est un anneau de valuation discrète. Dans ce cas cela résulte immédiatement de ce que $\mathfrak{p}^!$ et $j^!$ sont des homomorphismes d'anneaux.

Remarque 1.11. — Nous avons vu (III, 2.2.2) que $(h')^!$ est un monomorphisme. Grâce à (1.9), on peut donc ramener l'étude de $d_{A,\mathfrak{p}}$ au cas où R est un anneau de valuation discrète complet.

§ 2. — Nombres de décomposition et matrice de Cartan.

2.1. — En plus des hypothèses de (1.1), on suppose que R est un anneau de valuation discrète complet pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique. D'après (1.4) on peut alors définir un homomorphisme $d_{A,\mathfrak{p}} : M_{A'} \to M_{\bar{A}}$ caractérisé par la relation $d_{A,\mathfrak{p}} \circ j^!_R = \mathfrak{p}^!$.

Si aucune confusion n'est à craindre on écrira d au lieu de $d_{A,\mathfrak{p}}$ et $j^!$ au lieu de $(j_R)^!_M$ (cf. III, 1.6).

On suppose que A est libre sur R.

Soit d'autre $\tilde{\mathfrak{p}}^! : P_A \to P_{\bar{A}}$ l'homomorphisme associé au foncteur $E \rightsquigarrow R/\mathfrak{p}R \otimes_R E$ de P_A dans $P_{\bar{A}}$ et soit c_A (resp. $c_{\bar{A}}$) l'homomorphisme de Cartan de A (resp. $\bar{A}$). On rappelle que $\tilde{\mathfrak{p}}^!$ est un isomorphisme (cf. III, 4.6) et on pose $\tilde{d} = j^! \circ c_A \circ (\tilde{\mathfrak{p}}^!)^{-1}$.

Lemme 2.2. — Sous les conditions de (2.1) *on a :* $c_{\bar{A}} \circ \tilde{\mathfrak{p}}^! = \mathfrak{p}^! \circ c_A$.

En effet, pour tout objet E de P_A, on a $c_{\bar{A}} \circ \tilde{\mathfrak{p}}^!([E]) = [E/\mathfrak{p}E] = \mathfrak{p}^! \circ c_A([E])$, puisque A et donc aussi E est libre sur R.

Lemme 2.3. — Sous les conditions de (2.1) *on a :* $d \circ \tilde{d} = c_{\bar{A}}$.

En effet, $d \circ \tilde{d} = d \circ j^! \circ c_A \circ (\tilde{\mathfrak{p}}^!)^{-1} = \mathfrak{p}^! \circ c_A \circ (\tilde{\mathfrak{p}}^!)^{-1} = c_{\bar{A}}$, d'après le lemme (2.2).

2.4. — Puisque R est de valuation discrète M_R est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}$, il existe donc d'après (II, 1.12), une forme bilinéaire θ_A sur $P_A \times M_A$ telle que $\theta_A([E], [F]) = rg_R(\mathrm{Hom}_A(E, F))$, pour tout objet E (resp. F) de P_A (resp. M_A).

On définit de manière analogue (cf. III, 2.1.26) les formes bilinéaires $\theta_{A'}$ et $\theta_{\bar{A}}$.

Proposition 2.5. — Soient $x \in P_A$ *et* $y \in M_A$, *sous les hypothèses de* (2.1) *on a :*

(2.5.1) $$\theta_A(x, y) = \theta_{A'}((j_R)^!_{\mathfrak{p}}(x),\ j^!(x))$$

(2.5.2) $$\theta_A(x, y) = \theta_A(\tilde{\mathfrak{p}}^!(x),\ \mathfrak{p}^!(y)).$$

En effet, soit E (resp. F) un objet de P_A (resp. M_A) et ψ_g (resp. ψ_d) le foncteur $E \rightsquigarrow R' \otimes_R \mathrm{Hom}_A(E, F)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{A'}(E \otimes_R R', F \otimes_R R')$) et soit ψ le morphisme fonctoriel évident de ψ_g dans ψ_d.

On a $\psi_g(A^n) \simeq \psi_d(A^n) = F^n$, et puisque tout objet E de P_A est facteur direct d'un libre on a aussi $\psi_g(E) = \psi_d(E)$ pour tout E. Cela montre que

$$R' \otimes_R \mathrm{Hom}_A(E, F) = \mathrm{Hom}_{A'}(E \otimes_R R', F \otimes_R R')$$

et que

$$\mathrm{rg}_R(\mathrm{Hom}_A(E, F) = \mathrm{rg}_K(\mathrm{Hom}_{A'}(E \otimes_R R', F \otimes_R R'),$$

d'où (2.5.1).

On démontre de la même manière l'égalité (2.5.2) lorsque $x \in P_A$ et $y \in \mathrm{Im}(P'_A \to M_A)$. On achève la démonstration à l'aide du lemme (III, 1.5).

Corollaire 2.6. — En plus des hypothèses de (2.1), on suppose que A' *est une algèbre semi-simple. On peut alors identifier* $P_{A'}$ *et* $M_{A'}$, *et on a*

$$\theta_{A'}(\bar{d}(x), y) = \theta_A(x, d(y)), \tag{2.6.1}$$

quels que soient $x \in P_{\bar{A}}$ et $y \in M_{A'}$.

Soit en effet, E (resp. F) un objet de $P_{\bar{A}}$ (resp. M_A) et soit H un objet de P_A tel que $H \otimes_R R/\mathfrak{p}R \simeq E$ (cf. III, 4.6).

Alors :

$$\begin{aligned} \theta_{A'}(\bar{d}([E]), j^!([F])) &= \theta_A([H], [F]), \text{ d'après (2.5.1).} \\ &= \theta_{\bar{A}}(\mathfrak{p}^!([H]), \mathfrak{p}^!([F]), \text{ d'après (2.6.2).} \\ &= \theta_{\bar{A}}([E], d \circ j^!(([F]), \end{aligned}$$

puisque $d \circ j^! = \mathfrak{p}^!$.

Comme $j^!$ est surjectif, cela achève la démonstration.

Corollaire 2.7. — Sous les hypothèses de (2.6), le sous-groupe Ker(d) *de* M_A, *est l'orthogonal de* $\mathrm{Im}(\bar{d})$ *par rapport à la forme bilinéaire* θ_A.

Cela résulte immédiatement de (2.6.1) et de ce que la forme bilinéaire θ_A est non dégénérée (III, 2.1.27).

Proposition 2.8. — Soit R *un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *et complet pour la topologie* $\mathfrak{p}$*-adique. Soit* R' *le corps des fractions de* R *et soit* A *une* R*-algèbre qui est un* R*-module libre de type fini. On suppose que* $A' = R' \otimes_R A$ *est une algèbre semi-simple. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\det(c_{\bar{A}}) \neq 0$.

b) $\mathrm{Ker}(\bar{d}) = 0$.

c) Im(d) *est d'indice fini dans* $M_{\bar{A}}$.

La propriété *a*) entraîne trivialement la propriété *b*). Puisque la forme θ_{A}, est non dégénérée (cf. III, 2.1.27, il résulte de (2.6.1) que *b*) entraîne *c*). Enfin, puisque $\mathrm{d} \circ \tilde{\mathrm{d}} = \mathrm{c}_{\bar{\mathrm{A}}}$, *c*) entraîne *a*).

Corollaire 2.9. — Soit R *un anneau de valuation discrète d'idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *et de corps de fraction* R′. *Soit* A *une* R-*algèbre qui est un* R-*module libre de type fini. On suppose que* $\mathrm{A}' = \mathrm{R}' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{A}$ *est un produit direct d'algèbres de matrices sur* R′. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\det(\mathrm{c}_{\bar{\mathrm{A}}}) \neq 0$.

b) Im(d) *est d'indice fini dans* $\mathrm{M}_{\bar{\mathrm{A}}}$.

En effet, on plonge R et A dans leur complété $\mathfrak{p}$ -adique et on applique (1.9.1) en remarquant que $(\mathrm{h}')^{!}$ est un isomorphisme.

2.10. — Soit S (resp. $\bar{\mathrm{S}}$) l'ensemble des types de modules simples sur A′ (resp. $\bar{\mathrm{A}}$) et soit pour tout $s \in \mathrm{S}$ (resp. $\bar{s} \in \bar{\mathrm{S}}$), E_s (resp. $\mathrm{E}_{\bar{s}}$) un module simple de type s (resp. $\bar{s}$). On rappelle (cf. III, 2.1) que $([\mathrm{E}_s])_{s \in \mathrm{S}}$ (resp. $([\mathrm{E}_{\bar{s}}])_{\bar{s} \in \bar{\mathrm{S}}}$) est la base canonique de M_{A} (resp. $\mathrm{M}_{\bar{\mathrm{A}}}$). Enfin, si $\mathrm{F}_{\bar{s}}$ est l'enveloppe projective de $\mathrm{E}_{\bar{s}}$, alors $([\mathrm{F}_{\bar{s}}])_{\bar{s} \in \bar{\mathrm{S}}}$ est la base canonique de $\mathrm{P}_{\bar{\mathrm{A}}}$.

On pose $r_s = \mathrm{rg}_{\mathrm{R}'}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{E}_s,\mathrm{E}_s))$ et $r_{\bar{s}} = \mathrm{rg}_{\bar{\mathrm{R}}}(\mathrm{Hom}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathrm{E}_{\bar{s}},\mathrm{E}_{\bar{s}}))$. On désigne par $\mathrm{C}_{\bar{\mathrm{A}}} = (c_{\bar{s},\bar{t}})_{(\bar{s},\bar{t}) \in \bar{\mathrm{S}} \times \bar{\mathrm{S}}}$, $\mathrm{D} = (d_{\bar{s},t})$ et $\tilde{\mathrm{D}} = (\tilde{d}_{t,\bar{s}})$ les matrices de c_{A}, d et $\tilde{\mathrm{d}}$ par rapport aux bases canoniques.

Soit enfin K un corps et C une K-algèbre artinienne; nous dirons que K *décompose l'algèbre* C si le quotient de C par son radical est isomorphe à un produit direct d'algèbres de matrices sur K.

Proposition 2.11. — Soient R *et* A *satisfaisant aux conditions de* (2.8.). *On a alors avec les notations de* (2.10) : $r_s\, d_{s,\bar{t}} = d_{\bar{t},s}\, r_{\bar{t}}$.

En effet :

$$r_{\bar{t}}\, d_{\bar{t},s} = \theta_{\bar{\mathrm{A}}}\ ([\mathrm{F}_{\bar{t}}],\ \mathrm{d}([\mathrm{E}_s])), \text{ d'après } (2.1.28)$$

$$= \theta_{\mathrm{A}'},\ (\tilde{\mathrm{d}}([\mathrm{F}_{\bar{t}}]),\ [\mathrm{E}_s])), \text{ d'après } (2.6.1)$$

$$= \theta_{\mathrm{A}'}\ ([\mathrm{E}_s],\ \mathrm{d}([\mathrm{F}_{\bar{t}}])), \text{ puisque, d'après (III, 2.1.17)}$$

A′ est diagonale.

$$= r_s\, d_{s,\bar{t}}, \text{ d'après (III, 2.1.28).}$$

Cela achève la démonstration.

Proposition 2.12. — Soit R *un anneau de valuation discrète d'idéal maximal* $\mathfrak{p}$. *Soit* R′ *le corps des fractions de* R *et soit* A *une* R-*algèbre qui est de type fini comme module sur* R. *On suppose que* R′ (*resp.* $\mathrm{R}/\mathfrak{p}\mathrm{R}$) *décompose l'algèbre* $\mathrm{A}' = \mathrm{R}' \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{A}$ (*resp.* $\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\mathfrak{p}\mathrm{A}$) (cf. 2.10) *et que* A′ *est semi-simple. On a alors avec les notations de* (2.10) : $\mathrm{C}_{\bar{\mathrm{A}}} = \mathrm{D} \cdot {}^t\mathrm{D}$.

En effet, quels que soient $s \in \mathrm{S}$ (resp. $\bar{s} \in \bar{\mathrm{S}}$), $r_s = 1$ (resp. $r_{\bar{s}} = 1$) puisque R′ (resp. R/pR) décompose A′ (resp. $\bar{\mathrm{A}}$).

Si R est complet la proposition résulte alors immédiatement de (2.11)

Si R n'est pas complet, on plonge R, A, R′, A′ dans leurs complétés. Puisque R′ décompose A′ et que A′ est semi-simple, l'application canonique de $M_{A'}$ dans $M_{\hat{A}'}$ transforme la base canonique de $M_{A'}$ en celle de $M_{\hat{A}'}$. La proposition résulte alors de (1.9).

§ 3. — CARACTÈRES MODULAIRES.

3.1. — Soit G un groupe fini d'ordre n, soit R un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique, soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de R. On suppose que R est complet ou bien qu'il contient les racines n-ièmes de l'unité. On pose $A = R[G]$, on conserve les notations de (1.1) et de (1.2), et on désigne par p la caractéristique de $R/\mathfrak{p}R$.

Lemme 3.2. — Soit G *un groupe fini d'ordre premier à* p *et soit* R *un anneau de valuation discrète complet. Alors* $d_{R[G],\mathfrak{p}}$ *est un isomorphisme qui transforme la base canonique de* $M_{R'[G]}$ *en celle de* $M_{\bar{R}[G]}$.

En effet soit S l'ensemble des types de modules simples sur $\bar{A} = \bar{R}[G]$. Pour tout $\bar{s} \in \bar{S}$, le $\bar{A}$-module $E_{\bar{s}}$ est projectif, puisque la condition $(n,p) = 1$, entraîne que $\bar{A}$ est semi-simple. Il existe alors, d'après (III, 3.6), un A-module projectif $F_{\bar{s}}$ tel que $E_{\bar{s}} = F_{\bar{s}}/\mathfrak{p}F_{\bar{s}}$. Par définition $\tilde{d}([E_{\bar{s}}]) = [R' \otimes_R F_{\bar{s}}]$. Puisque $d \circ \tilde{d} = c_{\bar{A}} = 1$, il nous suffit, pour prouver le lemme, de montrer que $\tilde{d}$ est surjectif et que, pour tout $\bar{s} \in \bar{S}$, $F'_{\bar{s}} = R' \otimes_R F_{\bar{s}}$ est un module simple.

Soit E un A-modules, puisque $(n,p) = 1$, E est de dimension homologique finie, l'application c_A est donc surjective. Puisque, $\tilde{d} = j^! \circ c_A \circ (\bar{\mathfrak{p}}^!)^{-1}$ et que $j^!$ est surjective, $\tilde{d}$ l'est aussi.

Supposons maintenant qu'il existe des A′-modules non nuls F′ et F″ tels que $F'_{\bar{s}} = F' \oplus F''$. D'après (III, 4.3), il existe des A-modules E′ et E″ libres sur R tels que $F' = R' \otimes_R E'$ et $F'' = R \otimes_R E''$. Soient alors $\bar{E}' = E'/\mathfrak{p}E'$ et $\bar{E}'' = E''/\mathfrak{p}E''$ et soit $a_{\bar{s}}$ (resp. $b_{\bar{s}}$) la coordonnée d'indice $\bar{s}$ de $\bar{E}'$ (resp. $\bar{E}''$) par rapport à la base canonique de $M_{\bar{A}}$. Puisque E′ (resp. E″) est non nul, il existe $\bar{s} \in \bar{S}$ (resp. $\bar{t} \in \bar{S}$) tel que $a_{\bar{s}} \neq 0$ (resp. $b_{\bar{t}} \neq 0$). Alors

$$d([F'_{\bar{s}}]) = d.\tilde{d}([E_{\bar{s}}]) = [E_{\bar{s}}] = d([F']) + d([F'']) = [\bar{E}'] + [\bar{E}''] = \sum_{\bar{t} \in \bar{S}} (a_{\bar{t}} + b)[E_{\bar{t}\bar{s}}].$$ Comme $a_{\bar{t}}$ et $b_{\bar{t}}$ sont des entiers positifs, on aboutit à une contradiction. Cela achève la démonstration.

Corollaire 3.3. Soit G *un groupe fini d'ordre premier à* p. *Si* R′ *décompose* R′[G], *alors* $d_{R[G],\mathfrak{p}}$ *est un isomorphisme qui transforme la base canonique de* $M_{R'[G]}$ *en celle de* $M_{\bar{R}[G]}$.

Il suffit, en effet, de compléter R et d'appliquer (1.9).

Remarque 3.4. — Il résulte du théorème (III, 2.3.13) que les hypothèses de (3.3) sont satisfaites lorsque R contient les racines n-ièmes de l'unité. Mais nous n'utiliserons ce théorème que lorsque G est abélien.

Lemme 3.5. — Soit E' *un objet de* $M_{A'}$ *, alors la fonction* $\chi_{E'} : G \to R'$ *prend ses valeurs dans* R.

En effet, d'après (III, 5.3), il existe un A-module E, libre sur R, tel que $E' = R' \otimes_R E$. Soit $b = (e_i)$ une base de E, alors $b' = (1 \otimes e_i)$ est une base de E'.

Soit $\rho_{E', b'}$ la représentation matricielle de G associée à E' et à b' et soit $g \in G$. Alors $\rho_{E' b'}(g)$ est une matrice à coefficients dans R et cela achève la démonstration.

3.6. — Soit $g \in G$, on dit que g est p-régulier s'il est d'ordre premier à p. Soit $S_p \subset G$ l'ensemble de ces éléments et soit $F_p(G,R)$ l'ensemble des fonctions de S_p à valeurs dans R.

Soit $x \in S_p$ et soit C_x le sous-groupe de G engendré par x. Supposons vérifiées les hypothèses de (3.1), il résulte alors de (3.2) et (3.3) que $d_{R[C_x], \mathfrak{p}}$ est un isomorphisme. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira simplement d_x au lieu de $d_{R[C_x], \mathfrak{p}}$.

Si i_x désigne l'injection canonique de C_x dans G et si e est un élément de $M_{\overline{A}}$ on pose $e_x = d_x^{-1}((i_x)_!(e))$. Soit alors φ_e la fonction $x \rightsquigarrow \chi e_x(x)$ de S_p à valeurs dans R et soit m(R,G) la fonction $e \rightsquigarrow \varphi_e$ de $M_{\overline{R}[G]}$ dans $F_p(R,G)$. Il est immédiat de vérifier que m(R,G) est un homorphisme de groupes abéliens.

Dans ce qui suit nous utiliserons les notations suivantes : pour tout objet $\overline{E}$ un objet de $\mathcal{M}_{\overline{R}[G]}$ on écrit $\varphi_{\overline{E}}$ au lieu de $\varphi_{[\overline{E}]}$; si $\overline{s} \in \overline{S}$, on pose $\varphi_{\overline{s}} = \varphi_{E_{\overline{s}}}$. Enfin on désigne par M(R,G) l'image de l'application m(R,G).

Nous allons maintenant énoncer quelques sorites relatifs à M(R,G) et à l'application m(R,G).

Lemme 3.7. — Soit H *un sous-groupe de* G, *soit* i_H *l'injection canonique de* R[H] *dans* R[G], *soit* E *un objet de* $\mathcal{M}_{\overline{R}[G]}$ *et soit* x *un élément* p-*régulier de* H. *Alors :*

$$\varphi_E(x) = \varphi_{(i_H)_!([E])}(x).$$

Lemme 3.8. — Soit S *un anneau de valuation discrète satisfaisant aux conditions de* (1.6) *et de* (3.1). *On a alors, avec les notations de* (1.6), $m(R,G) = m(S,G) \circ h^{-1}$.

Lemme 3.9. — Pour tout objet E *de* $\mathcal{M}_{R'[G]}$ *et tout* $x \in S_p$, *on a :*

$$\chi_E(x) = \varphi_{d([E])}(x).$$

Lemme 3.10. — Pour tout objet E *de* $M_{\overline{R}[G]}$ *et pour tout* $x \in S_p$, *on a :*

$$\mathrm{Tr}_{E/\overline{R}}(x) = \overline{\varphi_E(x)}.$$

En effet, on peut d'après (3.7) et (3.8) supposer que G est un groupe cyclique d'ordre premier à p et que R est complet. D'après (3.2), il existe un A-module F libre sur R tel que $E = F/\mathfrak{p}F$. Alors $\varphi_E(x) = \mathrm{Tr}_{F/R}(x)$. D'où le lemme.

Théorème 3.11. — *Sous les hypothèses de* (3.1), M(R,G) *est un sous-anneau de* $F_p(G,R)$ *et l'application* m(R,G) *est un isomorphisme d'anneaux.*

En effet, l'application $E \rightsquigarrow \varphi_E$ est le composé d'applications qui sont toutes compatibles avec les produits; cela montre que M(R,G) est stable pour la multiplication des fonctions et que m(R,G) est un homomorphisme d'anneaux.

Cet homomorphisme est surjectif puisque M(R,G) est engendré par les φ_E pour E variable.

Montrons que m(R,G) est injectif. Soit $\bar{R}'$ une extension de $\bar{R}$ qui décompose $\bar{R}[G]$, il existe alors un anneau de valuation discrète S, $S \supset R$, complet admettant $\bar{R}'$ comme corps des restes (cf. [15], O_{III}, 10.3.1). D'après (3.8) il suffit de montrer que m(S,G) est injectif. Cela va résulter du lemme suivant.

Lemme 3.12. — *Soient* R *et* G *satisfaisant aux conditions de* (3.1), *si* $\bar{R}$ *décompose l'algèbre* R[G], *l'application*

$$R \otimes_{\mathbf{Z}} M_{\bar{R}[G]} \to M(R,G)$$

est injective.

Soit, en effet, x un élément du noyau de cette application. On a alors avec les notations de (2.10),

$$x = \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} a_{\bar{s}}[E_{\bar{s}}],\ a_{\bar{s}} \in R, \text{ et donc } \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} a_{\bar{s}} \varphi_{\bar{s}} = O.$$

Supposons que les $a_{\bar{s}}$ ne soient pas tous nuls, et soit $\bar{t} \in \bar{S}$ tel $a_{\bar{t}}$ soit de valuation minimum. En divisant les $a_{\bar{s}}$ par $a_{\bar{t}}$ et en passant aux corps des restes on obtient une relation non triviale entre les $\varphi_{\bar{s}}$:

(3.12.1)
$$\sum_{\bar{s} \in \bar{S}} b_{\bar{s}} \bar{\varphi}_{\bar{s}} = O.$$

Soit maintenant $y \in G$; y peut se mettre sous la forme $y = y_s \cdot y_u = y_u \cdot y_s$ où y_s est p-régulier et où y_u est d'ordre p^m. Soit E un objet de $M_{\bar{R}[G]}$ et ρ_E une représentation matricielle de G associée à E; alors toutes les valeurs propres de $\rho_E(y_n)$ sont égales à 1 et puisque y_s et y_u commutent, on a $\mathrm{Tr}_{E/\bar{R}}(y) = \mathrm{Tr}_{E/\bar{R}}(y_s)$. Il résulte alors de (3.10) et (3.12.1) qu'il existe une relation non triviale entre les fonctions $\mathrm{Tr}_{E_{\bar{s}}/\bar{R}}$:

$$\sum_{\bar{s} \in \bar{S}} b_{\bar{s}} \mathrm{Tr}_{E_{\bar{s}}/\bar{R}} = O.$$

Puisque $\bar{R}$ décompose l'algèbre $\bar{R}[G]$, on peut trouver, pour tout $\bar{s} \in \bar{S}$, un élément $e_{\bar{s}}$ de $\bar{R}[G]$ tel que $\mathrm{Tr}_{E_{\bar{s}}/\bar{R}}(e_{\bar{s}}) = 1$ et tel que $\mathrm{Tr}_{E_{\bar{t}}/\bar{R}}(e_{\bar{s}}) = O$ si $\bar{s} \neq \bar{t}$. On a donc une contradiction et cela achève la démonstration du lemme (3.12).

Lemme 3.13. — Soit σ un automorphisme de R *et soit* $\bar\sigma$ *l'automorphisme de* $\bar{R}$ *associé à* σ. *Soit* $\bar{E}$ *un objet de* $M_{\bar{R}[G]}$ *et soit* g *un élément* p*-régulier de* G, *alors* $\sigma\,(\varphi_{\bar{E}}(g)) = \varphi_{\bar{E}^{\bar\sigma}}\,(g)$.

En effet, posons $\bar{F} = \bar{E}^{\bar\sigma}$, on vérifie immédiatement que $\sigma\,([\bar{E}]_g) = [\bar{F}]_g$ Le lemme résulte alors de (III, 2.2.9).

3.14. — Soit G un groupe fini d'ordre n et soit R un anneau de valuation discrète satisfaisant aux conditions de (3.1). Soit $\mathbf{Q}_n$ le corps des racines n-ièmes de l'unité sur $\mathbf{Q}$ et soit G'_R le groupe de Galois de $\mathbf{Q}_n$ sur $\mathbf{Q}_n \cap R'$. Soit σ un automorphisme de R et σ' son image dans G'_R. Soit x un élément p-régulier de G et soit $y = x^{\sigma'}$ (cf. 2.3.1). Comme x et y engendrent le même sous-groupe cyclique de G on a, avec les notations de (3.6), $[\bar{E}]_x = [\bar{E}]_y$, quel que soit l'objet $\bar{E}$ de $M_{\bar{R}[G]}$. Il résulte de (III, 2.3.11) et de (3.13) que

$$\varphi_{\bar{E}^{\bar\sigma'}}(x) = \sigma\,(\varphi_{\bar{E}}(x)) = \varphi_{\bar{E}}(x^{\sigma'}).$$

Lemme 3.15. — Sous les hypothèses et avec les notations de (3.14) *les fonctions* $\varphi \in M(R,G)$ *sont constantes sur les* G'_R*-classes* p*-régulières de* G.

Lemme 3.16. — L'application $1 \otimes_{\mathbf{Z}} d : R' \otimes_{\mathbf{Z}} M_{R'[G]} \to R' \otimes_{\mathbf{Z}} M_{\bar{R}[G]}$ *est surjective.*

Soit a une G'_R-classe p-régulière de G et soit d_a la fonction égale à 1 sur a et nulle ailleurs. D'après (III, 2.3.12), $d_a$est élément de $R' \otimes_{\mathbf{Z}} M_{R'[G]}$ et donc de $R' \otimes_{\mathbf{Z}} M(R,G)$, d'après (3.9).

Soit $C_{G'_R,\,p}$ l'ensemble des G'_R-classes p-régulières de G et soit $c = \mathrm{Card}(C_{G'_R},p)$. On a donc montré que

$$\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}\,(M_{\bar{R}[G]}) = \dim_{R'}(R' \otimes_{\mathbf{Z}} M(R,G) \geqslant c.$$

D'après (3.15), $\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}(M_{\bar{R}[G]}) \leqslant c$. Cela démontre que $\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}\,(M_{\bar{R}[G]}) = c$ et achève la démonstration du lemme.

Nous avons de plus démontré le résultat suivant :

Lemme 3.17. — Avec les hypothèses et les notations de (3.14), *on a* $\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}\,(M_{\bar{R}[G]}) = \mathrm{Card}(C_{G'_R},p)$, $C_{G'_R,p}$ *désignant l'ensemble des* G'_R *classes* p*-régulières de* G.

Corollaire 3.18. — Soit G *un groupe fini d'ordre* n, *soit* k *un corps de caractéristique* p *contenant le corps* k_n *des racines* n*-ièmes de l'unité. Alors, l'injection canonique de* $M_{k_n[G]}$ *dans* $M_{k[G]}$ *est un isomorphisme.*

En effet, il suffit de démontrer le corollaire lorsque k est algébriquement clos.

Soit R_n l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}_n$ et soit $\mathfrak{p}'$ un idéal maximal de R_n contenant p. Soit $R = (R_n)_{\mathfrak{p}}$, le corps des restes de R est isomorphe à k_n. Il résulte alors de (3.17) que le rang de $M_{k_n[G]}$ sur $\mathbf{Z}$ est égal au nombre de classes p-régulières de G. Comme le rang de $M_{k[G]}$ est au plus égal à ce nombre et que l'application $M_{k_n[G]} \to M_{k[G]}$ est injective, on en déduit que $rg_{\mathbf{Z}}(M_{k[G]}) = rg_{\mathbf{Z}}(M_{k_n[G]})$ et donc d'après (III, 2.2.14, b) l'application canonique de $M_{k_n[G]}$ dans $M_{k[G]}$ est un isomorphisme puisque k_n est fini.

Corollaire 3.19. — *Soit* G *un groupe fini d'ordre* n *et soit* k *un corps de caractéristique* p. *Soit* k_n *le corps des racines* n*-ièmes de l'unité sur* $\mathbf{F}_p$ *et soit* $k' = k \cap k_n$. *Alors l'homomorphisme canonique de* $M_{k'[G]}$ *dans* $M_{k[G]}$ *est un isomorphisme.*

Soit k″ la clôture algébrique de k et soit Ω_k (resp. $\Omega_{k'}$) le groupe des k-automorphismes (resp. k′-automorphismes) de k″. Soit F un k[G]-module semi-simple et soit $E = k'' \otimes_k F$; alors quel que soit $\sigma \in \Omega_{k'}$, $E = E^{\sigma}$. En effet, supposons qu'il existe $\sigma \in \Omega_k$ tel que $E\sigma$ ne soit pas isomorphe à E. D'après (3.18) E^{σ} ne dépend que de l'image de σ' de σ dans le groupe de Galois G'_k de k_n sur k′. Alors, il existe $\tau \in \Omega_k$ dont l'image dans G'_k est égale à σ', cela montre que $E^{\tau} \simeq E^{\sigma}$ n'est pas isomorphe à E. Cela est impossible (III, 2.2.10).

Puisque k′ est fini, E provient donc d'un k′[G]-module semi-simple (III, 2.2.14.b), soit donc $E = k'' \otimes_{k'} E'$. Alors $E = k'' \otimes_k (k \otimes_{k'} E')$ mais $E = k'' \otimes_k F$, comme F et $k \otimes_{k'} E'$ sont semi-simples ils sont isomorphes (cela résulte par exemple de (III, 2.1.3) et de (III, 2.2.2)); cela montre donc que tout module semi-simple sur k[G] provient d'un k′[G]-module semi-simple et cela achève la démonstration d'après (III, 2.2.13).

Théorème 3.20. (Witt [22]). — *Soit* G *un groupe fini d'ordre* n, *soit* k *un corps de caractéristique* p, *soit* k_n *le corps des racines* n*-ièmes de l'unité sur* $\mathbf{F}_p$ *et soit* $k' = k \cap k_n$. *Soit* G_k *le groupe de Galois de* k_n *sur* k′ *et soit* $\Sigma_{G_k, p}$ *l'ensemble des* G_k*-classes* p*-régulières de* G. *Soit* $\overline{S}$ *l'ensemble des types de modules simples sur* k[G]. *Alors :* $\mathrm{Card}(\overline{S}) = \mathrm{Card}(\Sigma_{G_k,p})$.

En effet, d'après le lemme (3.19), on peut supposer $k = k'$. Soit alors $\mathbf{Q}_n$ le corps des racines n-ièmes de l'unité et soit R_n l'anneau des entiers $\mathbf{Q}_n$ et soit R un localisé de R_n en idéal maximal $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ contenant de p. Soit $S = (R)^{G_k}$, on vérifie que S est un anneau de valuation discrète admettant k′ comme corps des restes. Le théorème résulte alors de (3.17).

Définitions 3.21. — Soit G un groupe fini et soit R un anneau de valuation discrète satisfaisant aux conditions de (3.1). On appellera « *anneau des caractères modulaires de* G *rationnels sur* R » l'anneau M(R, G). On a démontré que cet anneau est canoniquement isomorphe à $M_{R[G]}$.

Si on se donne seulement G et p, on peut quel que soit le corps k de caractéristique p trouver un anneau de valuation discrète R satisfaisant aux conditions de (3.1) et admettant k comme corps des restes. Soit n l'ordre de G, supposons que k contienne le corps k_n des racines n-ièmes de l'unité F_p. Donnons-nous plongement Π_R de $\mathbf{Q}_n \cap R'$ (cf. 3.14) dans $\mathbf{C}$.

L'application $E \rightsquigarrow \Pi_R \circ \varphi_E$ définit donc un isomorphisme de $M_{k[G]}$ noté Π_R sur un sous-anneau $M(\Pi_R, G)$ de l'anneau $F_p(G, \mathbf{C})$ des fonctions de S_p à valeurs dans $\mathbf{C}$ (cf. 3.6).

On vérifie à l'aide (3.8) et (3.19) que ce sous-anneau ne « dépend » que de p (et de G). C'est cet anneau que BRAUER a appelé « *anneau des caractères modulaires de* G", on le désignera par $M_{G,p}$.

Remarque 3.22. — Soit maintenant $\Pi(G, k)$ l'ensemble des isomorphismes de $M_{k[G]}$ dans $M_{G,p}$ du type Π_R, pour R et Π_R variables et soit G_{n_0} le groupe de Galois de k_n sur F_p. D'après (3.13) G_{n_0} opère sur $\Pi(G, k)$ on vérifie facilement qu'il y opère transitivement, par exemple lorsque G est un groupe cyclique d'ordre q, q étant un nombre premier G_{n_0} opère sans points fixes sur $\Pi(G, k)$.

D'autre part, un plongement Π_R définit un isomorphisme α_R du groupe des racines n-ièmes de l'unité de k dans le groupe des racines de l'unité de C, d'ordre premier à p. Soit $\overline{E}$ un objet de $M_{\overline{R}[G]}$, on se propose de calculer $\Pi_R \circ \varphi_{\overline{E}}$. Soit alors $x \in G$, x p-régulier (III, 2.3.1) soit C_x le sous-groupe cyclique de G engendré par x et soit i_x l'injection canonique de C_x dans G, d'après (3.7),

$$\varphi_{\overline{E}}(x) = \varphi_{(i_x)_!\,[\overline{E}]}(x).$$

Pour calculer $\varphi_{\overline{E}}$ on peut donc supposer que G est un groupe cyclique engendré par x. Dans ce cas $\overline{E}$ est de la forme $\overline{E} = \bigoplus_i \overline{F}_i$, $\overline{F}_i$ étant de dimension 1 sur k. Alors $\overline{\mathrm{Tr}_{\overline{F}_i}/k(x) = \varphi_{\overline{F}_i}(x)}$, est une racine n-ième de l'unité de k, cela montre que $\Pi_R \circ \varphi_{\overline{F}_i}(x) = \alpha_R(\varphi_{\overline{F}_i}(x))$. Si on remarque que les $\overline{\varphi_{\overline{F}_i}(x)}$ sont les valeurs propres de x dans une représentation $\rho_{\overline{E}}$ de G associée à $\overline{E}$, on retrouve la définition de BRAUER.

§ 4. — APPLICATIONS.

Proposition 4.1. (*Brauer*). — *Soit G un groupe fini, soit k un corps et soit* $C_{k[G]}$ *la matrice de Cartan de* k[G]. *Alors* $\det(C_{k[G]}) \neq 0$.

Si k est de caractéristique nulle, c'est immédiat puisque k[G] est semi-simple.

Si k, est de caractéristique p, $p \neq 0$, il existe un anneau de valuation discrète complet R d'inégale caractéristique et de corps des restes k

Soit R' le corps des fractions de R. Il résulte de (3.15) que $\mathrm{Im}(d : M_{R[G]} \rightsquigarrow M_{k[G]})$ est d'indice fini dans $M_{k[G]}$. La proposition résulte alors de (2.8).

Remarque 4.2.1. — Soit P un objet de $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}[G]}$, d'après ([20], Th 8.1) ou ([11], prop. 1) $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} P$ est libre sur $\mathbf{Q}[G]$, alors, quel que soit le corps k, $k \otimes_{\mathbf{Z}} P$ est libre sur $k[G]$.

C'est immédiat si k est de caractéristique nulle. Si $k = \mathbf{F}_p$ on a : $c_{\mathbf{F}_p[G]}([P/pP]) = d \circ j([P]) = d([\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} P]) = (\mathbf{F}_p[G])^m$ puisque $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} P$ est libre sur $\mathbf{Q}[G]$; donc P/pP est libre sur $\mathbf{F}_p[G]$, d'après (III, 2.1.21) et (4.1). D'où le résultat si k est de caractéristique non nulle.

Remarque 4.2.2. — Brauer démontre (cf. [8], § 7) que l'application d est surjective lorsque k contient les racines n-ièmes de l'unité sur F_p. Il utilise pour cela sa caractérisation des caractères, et donc la théorie des caractères induits.

Indiquons brièvement la démonstration de ce résultat. Il est immédiat de vérifier que d est surjectif lorsque G est un groupe cyclique d'ordre premier à la caractéristique p de k et lorsque G est un p-groupe. On démontre alors que d est surjectif lorsque G est un groupe élémentaire (cf. [20], 4) on passe alors au cas général à l'aide du théorème (4.1) et de la proposition (3.1) de [20].

4.3. — Soit G un groupe fini d'ordre n et soit R un anneau de valuation discrète satisfaisant aux conditions de (3.1). Nous reprenons les notations de (3.1).

Soit alors $\bar{\bar{S}}$ (resp. S) l'ensemble des types de modules simples sur $\bar{A} = \bar{R}[G]$ (resp. $A' = R'[G]$), soit $E_{\bar{s}}$ un module simple de type s et soit $F_{\bar{s}}$ l'enveloppe projective de $E_{\bar{s}}$. On pose $\Phi_{\bar{s}} = \varphi_{F_{\bar{s}}}$ et $\varphi_{\bar{s}} = \varphi_{E_{\bar{s}}}$. Soit $s \in S$ et soit E_s un A'-module simple de type s, on pose $\chi_s = \chi_{E_s}$. Soit, enfin G_p l'ensemble des éléments p-réguliers de G (cf. III, 2.3.1).

Lemme 4.4. — Supposons que R' *décompose l'algèbre* R'[G] (cf. III, 2.3.13). *On a alors avec les notations de* (2.10) *et* (3.4).

$$\chi_s(x) = \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} d_{\bar{s}}, s\, \varphi_{\bar{s}}(x)$$

et

$$\Phi_{\bar{s}}(x) = \sum_{s \in S} d_{\bar{s}}\, s\, \chi_s(x)$$

quel que soit $x \in G_p$.

En effet, cela résulte immédiatement de (2.12) et de (3.9).

Proposition 4.5. — Soit E *un objet de* $P_{\bar{R}[G]}$ *et soit* f_E *la fonction de* G *à valeurs dans* R *telle que* $f_E(x) = \varphi_E(x)$, *si* $x \in G_p$ *et* $f_E = O$ *si* $x \in G_p$ *Alors* f_E *est un caractère modulaire de* G *rationnel sur* R.

En effet, on peut d'après (3.8) supposer R complet. Nous allons alors montrer que $f_E = \chi_{\tilde{d}([E])}$.

Si $x \in G_p$ on a $f_E(x) = \varphi_E(x) = \varphi_{d \circ \tilde{d}([E])}(x) = \chi_{\tilde{d}([E])}(x)$. Montrons que $\chi_{\tilde{d}([E])}(x) = O$ si $x \notin G_p$.

Lemme 4.6. — Soit F *un objet de* $P_{\bar{R}[G]}$. *Si* R *est complet, alors* $\chi_{\tilde{d}([F])}(x) = O$, *si* $x \notin G_p$.

Soit x un tel élément et soit C_x le sous-groupe cyclique de G engendré par x et soit i_x l'injection canonique de C_x dans G, comme d et $(i_x)_!$ commutent et que $E[i_x]$ est C_x projectif, il suffit pour démontrer le lemme de supposer G cyclique. Dans ce cas $G = G_1 \times G_2$, où G_1 (resp. G_2) est le sous-groupe de G formé des éléments d'ordre p^m (resp. des éléments p-réguliers de G).

Soit maintenant E_i, i = 1, 2, un objet de $\mathcal{M}_{\bar{R}[G_i]}$, la projection G sur G_i définit sur E_i une structure de R[G]-module; lorsque nous parlerons du $\bar{R}[G]$-module E_i c'est toujours cette structure de $\bar{R}[G]$-module que nous considèrerons.

Puisque tout module simple sur $\bar{R}[G_1]$ est isomorphe à $\bar{R}$ sur lequel G_1 opère trivialement, il résulte de ([5], § 7, prop. 8) que tout module simple sur $\bar{R}[G]$ est simple sur $\bar{R}[G_2]$ et réciproquement. Soit alors E un tel module, soit F son enveloppe projective dans $M_{\bar{R}[G]}$ et soit $F' = E \otimes \bar{R}[G_1]$. Montrons que $F = F'$. En effet, F′ est projectif car il est facteur direct de $\bar{R}[G]$ (G_2 étant d'ordre premier à p, l'algèbre $\bar{R}[G_2]$ est semi-simple et donc E est facteur direct de $\bar{R}[G_2]$ et F′ est facteur direct de $\bar{R}[G_2] \otimes_{\bar{R}} \bar{R}[G_1]$ $= \bar{R}[G]$), d'après ([5], § 7, th. 3) on voit que E est isomorphe au quotient de F′ par son radical, l'application $F' \rightsquigarrow E$ ainsi défini est donc essentielle, donc $F = F'$.

Soit $g \in G$, $g = (g_1, g_2)$ alors $\chi_F(g) = \chi_E(g)\, \chi_{\bar{R}[G_1]}(g)$ or $\chi_{\bar{R}[G]}(g)$ $= \chi_{\bar{R}[G_1]}(g_1) = 0$ si g_1 n'est pas l'élément neutre de G_1 c'est-à-dire si g n'est pas p-régulier. Cela démontre le lemme lorsque F est un projectif indécomposable, donc quel que soit F d'après (III, 2.1.19).

4.9. — Soit maintenant $F(G_p, R')$ l'anneau des fonctions sur l'ensemble G_p des éléments p-réguliers de G et à valeurs dans R′.

L'application $(f, h) \rightsquigarrow (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g \in G_p} f(g^{-1})h(g)$

de $F(G_p, R') \times F(G_p, R')$ dans R′, définit une forme bilinéaire sur $F(G_p, R') \times F(G_p, R')$. Soit $\theta'_{R[G]}$ cette forme.

Soit d'autre part f_M (resp. f_P) l'application $E \to \varphi_E$ de $M_{\bar{R}[G]}$ (resp. $P_{\bar{R}[G]}$) dans $F(G_p, R')$.

Théorème 4.10. — Soit G *un groupe fini d'ordre* n *et* R *un anneau de valuation discrète satisfaisant aux conditions de (3.1) soit* R′ *le corps des fractions de* R *et soit* $\bar{R}$ *son corps des restes. Alors l'application bilinéaire* $\theta_{\bar{R}[G]}$ *de* $P_{\bar{R}[G]} \times M_{\bar{R}[G]}$ *dans* **Z** *définie en* (2.1.26) *est l'image réciproque de la forme* $\theta_{R[G]}$ *relativement à* f_P *et à* f_M (cf. (4.9)).

Comme dans (III, 2.3.8) il suffit de vérifier que, pour tout objet E de $P_{\bar{R}[G]}$ on a :

$$\theta'_{\bar{R}[G]}(\varphi_E, 1) = \theta_{\bar{R}[G]}([E], 1).$$

On peut d'autre part supposer R complet (cf. 3.10). Alors :

$$\theta_{\bar{R}[G]}([E], 1) = \theta_{R'[G]}(\tilde{d}([E]), 1), \text{ d'après (2.6)}$$

$$= (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g \in G} \chi_{\tilde{d}([E])}(g^{-1})$$

$$= (1/\mathrm{Card}(G)) \sum_{g \in G_p} \varphi_E(g^{-1}),$$

d'après (4.8) et (3.9). Cela achève la démonstration.

Corollaire 4.11. (Relations d'orthogonalité). — Soient G *et* R *satisfaisant aux conditions de* (3.1); *on a alors avec les notations de* (4.3) *et de* (III, 2.1.15)

$$\sum_{g \in G_p} \Phi_{\bar{s}}(g^{-1}) \varphi_{\bar{t}}(g) = r_{\bar{s}} (\mathrm{Card}(G)) \quad \text{si } \bar{s} = \bar{t}$$

$$= 0 \qquad \text{si } \bar{s} \neq \bar{t}$$

quels que soient $\bar{s}$ et $\bar{t} \in \bar{S}$.

C'est une conséquence immédiate de (4.10) et de (III, 2.1.18).

Corollaire 4.12. — Soient R *et* G *satisfaisant aux conditions de* (3.1). *Soit* g *un élément p-régulier de* G *et soit* n(g) *le cardinal du normalisateur de la* G'_R*-classe de* g (cf. 3.14). *On a alors avec les notations de* (4.3).

$$\sum_{\bar{s} \in \bar{S}} (1/r_{\bar{s}}) \Phi_{\bar{s}}(g^{-1}) \varphi_{\bar{s}}(g') = n(g) \quad si\ g = g'$$

$$= 0 \quad si\ g \neq g'$$

quels que soient g et $g' \in G_p$.

En effet, soit d_g la fonction égale à 1 sur la G_R'-classe de g et nulle ailleurs. D'après (3.17) d_g est un élément de $R' \otimes_{\mathbf{Z}} M(R, G)$, d_g est donc de la forme $d_g = \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} n_{\bar{s}} \varphi_{\bar{s}}$. D'après (4.10) on a donc

$$n_{\bar{s}} = \theta_{\bar{R}[G]}([F_{\bar{s}}], \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} n_{\bar{s}}[E_{\bar{s}}])/r_{\bar{s}} = \theta'_{\bar{R}[G]}(\Phi_{\bar{s}}, d_g)/r_{\bar{s}}.$$

Alors $n_{\bar{s}} = 1/(r_{\bar{s}} n(g))$. Donc $n(g)\, d_g = \sum_{\bar{s} \in \bar{S}} (1/r_{\bar{s}}) \Phi_{\bar{s}}(g^{-1}) \Phi_{\bar{s}}$. Cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN, C. NESBITT et R. TRALL, Rings with minimum condition, Univ. of Mich. Press, 1944.

[2] H. BASS, Projectives modules over algebras, Ann. of Math., 73 (1961), 532-542.

[3] H. BASS et S. SCHANUEL, The homotopy theory of projectives modules, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 425-428.

[4] A. BOREL et J. P. SERRE, Le théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. math. France, 86 (1958), 97-136.

[5] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre 8 : modules et anneaux semi-simples, Paris, Hermann, 1958.

[6] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitres 1 et 2, Paris, Hermann, 1961.

[7] R. BRAUER, On a representation of a group of order g in the field of g-th rooths of unity, Amer. J. of Math., 67 (1945), 461-471.

[8] R. BRAUER, A. characterisation of characters of groups of finite order, Ann. Of Math., 57 (1953), 357-377.

[9] R. BRAUER, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, Math. Zeitschr., 63 (1956), 406-444.

[10] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological algebre, Princeton Univ. Press, 1956 (Princeton Math. Series n° 19).

[11] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, 90 (1962), 323-448.

[12] I. GIORGIUTTI, Modules projectifs sur les algèbres de groupes finis, C. R. Acad. Sciences Paris (1960), 1419-1420.

[13] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., 9 (1957), 119-221.

[14] A. GROTHENDIECK, Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch (1957), non publié.

[15] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Eéments de géométrie algébrique, Paris, Presses Universitaires de France (1960...) (Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques).

[16] D. S. RIM, On projective class groups, Trans. Amer. Math. Soc., 98 (1961), 459-567.

[17] J P. SERRE, Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Séminaire P. Dubreuil, n° 23, 1958.

[18] J. P. SERRE, Groupes proalgébriques, Paris, Presses Universitaires de France, 1960 -(Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques 7).

[19] J. P. SERRE, Corps locaux, Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1296).

[20] R. SWAN, Induced representations and projectives modules Ann. of Math., 71 (1960), 552-578.

[21] R. SWAN, Projective modules over group rings and maximal orders, Ann. of Math., 76 (1962), 55-61.

[22] E. WITT, Die algebraische Structur des Gruppenringes einer endlichen. Gruppe über einem Zahlkörper, J. Crelle 190, (1952), 231-245.

[23] J. ZASSENHAUS, Nëuer Beweis der Endliekkeit der Klassenzahl, Abh. Math. Sim. Univ. Hamburg 12 (1938), 276-288.