ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

M. MENDES

# Sur les crochets de Lagrange

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série*, tome 28 (1964), p. 111-129

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__111_0>

# SUR LES CROCHETS DE LAGRANGE

par M. MENDÈS

*Résumé.* — Exposé systématique des propriétés des crochets de Lagrange, considérés comme coefficients du covariant bilinéaire d'une forme de Pfaff. Application aux transformations canoniques. Généralisations. Démonstration de l'invariant intégral de Poincaré.

Ce mémoire présente les principales propriétés des crochets de Lagrange. Il nous a semblé intéressant de les rassembler : un exposé systématique offre l'occasion de donner certains compléments, d'indiquer des réciproques qui, n'ayant pas d'application pratique, ne sont en général pas énoncées.

C'est ainsi que nous posons la question de savoir si, $r^2$ fonctions de $r$ variables $u$ étant données, qui vérifient les identités fondamentales des crochets, on peut effectivement les considérer comme tels.

Si $2n$ variables conjuguées $q_i$, $p_i$ sont fonctions de $t$ et de $2n$ constantes $u$, le fait pour les crochets relatifs à deux $u$ quelconques d'être indépendants de $t$ constitue une condition à la fois nécessaire et suffisante pour que les $q$, $p$ vérifient un système canonique. Nous tirons de cette propriété une nouvelle démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit canonique.

Signalons encore les généralisations des crochets pour deux variables ou pour plus de deux variables qui correspondent à celles déjà données pour les parenthèses de Poisson (1) et dont la seconde permet de retrouver pour les systèmes canoniques l'invariant intégral de Poincaré $\int\int dp_i\, dq_i$ (2) et ses généralisations.

1. *Définition.* — Étant donnés deux groupes de variables conjuguées $q_i$, $p_i$ $(i = 1, \dots, n)$ dépendant de $r$ paramètres $u_1, \dots, u_r$, on appelle crochet de Lagrange relatif à deux paramètres $u_k$, $u_l$, la quantité

$$\left[u_k, u_l\right] = \sum_i \frac{D(q_i, p_i)}{D(u_k, u_l)} = \frac{\partial q_i}{\partial u_k}\frac{\partial p_i}{\partial u_l} - \frac{\partial q_i}{\partial u_l}\frac{\partial p_i}{\partial u_k}.$$

Ces égalités, mises sous la forme

$$\left[u_k, u_l\right] = \frac{\partial}{\partial u_l}\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k}\right) - \frac{\partial}{\partial u_k}\left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_l}\right),$$

(1) H. LAURENT (J. Liouville, 2$^e$ série, t. XVII, 1872, p. 422), VIVANTI (Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations, p. 270), M. MENDES (J. Math. pures et appl., t. XLII, 1963, p. 103).

(2) Nous utilisons dans tout ce mémoire la convention des indices muets.

mettent en évidence le fait que les crochets peuvent être considérés comme les coefficients du covariant bilinéaire de la forme de Pfaff

$$\omega = p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k} du_k ,$$

et, par conséquent, d'une infinité

$$\Omega = \omega + d\,V,$$

V étant une fonction arbitraire des $u$.

Cette propriété est d'ailleurs en conformité avec les égalités vérifiées par trois crochets quelconques [3]

$$(1) \quad \left[u_k, u_l\right] + \left[u_l, u_k\right] = 0, \qquad \frac{\partial\,[u_l, u_m]}{\partial u_k} + \frac{\partial\,[u_m, u_k]}{\partial u_l} + \frac{\partial\,[u_k, u_l]}{\partial u_m} = 0.$$

2. *Réciproque.* — Réciproquement, étant donnée une forme de Pfaff $U_k\, du_k$, où les U sont des fonctions des $r$ variables $u$, les coefficients de son covariant bilinéaire peuvent-ils être considérés comme des crochets? Autrement dit, peut-on trouver des fonctions $q_i, p_i$ des $u$ vérifiant les relations

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k} = U_k + \frac{\partial V}{\partial u_k} ,$$

V étant une fonction à déterminer?

Il suffit, pour obtenir une solution, la fonction V ayant été choisie arbitrairement, de se donner $n \geqslant r$ fonctions $q$ telles que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(q_1, \ldots, q_r)}{D(u_1, \ldots, u_r)}$ soit différent de zéro; les $r$ premières équations précédentes détermineront alors $p_1, \ldots, p_r$, les autres $p$, s'il y en a, restant arbitraires. On voit la grande indétermination de cette solution.

Signalons, pour $n = r$, la solution évidente $q_i = u_i$, $p_i = U_i$.

Cherchons maintenant si l'on peut obtenir, avec $n < r$, des fonctions $q, p$ répondant à la question. La fonction V ayant été choisie une fois pour toutes, les relations précédentes peuvent se mettre sous la forme plus simple

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k} = U_k \; (k = 1, \ldots, r).$$

Ces $r$ relations sont linéaires aux $p$; les $n$ premières fournissant ces inconnues si l'on connaît les $q$, les $r$-$n$ dernières devront en être des

(3) GOURSAT, Leçons sur le problème de Pfaff, p. 18.

conséquences, ce qui donne les *r-n* relations

$$\delta_l = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} \dots \frac{\partial q_n}{\partial u_1} \mathrm{U}_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_n} \dots \frac{\partial q_n}{\partial u_n} \mathrm{U}_n \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_l} \dots \frac{\partial q_n}{\partial u_l} \mathrm{U}_l \end{vmatrix} = 0 \qquad (l = n+1, \dots, r).$$

On en déduit qu'il existe des relations, indépendantes de l'indice $i$, de la forme

$$\lambda_1^l \frac{\partial q_i}{\partial u_1} + \dots + \lambda_n^l \frac{\partial q_i}{\partial u_n} + \frac{\partial q_i}{\partial u_l} = 0,$$

les $\lambda$ vérifiant

$$\lambda^l_1 \mathrm{U}_1 + \dots + \lambda^l_n \mathrm{U}_n + \mathrm{U}_l = 0.$$

Remplaçant $\lambda^l_n$ par sa valeur

$$-\frac{\lambda^l_1 \mathrm{U}_1 + \dots + \lambda^l_{n-1} \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{U}_l}{\mathrm{U}_n},$$

nous voyons que les $q$ doivent vérifier le système d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$\mathrm{X}_l f = \lambda_1^l \frac{\partial f}{\partial u_1} + \dots + \lambda^l_{n-1} \frac{\partial f}{\partial u_{n-1}} - \frac{\lambda^l_1 \mathrm{U}_1 + \dots + \lambda^l_{n-1} \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{U}_l}{\mathrm{U}_n} \frac{\partial f}{\partial u_n} + \frac{\partial f}{\partial u_l} = 0.$$

L'existence d'une solution pour le problème posé est liée à celle d'une solution autre que *zéro* pour ce système.

Si l'on impose de plus la condition que les $q$ soient des fonctions *indépendantes* des $u$, il faudra que ce système soit jacobien (4) c'est-à-dire que toutes les relations

$$(\mathrm{X}_l \mathrm{X}_{l'} - \mathrm{X}_{l'} \mathrm{X}_l) f = 0$$

soient vérifiées identiquement. Ces $\frac{(r-n)(r-n-1)}{2}$ relations, linéaires et homogènes par rapport aux dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n}$, fournissent $\frac{n(r-n)(r-n-1)}{2}$ équations de condition entre les $(r-n)$ $(n-1)$ quantités $\lambda^l_1, \dots, \lambda^l_{n-1}$ et leurs dérivées premières.

(4) GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2e édition, p. 70.

Ces relations sont en *général* incompathibles si l'on a

$$(r-n)(n-1) < \frac{n(r-n)(r-n-1)}{2},$$

soit

$$r > n + 3 - \frac{2}{n}.$$

Cette inégalité se traduit, comme on le voit facilement, par l'une des conditions suivantes :

$$n = 1,\ r > 2; \qquad n \geqslant 2,\ r \geqslant n + 3.$$

Tenant compte de l'inégalité $r > n$, on voit en définitive que les conditions précédentes sont en général incompatibles si l'on a

$$n = 1,\ r \geqslant 3 \text{ ou } n \geqslant 2,\ r \geqslant n + 3.$$

Le problème proposé aura au contraire une solution, (et même une infinité, étant donné le choix arbitraire de la fonction V qui est dans U), dans les cas suivants :

$$n = 1,\ r = 3; \qquad n \geqslant 2,\ r = n + 1 \text{ ou } n + 2.$$

$r$ étant la donnée du problème, nous résumons ces résultats sous la forme unique

$$n = r - 1 \text{ ou } r - 2,$$

$r$ étant nécessairement $\geqslant 2$.

Dans le cas particulièrement intéressant où le nombre des $q, p$ serait égal à celui des $u$ ($r = 2n$), le problème posé n'aura en général de solution que pour $n = 1$, $r = 2$, et $n = 2$, $r = 4$.

3. *Remarques.* — Faisons quelques remarques d'ordre pratique.

1° Les crochets, avons-nous vu, peuvent être considérés comme les coefficients du covariant bilinéraire d'une forme de Pfaff définie à une différentielle additive $d$V près. On peut toujours choisir V, et d'une infinité de façons, de manière à annuler le coefficient de l'une des différentielles.

2° Supposons que les $q, p$ soient $2n$ fonctions indépendantes de $2n$ variables $u$. Le déterminant $\delta = |[u_k, u_l]|$, dont les éléments sont les crochets, égal au carré du déterminant fonctionnel des $q, p$ par rapport aux $u$, est différent de zéro.

Il sera alors certainement impossible de faire disparaître plus de $n$ différentielles. En effet, si les coefficients de $n + 1$ différentielles étaient nuls, les crochets relatifs à ces variables seraient tous nuls et le déterminant $\delta$, ayant un mineur d'ordre $n + 1$ dont tous les éléments seraient nuls serait lui-même nul, ce qui est en contradiction avec l'indépendance des fonctions $q$, $p$ des $u$.

Plus généralement, si les $q$, $p$ sont $2n$ fonctions indépendantes de $r \geqslant 2n$ variables $u$, un déterminant fonctionnel au moins des $q, p$ par rapport à $2n$ variables $u$ est différent de zéro; soit, par exemple, $\frac{D(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)}{D(u_1, \ldots\ldots, u_{2n})} \neq 0$. On ne peut avoir dans

$$U_1 \, du_1 + \ldots + U_{2n} \, du_{2n}$$

plus de $n$ coefficients nuls. Les coefficients $U_{2n+1}, \ldots, U$, restant quelconques, il sera possible d'avoir au plus $n + (r - 2n) = r - n$ coefficients nuls.

3° La forme de Pfaff génératrice des crochets peut être de la forme

$$\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_p,$$

chacun des termes de la somme ne dépendant que de certaines variables $u$ et de leurs différentielles qui varient d'un terme à l'autre. On pourra annuler, par l'addition d'une différentielle convenable $dV$, les coefficients de $p$ différentielles.

En rapprochant cette remarque de la précédente, on en déduit que, dans le cas où les $q$, $p$ sont fonctions indépendantes de $2n$ variables $u$, $\omega$ ne pourra se décomposer en plus de $n$ termes vérifiant la condition précédente.

En d'autres termes, on ne pourra obtenir plus de $n$ groupes de variables $u$, tels que les crochets relatifs aux variables d'un groupe s'expriment au moyen seulement des variables de ce groupe.

4. *Application.* — Ces considérations s'appliquent en particulier au cas où les $q, p$ sont solution d'un système différentiel; ce sont alors des fonctions de la variable indépendante et de $2n$ constantes d'intégration $u$, indépendantes par rapport à elles en vertu du théorème d'existence de Cauchy.

Prenons comme exemple le problème des deux corps. Les coordonnées de la planète par rapport à trois axes issus du centre du Soleil et leurs dérivées sont fonctions du temps et des six éléments elliptiques $a$, $e$, $\varkappa$, $\theta$, $\omega$, $\varphi$ (notations de Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, t. I, ch. X). Les crochets relatifs à ces éléments elliptiques pris deux à deux sont engendrés par la forme de Pfaff (5).

$$\Omega = -\frac{1}{2} na \varkappa \, da + na^2 \sqrt{1 - e^2} \, (d\omega + \cos \varphi \, d\theta), \quad (n^2 a^3 = C^{te}),$$

somme de trois termes seulement; la réduction maxima est donc atteinte.

Les crochets relatifs à $\varkappa$, $\theta$, $\omega$ sont tous nuls; le mineur de $\delta$ d'ordre *trois* formé par ces crochets a tous ses éléments nuls; cette propriété ne saurait s'étendre à un mineur d'ordre *quatre*.

5. *Changement de variables.* — Considérons deux ensembles de varia-

(5) Bull. astr., t. XX, 1955, p. 155.

bles conjuguées $q_i, p_i$ et $Q_j, P_j$, non nécessairement en même nombre, dépendant des mêmes paramètres $u$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait pour tous les indices $k, l$,

$$[u_k, u_l]_{(q,p)} = \lambda\ [u_k, u_l]_{(Q,P)},$$

où $\lambda$ est un coefficient indépendant des $u$ et où l'on a indiqué en indices les variables au moyen desquelles sont calculés les crochets, se traduit évidemment par toutes les relations

$$\lambda\, P_j \frac{\partial Q_j}{\partial u_k} - p_i \frac{\partial q_i}{\partial u_k} = \frac{\partial T}{\partial u_k},$$

ou la relation unique

$$\lambda\, P_j\, \delta Q_j - p_i\, \delta q_i = \delta T,$$

la lettre $\delta$ se rapportant aux variations des $u$, à l'exclusion des variations des autres quantités dont peuvent dépendre également les $q, p, Q, P$.

Si les crochets $[u_k, u_l]_{(q,p)}$ sont engendrés par la forme de Pfaff $\omega$, les crochets $[u_k, u_l]_{(Q,P)}$ le sont par $\dfrac{\omega}{\lambda}$.

6. *Système canonique.* — Considérons le système canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Son intégrale générale est de la forme

$$q_i = q_i(t, u_1, \ldots, u_{2n}), \qquad p_i = p_i(t, u_1, \ldots, u_{2n}),$$

La seconde formule (1), appliquée aux lettres $t, u_k, u_l$, donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_k, u_l\right] &= \frac{\partial}{\partial u_k}\left[t, u_l\right] - \frac{\partial}{\partial u_l}\left[t, u_k\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_l}\right) - \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{\partial H}{\partial u_k}\right) = 0.\end{aligned}$$

Réciproquement, considérons $2n$ fonctions $q_i, p_i$ de $t$ et de $u_1, \ldots, u_{2n}$, indépendantes par rapport aux $u$, vérifiant toutes les relations

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_k, u_l\right] = 0.$$

On en déduira

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left[t, u_l\right] = \frac{\partial}{\partial u_l}\left[t, u_k\right],$$

d'où des relations de la forme

$$\left[t, u_k\right] = \frac{\partial U(t, u)}{\partial u_k}. \tag{3}$$

Les $q, p$ étant des fonctions indépendantes des $u$, on peut exprimer les $u$ en fonction des $q, p$, et U devient une fonction des $q, p$ et de $t$, que nous désignerons par $H(q, p, t)$. En vertu de

$$\frac{\partial U}{\partial u_k} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial u_k} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial u_k},$$

les relations (3) donnent les $2n$ équations

$$\left(\frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i}{\partial u_k} - \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial u_k} = 0,$$

linéaires et homogènes aux inconnues $\frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}$, dont le déterminant est différent de zéro. On en déduit que les $q, p$ vérifient le système canonique (2).

Nous avons donc obtenu le résultat suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour que $2n$ fonctions conjuguées $q_i$, $p_i$, de $t$ et de $2n$ constantes $u$, indépendantes par rapport à ces constantes, vérifient un système canonique est que les crochets relatifs à deux quelconques de ces constantes soient indépendants du temps.*

7. *Transformations canoniques.* — Les $q, p$ vérifiant le système canonique (2), faisons un changement de variables $(q, p) \rightleftarrows (Q, P)$, pouvant dépendre de $t$.

Proposons-nous d'établir la condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation soit canonique, c'est-à-dire telle que, *quelle que soit la fonction H d'où l'on est parti,* les Q, P vérifient également un système canonique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, quelles que soient les fonctions $q_i, p_i$ de $t$ et de $2n$ paramètres $u$, telles que les crochets $[u_k, u_l]_{(q,p)}$ soient tous indépendants de $t$, les crochets $[u_k, u_l]_{(Q,P)}$ le soient également.

On a, comme on le voit facilement,

$$\left[u_k, u_l\right]_{(Q,P)} = \sum \frac{D(q_j, q_{j'})}{D(u_k, u_l)}\left[q_j, q_{j'}\right]_{(Q,P)} + \sum \frac{D(q_j, p_{j'})}{D(u_k, u_l)}\left[q_j, p_{j'}\right]_{(Q,P)} + \sum \frac{D(p_j, p_{j'})}{D(u_k, u_l)}\left[p_j, p_{j'}\right]_{(Q,P)},$$

les sommes étant étendues à toutes les combinaisons de $j$ et $j'$.

Pour que la transformation considérée soit canonique, il faut et il suffit que le second membre de l'égalité précédente ne dépende pas de $t$ dès que les crochets $[u_k, u_l]_{(q,p)}$ n'en dépendent pas eux-mêmes. Or le fait pour $[u_k, u_l]_{(q,p)}$ d'être indépendant du temps se traduit par l'égalité et la seule égalité

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_j \frac{D(q_j, p_j)}{D(u_k, u_l)} = 0.$$

Il s'ensuit que la condition cherchée ne pourra être vérifiée quelles que soient les fonctions $q, p$ des $u$, (et elle le sera alors effectivement), que si l'on a, $\delta_{jj'}$ étant le symbole de Kronecker,

$$\left[q_j, q_{j'}\right]_{(Q,P)} = \left[p_j, p_{j'}\right]_{(Q,P)} = 0\ , \qquad \left[q_j, p_{j'}\right]_{(Q,P)} = k\,\delta_{jj'}\ ,$$

$k$ étant une constante, qui ne saurait d'ailleurs être nulle, les Q, P étant des fonctions indépendantes des $q, p$.

Si l'on désigne par $\lambda$ l'inverse de $k$, ces relations expriment que la forme de Pfaff

$$\lambda\, P_i\, \delta\, Q_i - p_i\, \delta\, q_i$$

est une différentielle virtuelle exacte.

Nous avons ainsi retrouvé la propriété connue (6) : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit canonique est que la quantité $\lambda\, P_i\, \delta\, Q_i - p_i\, \delta\, q_i$ soit une différentielle virtuelle exacte.*

8. *Emploi des parenthèses de Poisson.* — Les résultats précédents peuvent s'énoncer sous une autre forme en utilisant, au lieu des crochets de Lagrange, les parenthèses de Poisson. Les $q, p$ étant fonctions indépendantes des $u$, on peut exprimer ceux-ci en fonction des $q, p$, et considérer les parenthèses $(u_k, u_l)$.

En vertu des formules de Cauchy

$$[u_k, u_m]\ (u_l, u_m) = \delta_{kl},$$

les parenthèses et les crochets sont simultanément indépendants du temps. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que $2\,n$ fonctions conjuguées $q_i$, $p_i$ de $t$ et de $2\,n$ constantes $u$, indépendantes par rapport à ces constantes, vérifient un système canonique est que les parenthèses relatives à deux quelconques de ces constantes soient indépendantes du temps.*

L'égalité

$$\lambda\, P_i\, \delta\, Q_i - p_i\, \delta\, q_i = \delta\, T$$

étant la condition nécessaire et suffisante pour avoir toutes les relations

$$\lambda\, (u_k\, u_l)_{(q,\,p)} = (u_k,\, u_l)_{(Q,\,P)}\ ,$$

on démontrera la propriété relative aux transformations canoniques par un raisonnement analogue au précédent au moyen de la formule

$$\left(u_k, u_l\right)_{(Q,P)} = \sum \frac{D(u_k, u_l)}{D(q_j, q_{j'})}\left(q_j, q_{j'}\right) + \sum \frac{D(u_k, u_l)}{D(q_j, p_{j'})}\left(q_j, p_{j'}\right) + \sum \frac{D(u_k, u_l)}{D(p_j, p_{j'})}\left(p_j, p_{j'}\right),$$

les parenthèses du second membre étant calculées en considérant les $q$, $p$ comme fonctions des Q, P.

---

(6) Bull. astr., t. XV, 1950, p. 307.

9. *Changement de paramètres.* — Si l'on exprime les $u$ en fonction de nouveaux paramètres $v$, les $q$, $p$ deviennent des fonctions des $v$ et l'on établit immédiatement la relation

$$\left[v_\alpha,\ v_\beta\right] = \frac{\partial u_k}{\partial v_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial v_\beta}\left[u_k,\ u_l\right], \tag{4}$$

la sommation étant étendue à tous les arrangements de $k, l$, ou

$$\left[v_\alpha,\ v_\beta\right] = \sum_{k,l} \frac{D(u_k, u_l)}{D(v_\alpha, v_\beta)}\left[u_k,\ u_l\right],$$

la sommation étant étendue aux combinaisons de ces indices.

La transformée de $\omega$ par ce changement de variables est

$$\omega = V_\alpha(v)\, d\, v_\alpha,$$

avec $V_\alpha = U_k \dfrac{\partial u_k}{\partial v_\alpha}$, et l'on a

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial v_\beta} - \frac{\partial V_\beta}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial u_k}{\partial v_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial v_\beta}\left(\frac{\partial U_k}{\partial u_l} - \frac{\partial U_l}{\partial u_k}\right) = \frac{\partial u_k}{\partial v_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial v_\beta}\left[u_k\,,\ u_l\right] = \left[v_\alpha,\ v_\beta\right].$$

*Les crochets relatifs aux $v$ s'obtiennent donc à partir de la transformée de $\omega$ par le changement de variables.*

10. *Equation de Jacobi.* — Supposons que nous ayons intégré le système canonique (2) par la méthode de Jacobi, c'est-à-dire que nous ayons cherché une intégrale complète $S(q, t, a) + \alpha$ de l'équation (7)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \lambda H\left(q,\ \frac{1}{\lambda}\frac{\partial S}{\partial q}\ ,\ t\right) = h\,,$$

puis résolu par rapport aux $q, p$ les relations

$$\lambda p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\,,\quad b_i = \frac{\partial S}{\partial a_i}\ (i = 1 \ldots, n).$$

Si l'on pose

$$Q_i = a_i,\ P_i = -b_i,$$

on a

$$P_i\, \delta\, Q_i - \lambda\, p_i\, \delta\, q_i = -\delta\, S.$$

La transformation $(q, p) \rightleftarrows (Q, P)$ est donc canonique et, $\alpha$, $\beta$ étant deux quelconques des constantes $a, b$, on a

$$\left[\alpha,\ \beta\right]_{(q,p)} = \frac{1}{\lambda}\left[\alpha\,,\ \beta\right]_{(Q,P)}\,,$$

On en déduit, les crochets étant calculés au moyen des $q, p$,

$$[a_i,\ a_j] = [b_i,\ b_j] = 0,\qquad [a_i,\ b_j] = -\ \frac{\delta_{ij}}{\lambda}\,. \tag{5}$$

---

(7) Bull. astr., t. XVI, 1952, p. 321.

Réciproquement, considérons $2n$ fonctions $q_i, p_i$ de $t$ et de $2n$ constantes conjuguées $a_i, b_i$, en même nombre, vérifiant les relations (5).

On en déduit que l'on a une relation de la forme

$$-b_i \, \delta a_i - \lambda p_i \, \delta q_i = - \delta S(q, a, t).$$

La transformation $(a, -b) \to (q, p)$ est donc canonique et, les $a, b$ vérifiant un système canonique dont la fonction génératrice est nulle, les $q, p$ en vérifient un autre, engendré par une fonction $H(q, p, t)$, donnée par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \lambda H\left(q, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0,$$

ce qui montre que les $a$, $b$ ne sont autres que les constantes introduites par l'intégration du système canonique (2) par la méthode de Jacobi.

Si ce système a été intégré par une méthode quelconque, il s'introduit $2n$ constantes d'intégration $u$ liées aux $a$, $b$ par des relations indépendantes de $t$, et l'on a

$$\left[u_k \, u_l\right] = -\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{D(a_i, b_i)}{D(u_k, u_l)},$$

ce qui montre que tous les crochets relatifs à deux $u$ quelconques sont indépendants du temps.

Cette remarque trouve son application en Mécanique céleste. Les équations du problème des deux corps ayant été intégrées par la méthode de Jacobi, les coordonnées de la planète et leurs dérivées sont fonctions de $t$ et de six constantes $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, s'exprimant sous forme simple en fonction des éléments elliptiques (8); la formule précédente permet de calculer facilement les crochets relatifs à ces éléments.

*II. Invariant intégral.* — Considérons l'intégrale $I = \iint dq_i dp_i$, étendue à une variété à deux dimensions $V_2$ de l'espace des $q$, $p$. Si les $q$, $p$ sont intégrales d'un système différentiel, ce sont des fonctions de $t$ et de $2n$ constantes d'intégration $u$. La valeur de $t$ étant fixée, nous obtiendrons $V_2$ en exprimant tous les $u$ en fonction de deux paramètres $v$, $w$, et nous aurons

$$I = \int\int \sum_i \frac{D(q_i, p_i)}{D(u_k, u_l)} du_k \, du_l = \int\int \sum_i \frac{D(q_i \; p_i)}{D(u_k, u_l)} \frac{D(u_k, u_l)}{D(v, w)} dv \, dw,$$

Si les $q$, $p$ vérifient un système canonique, la somme

$$\sum_i \frac{D(q_i, p_i)}{D(u_k, u_l)} = \left[u_k, u_l\right]$$

est indépendante de $t$, I est un invariant intégral pour le système canonique.

(8) TISSERAND, loc. cit., ch. VII.

Réciproquement, si le système différentiel vérifié par les $q$, $p$ admet I comme invariant intégral, tous les crochets $[u_k, u_l]$ sont indépendants de $t$, donc le système est canonique.

Nous avons ainsi retrouvé une propriété classique.

12. *Tenseurs.* — La formule (4) relative à un changement de variables $v$ montre que les crochets se transforment comme les composantes covariantes d'un tenseur du second ordre.

De même, les $u$ étant considérés comme des fonctions des $q$, $p$, les parenthèses de Poisson se transforment selon la formule

$$(v_\alpha, v_\beta) = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u_k}\frac{\partial v_\beta}{\partial u_l}\left(u_k, u_l\right),$$

c'est-à-dire comme les composantes contrevariantes d'un tenseur du second ordre.

Proposons-nous de chercher un espace, défini par son

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta \qquad (g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}),$$

dans lequel les deux tenseurs sont confondus.

Posant

$$[u_i, u_k] = A_{ik}, \qquad (u_i, u_k) = A^{ik},$$

nous aurons

$$A_{ik} = g_{ii'}\, g_{kk'}\, A^{i'k'}. \tag{6}$$

Compte tenu des relations

$$A_{ik} + A_{ki} = A^{ik} + A^{ki} = 0,$$

on obtient

$$(2n - 1) + (2n - 2) + \ldots + 1 = n(2n - 1)$$

relations entre les

$$2n + (2n - 1) + \ldots + 1 = n(2n + 1)$$

coefficients $g$. On a donc $2n$ relations de moins que d'inconnues.

Les relations entre crochets et parenthèses peuvent s'écrire

$$g_{ii'}\, g_{kk'}\, A^{i'k'} A^{jk} = \delta_{ij}\,.$$

Cherchons d'abord à résoudre les équations (6) dans le *cas canonique* où l'on a

$$A_{ik} = A^{ik} = \varepsilon_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = i + n, \\ 0 \text{ pour } k \neq i + n, \end{cases}$$

cas auquel nous pouvons toujours nous ramener par un choix convenable des $u$, par exemple en prenant $u_i = q_i$, $u_{i+n} = p_i$. Ces équations donnent alors

$$(g_{i1}g_{k,n+1} + \cdots + g_{in}g_{k,2n}) - (g_{i,n+1}g_{k1} + \cdots + g_{i,2n}g_{kn}) = \begin{cases} 0 \text{ pour } i,k \leqslant n \text{ ou } i,k \geqslant n+1, \\ \varepsilon_{ik} \text{ pour } i \leqslant n,\ k \geqslant n+1. \end{cases}$$

Elles admettent en particulier, avec $i \leqslant n$, la solution

$$g_{ii} = \varphi_i(u), \qquad g_{i+n,i+n} = \frac{1}{\varphi_i(u)},$$

tous les autres coefficients étant nuls, ce qui donne

$$ds^2 = \varphi_1 du_1^2 + \ldots + \varphi_n du_n^2 + \frac{du_{n+1}^2}{\varphi_1} + \ldots + \frac{du_{2n}^2}{\varphi_n}.$$

Plus particulièrement encore on pourra prendre

$$ds^2 = du_1^2 + \ldots + du_{2n}^2.$$

cette solution qui donne un espace euclidien était prévisible, les composantes covariantes et contrevariantes étant les mêmes.

On voit donc que l'on a la solution

$$ds^2 = \sum_i \left( dq_i^2 + dp_i^2 \right).$$

Ayant obtenu ainsi une solution dans le *cas canonique,* il suffira, pour des variables $u$ quelconques, d'exprimer le $ds^2$ obtenu en fonction de ces variables.

13. *Première généralisation des crochets.* — Étant données $n$ fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de deux variables $u$, $v$, et des coefficients constants $A_{ij}$ vérifiant toutes les relations $A_{ij} + A_{ji} = 0$, nous poserons

$$\left[ u, v \right] = A_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \; (i, j = 1, \ldots, n),$$

la sommation étant étendue à tous les arrangements deux à deux des indices $i$, $j$, ou

$$\left[ u, v \right] = A_{ij} \frac{D(x_i, x_j)}{D(u, v)},$$

la sommation étant maintenant étendue à toutes les combinaisons deux à deux de ces indices.

Une telle expression constitue un *crochet de Lagrange généralisé,* défini au moyen des coefficients A.

Les identités

$$[u, v] + [v, u] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[ v, w \right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[ w, u \right] + \frac{\partial}{\partial w}\left[ u, v \right] = 0,$$

les crochets étant tous définis au moyen des mêmes coefficients, subsistent.

On a évidemment

$$\left[ u, v \right] = \frac{\partial}{\partial v}\left( A_{ij}\, x_j \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u}\left( A_{ij}\, x_j \frac{\partial x_i}{\partial v} \right).$$

Si l'on considère $r$ paramètres $u_1, \ldots, u_r$, dont dépendent les $x$, on voit que les crochets $[u_k, u_l]$ sont les coefficients du covariant bilinéaire de la forme de Pfaff

$$\omega = A_{ij}\, x_j \frac{\partial x_i}{\partial u_k} du_k \qquad (k=1,\ldots,r),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices $i, j$.

14. *Deuxième généralisation des crochets.* — Étant donnés deux ensembles de variables conjuguées $q_i, p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, dépendant de paramètres $u_1, \ldots, u_{2r}$, nous poserons, avec $r \leqslant n$,

$$\left[u_1, u_2, \ldots, u_{2r}\right] = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \frac{D(q_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_r}, p_{\alpha_r})}{D(u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_{2r})},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons $r$ à $r$ des indices $\alpha$ variant de 1 à $n$.

On aperçoit immédiatement, $k_1, \ldots, k_{2r}$ et $l_1, \ldots, l_{2r}$, étant deux permutations quelconques des nombres $1, \ldots, 2r$, la relation

$$\left[u_{k_1}, \ldots, u_{k_{2r}}\right] = \pm \left[u_{l_1}, \ldots, u_{l_{2r}}\right],$$

le signe + convenant au cas où les deux permutations sont de même classe, le signe — convenant au cas où elles sont de classes différentes.

D'autre part, on a l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left[u_2, \ldots, u_{2r+1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[u_3, \ldots, u_{2r+1}, u_1\right] + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_{2r+1}}\left[u_1, \ldots, u_{2r}\right] = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de démontrer l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{D(q_1,p_1,\ldots,q_r,p_r)}{D(u_2,\ldots\ldots,u_{2r+1})} + \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{D(q_1,p_1,\ldots,q_r,p_r)}{D(u_3,\ldots,u_{2r+1},u_1)} + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_{2r+1}}\frac{D(q_1,p_1,\ldots,q_r,p_r)}{D(u_1,\ldots\ldots, u_{2r})} = 0.$$

Chaque terme du premier membre de cette égalité étant le produit d'une dérivée seconde par $2r-1$ dérivées premières, il suffit de vérifier que celui-ci ne contient aucune dérivée seconde, et cette vérification est immédiate. Le coefficient de $\frac{\partial^2 q_1}{\partial u_1 \partial u_2}$ par exemple ne provient que des deux premiers termes et son coefficient, différence de deux quantités égales à $\frac{D(p_1, q_2, p_2, \ldots, q_r, p_r)}{D(u_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_{2r+1})}$, est nul.

Ces relations montrent que les crochets ainsi définis sont les coefficients de la dérivée extérieure d'une forme extérieure de différentielles (et donc d'une infinité). Si les crochets font intervenir $2r$ variables $u$, cette forme sera de degré $2r-1$.

En particulier, si les $q$, $p$ dépendent de $2n$ paramètres, on a

$$[u_1, \ldots, u_{2n}] = \frac{D(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)}{D(u_1, \ldots\ldots, u_{2n})}.$$

Le déterminant fonctionnel peut ainsi être considéré comme un crochet de Lagrange généralisé au sens actuel. C'est d'ailleurs une fonction des crochets au sens ordinaire, son carré étant égal au déterminant $|[u_k, u_l]|$.

Nous allons montrer qu'il en est de même pour les autres crochets généralisés.

Remarquons d'abord, pour $n = 1$, l'identité relative à quatre paramètres $u, v, w, z$,

$$(7) \qquad [u, v]\,[w, z] - [u, w]\,[v, z] + [u, z]\,[v, w] = 0,$$

qui se généralise, pour $n$ quelconque et $2r$ paramètres $(r>n)$, sous la forme

$$(8) \qquad \sum \left\{ \pm [u_{\beta_1}, u_{\gamma_1}]\,[u_{\beta_2}, u_{\gamma_2}] \ldots [u_{\beta_r}, u_{\gamma_r}] \right\} = 0,$$

le signe + ou — devant être placé devant un terme, selon que la permutation

$$\beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_r, \gamma_r$$

où les $\beta$ et $\gamma$ sont tous différents entre eux, est de classe paire ou impaire.

Posant de façon générale

$$\frac{D(q_\alpha, p_\alpha)}{D(u_\beta, u_\gamma)} = A^\alpha_{\beta\gamma},$$

(8) peut en effet s'écrire

$$\sum \left[ \pm \left( A^1_{\beta_1\gamma_1} + \ldots + A^n_{\beta_1\gamma_1} \right) \ldots \left( A^1_{\beta_r\gamma_r} + \ldots + A^n_{\beta_r\gamma_r} \right) \right] = 0.$$

$n$ étant inférieur à $r$, le premier membre est la somme de termes de la forme

$$A^{\alpha_1}_{\beta\gamma} \ldots A^{\alpha_{r-2}}_{\delta\varepsilon} A^{\alpha_r}_{\lambda\varphi} A^{\alpha_r}_{\mu\nu},\ A^{\alpha_1}_{\beta\gamma} \ldots A^{\alpha_{r-2}}_{\delta\varepsilon} A^{\alpha_r}_{\lambda\mu} A^{\alpha_r}_{\varphi\nu},\ A^{\alpha_1}_{\beta\gamma} \ldots A^{\alpha_{r-2}}_{\delta\varepsilon} A^{\alpha_r}_{\lambda\nu} A^{\alpha_r}_{\varphi\mu},$$

chacun affecté de son signe, les facteurs non écrits étant les mêmes dans les trois termes; une telle somme est nulle d'après (7).

Supposons maintenant $n \geqslant r$. Nous nous proposons de démontrer que le premier membre de (8) représente maintenant $[u_1, \ldots, u_{2r}]$.

Nous utiliserons pour cela la méthode de démonstration par récurrence.

Pour $r = n$, ce crochet se réduit au déterminant fonctionnel

$$\frac{D(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)}{D(u_1, \ldots\ldots, u_{2n})},$$

qui, comme on le voit facilement, peut se développer sous la forme

$$\sum \left( \pm A^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1} \ldots A^{\alpha_n}_{\beta_n\gamma_n} \right).$$

En ajoutant une quantité nulle d'après la remarque précédente, on trouve dans ce cas

$$[u_1, \ldots, u_{2n}] = \sum_{\beta, \gamma} \left\{ \pm [u_{\beta_1}, u_{\gamma_1}] \ldots [u_{\beta_n}, u_{\gamma_n}] \right\}.$$

Supposons que nous ayons démontré, pour $2n$ variables $q, p$ et $2r$ paramètres $(r \leqslant n)$, la formule

$$\Big[u_1, \ldots, u_{2r}\Big]_{(n)} = \sum \Big\{ \pm \Big[u_{\beta_1}, u_{\gamma_1}\Big]_{(n)} \ldots \Big[u_{\beta_r}, u_{\gamma_r}\Big]_{(n)} \Big\} = \sum \Big[ \pm \Big( A^1_{\beta_1 \gamma_1} + \ldots + A^n_{\beta_1 \gamma_1} \Big) \\ \ldots \Big( A^1_{\beta_r \gamma_r} + \ldots + A^n_{\beta_r \gamma_r} \Big) \Big],$$

où nous avons indiqué par des indices entre parenthèses la valeur de $n$ considérée.

Si l'on ajoute deux variables $q_{n+1}$, $p_{n+1}$ de plus, on a pour le crochet correspondant

$$\Big[u_1, \ldots, u_{2r}\Big]_{(n+1)} = \sum \Big[ \pm \Big( A^1_{\beta_1 \gamma_1} + \ldots + A^n_{\beta_1 \gamma_1} \Big) \ldots \Big( A^1_{\beta_r \gamma_r} + \ldots + A^n_{\beta_r \gamma_r} \Big) \Big] \\ + \sum \Big[ \pm \Big( A^{\alpha_1}_{\beta_1 \gamma_1} + \ldots + A^{\alpha_{r-1}}_{\beta_1 \gamma_1} + A^{n+1}_{\beta_1 \gamma_1} \Big) \ldots \Big( A^{\alpha_1}_{\beta_r \gamma_r} + \ldots + A^{\alpha_{r-1}}_{\beta_r \gamma_r} + A^{n+1}_{\beta_r \gamma_r} \Big) \Big],$$

les $\alpha$ prenant les valeurs $1, \ldots, n$. On voit comme précédemment que l'on peut écrire

$$\Big[u_1, \ldots, u_{2r}\Big]_{(n+1)} = \sum \Big[ \pm \Big( A^1_{\beta_1 \gamma_1} + \ldots + A^{n+1}_{\beta_1 \gamma_1} \Big) \ldots \Big( A^1_{\beta_r \gamma_r} + \ldots + A^{n+1}_{\beta_r \gamma_r} \Big) \Big] \\ = \sum \Big\{ \pm \Big[u_{\beta_1}, u_{\gamma_1}\Big]_{(n+1)} \ldots \Big[u_{\beta_r}, u_{\gamma_r}\Big]_{(n+1)} \Big\}.$$

La formule d'où l'on est parti étant exacte pour $n = r$, sera donc vraie pour toutes les valeurs de $n$ supérieures à $r$, donc sera générale.

Il s'ensuit que, si les $q$, $p$ vérifient un système canonique, les $u$ étant les constantes d'intégration, tous les crochets $[u_1, \ldots, u_{2r}]$ sont indépendants du temps.

15. *Invariant intégral.* — Étant donné le système canonique (2), considérons l'intégrale multiple

$$I = \int \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} dq_{\alpha_1}\, dp_{\alpha_1} \ldots dq_{\alpha_r}\, dp_{\alpha_r},$$

étendue à une variété à $2r$ dimensions $V_{2r}$ de l'espace des $q, p$. Une généralisation immédiate du raisonnement du paragraphe 11 montre que I est un invariant intégral pour le système (2).

Nous avons ainsi retrouvé l'invariant intégral de Poincaré et ses généralisations.

16. *Système aux différentielles totales.* — On peut étendre au système aux différentielles totales complètement intégrable

$$dq_i = \frac{\partial H_k(q, p, t)}{\partial p_i} dt_k, \quad dp_i = -\frac{\partial H_k}{\partial q_i} dt_k\ ,$$

les résultats précédents.

Les $q, p$ solutions de ce système sont fonctions des variables indépendantes $t$ et de $2n$ constantes arbitraires $u$. Tous les crochets relatifs à deux $u$ quelconques sont indépendants des $t$ et, réciproquement, si l'on considère les $q, p$, fonctions des $t$ et des $u$, indépendantes par rapport aux $u$, telles que tous les crochets relatifs à deux $u$ quelconques soient indépendants des $t$, on peut affirmer qu'ils vérifient un système de la forme précédente. La démonstration est analogue à celle faite pour un système canonique ordinaire.

Les crochets généralisés sont aussi indépendants des $t$.

17. *Généralisation des parenthèses de Poisson.* — Considérant des fonctions $u_1, \ldots, u_{2r}$, de $2n$ variables conjuguées $q_i$, $p_i$ $(r \leqslant n)$, posons, avec Laurent,

$$\left(u_1, \ldots, u_{2r}\right) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \frac{D(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{2r})}{D(q_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_r}, p_{\alpha_r})}.$$

On voit que l'on a

$$\left(u_1, \ldots, u_{2r}\right) = \sum \left(\pm B_{\alpha_1}^{\beta_1\gamma_1} B_{\alpha_2}^{\beta_2\gamma_2} \ldots B_{\alpha_r}^{\beta_r\gamma_r}\right),$$

avec

$$B_\alpha^{\beta\gamma} = \frac{D(u_\beta, u_\gamma)}{D(q_\alpha, p_\alpha)}\ ,$$

ou, en vertu de

$$\left(u_\beta, u_\gamma\right) = \sum_i \frac{D(u_\beta, u_\gamma)}{D(q_i, p_i)}\ ,$$

des identités analogues à (7), (8) pour $r > n$ et, pour $r \leqslant n$, l'égalité

$$(u_1, \ldots, u_{2r}) = \Sigma\, [\pm (u_{\beta 1}, u_{\gamma 1}) \ldots (u_{\beta r}, u_{\gamma r})].$$

Il s'ensuit que, si les $q$, $p$ vérifient un système canonique dont les $u$ représentent des intégrales, les parenthèses $(u_\beta, u_\gamma)$ en étant également, il en sera aussi de même de $(u_1, \ldots, u_{2r})$ ; c'est en cela que consiste le théorème de Laurent.

18. *Crochets et parenthèses.* — Considérons $4n^2$ fonctions $\varphi_{ij}$ de $2n$ variables $u$, telles que le déterminant $\Delta = |\varphi_{ij}|$ soit différent de *zéro.*

Les relations

$$\varphi_{rk}\, \psi_{sk} = \delta_{rs}$$

où $s$ prend successivement les valeurs $1, \ldots, 2n$, déterminent les fonctions $\psi_{ij}$. On a

$$\psi_{sk} = \frac{\Delta_{sk}}{\Delta},$$

$\Delta_{sk}$ étant le mineur de $\Delta$ correspondent à $\varphi_{sk}$.

D'autre part, on a, pour l'un quelconque des $u$,

$$\frac{\partial \varphi_{rk}}{\partial u}\psi_{sk} + \varphi_{rk}\frac{\partial \psi_{sk}}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \psi_{ss'}}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial \varphi_{rk}}{\partial u}\psi_{sk}\Delta_{rs'}}{\Delta} = -\frac{\frac{\partial \varphi_{rk}}{\partial u}\Delta_{sk}\Delta_{rs'}}{\Delta^2},$$

On déduit de cette formule et des analogues, après quelques changements d'indices de sommation,

$$\Delta_3\left(\psi_{sk}\frac{\partial \psi_{s's''}}{\partial u_k} + \psi_{s'k}\frac{\partial \psi_{s''s}}{\partial u_k} + \psi_{s''k}\frac{\partial \psi_{ss'}}{\partial u_k}\right) = -\Delta_{sk}\Delta_{s'k'}\Delta_{s''k''}\left(\frac{\partial \varphi_{k'k''}}{\partial u_k} + \frac{\partial \varphi_{k''k}}{\partial u_{k'}} + \frac{\partial \varphi_{kk'}}{\partial u_{k''}}\right).$$

Si les $\varphi$ vérifient les relations

$$\varphi_{ij} + \varphi_{ji} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial u_k} = 0, \tag{9}$$

on a, $\Delta$ étant différent de zéro,

$$\psi_{sk} + \psi_{ks} = 0, \quad \psi_{sk}\frac{\partial \psi_{s's''}}{\partial u_k} + \psi_{s'k}\frac{\partial \psi_{s''s}}{\partial u_k} + \psi_{s''k}\frac{\partial \psi_{ss'}}{\partial u_k} = 0. \tag{10}$$

Inversement, si les relations (10) ont lieu, on a les premières égalités (9). De plus, les dernières égalités (10) pouvant s'écrire

$$\psi_{sk}\psi_{s'k'}\psi_{s''k''}\left(\frac{\partial \varphi_{k'k''}}{\partial u_k} + \frac{\partial \varphi_{k''k}}{\partial u_{k'}} + \frac{\partial \varphi_{kk'}}{\partial u_{k''}}\right) = 0,$$

sommons d'abord par rapport à $k$ et posons

$$\psi_{s'k'}\psi_{s''k''}\left(\frac{\partial \varphi_{k'k''}}{\partial u_k} + \frac{\partial \varphi_{k''k}}{\partial u_{k'}} + \frac{\partial \varphi_{kk'}}{\partial u_{k''}}\right) = A_k,$$

d'où les $2n$ équations $\psi_{sk} A_k = 0$, obtenues en donnant à $s$ les valeurs $1, \ldots, 2n$. Ces équations, homogènes aux $A_k$, dont le déterminant est différent de zéro, donnent $A_k = 0$.

Posons ensuite, avec $k$ fixe,

$$\psi_{s''k''}\left(\frac{\partial \varphi_{k'k''}}{\partial u_k} + \frac{\partial \varphi_{k''k}}{\partial u_{k'}} + \frac{\partial \varphi_{kk'}}{\partial u_{k''}}\right) = B_{k'};$$

on en déduit de même, $k$ étant fixé, $B_{k'} = 0$.

Enfin ces équations donnent à leur tour, pour toutes les valeurs de $k$, $k'$, $k''$, comprises entre 1 et $2n$,

$$\frac{\partial \varphi_{k'k''}}{\partial u_k} + \frac{\partial \varphi_{k''k}}{\partial u_{k'}} + \frac{\partial \varphi_{kk'}}{\partial u_{k''}} = 0,$$

c'est-à-dire les dernières équations (9).

L'application du calcul précédent au cas où les $u$, en nombre $2n$, sont fonctions indépendantes de $2n$ variables conjuguées $q_i, p_i$, est immédiate : les $\varphi$ représentent les crochets, les $\psi$, les parenthèses (9).

19. *Méthode de la variation des constantes.* — Montrons comment les crochets de Lagrange s'introduisent naturellement lorsqu'on applique la méthode de la variation des constantes au problème des perturbations.

Soit à résoudre le système

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

associé à la forme de Pfaff

$$\omega = p_i\, dq_i - (\mathrm{H} - \mathrm{R})\, dt.$$

Adoptons comme solution de ce système la solution générale

$$q_i = q_i(t, u_1, \ldots, u_{2n}), \qquad p_i = p_i(t, u_1, \ldots, u_{2n}),$$

du système

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i},$$

en considérant maintenant les $u$ comme des fonctions du temps. Cela revient à dire que l'on effectue un changement de fonctions inconnues, les $q, p$ étant remplacés par les $u$. Ces derniers vérifient le système associé à la forme $\omega$, dans laquelle on a effectué le changement de variables.

La dérivée extérieure de $\omega$ est

$$\begin{aligned}
\omega' &= dp_i \wedge dq_i - d(\mathrm{H}-\mathrm{R}) \wedge dt \\
&= \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} dt + \frac{\partial p_i}{\partial u_l} du_l\right) \wedge \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} dt + \frac{\partial q_i}{\partial u_k} du_k\right) - \left[\frac{\partial (\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial t} dt + \frac{\partial (\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial u_l} du_l\right] \wedge dt \\
&= \left(-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} dt + \frac{\partial p_i}{\partial u_l} du_l\right) \wedge \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} dt + \frac{\partial q_i}{\partial u_k} du_k\right) - \frac{\partial (\mathrm{H}-\mathrm{R})}{\partial u_l} du_l \wedge dt \\
&= -\left(\frac{\partial q_i}{\partial u_k}\frac{\partial p_i}{\partial u_l} du_k + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u_l} dt\right) \wedge du_l\,.
\end{aligned}$$

Le système associé à $\omega$, obtenu en annulant successivement les coefficients de $du_1, \ldots, du_{2n}$, s'écrit

$$\left[u_k, u_l\right] du_k + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u_l} dt = 0 \qquad (l = 1, \ldots, 2n).$$

Telles sont les équations que vérifient les $u$.

---

(9) VIVANTI, loc. cit., p. 269.

Le déterminant $|[u_k, u_l]|$ étant différent de *zéro,* ces équations peuvent être résolues par rapport aux dérivées $\frac{du}{dt}$.

Indiquons un procédé théorique pour effectuer cette résolution. Les $u$ étant considérés comme fonctions des $q$, $p$, les équations précédentes donnent

$$\left(u_r, u_l\right)\left[u_k, u_l\right]\frac{du_k}{dt} + \left(u_r, u_l\right)\frac{\partial R}{\partial u_l} = 0,$$

ou

$$\frac{du_r}{dt} + \left(u_r, u_l\right)\frac{\partial R}{\partial u_l} = 0.$$

Ces formules n'offrent évidemment d'intérêt pratique que si les formules qui permettent de passer des $u$ aux $q$, $p$, et inversement sont simples.