NGUYEN THANH VAN

Bases de Schauder dans certains espaces vectoriels topologiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 28 (1964), p. 139-147
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__139_0>

BASES DE SCHAUDER DANS CERTAINS ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par NGUYEN THANH VAN

Tous les espaces envisagés dans cet article sont supposés de dimension infinie.

Soit X un espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes C. Une base de X est par définition une suite $(b_n)_0^{+\infty}$ d'éléments de X telle que : *pour tout* $x \in X$, *il existe une suite* $(\lambda_n)_0^{+\infty}$ *unique de nombres complexes telle que* $x = \sum_0^{+\infty} \lambda_n b_n$, *la série étant convergente suivant la topologie de X.*

En général, X n'a pas nécessairement une base.

Supposons que X ait une base $(b_n)_0^{+\infty}$. Alors l'espace

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_n)_0^{+\infty} \Big/ \begin{array}{l} \lambda_n \text{ complexe} \\ \Sigma \lambda_n b_n \text{ converge dans X} \end{array} \right\}.$$

est appelé *espace associé* de la base (b_n).

Lorsque les formes linéaires L_n (formes linéaires associées à la base $(b_n)_0^{+\infty}$)

$$L_n(x) = \lambda_n \qquad (x_n = \sum_0^{+\infty} \lambda_n b_n)$$

sont continues, on dit que $(b_n)_0^{+\infty}$ est une *base de Schauder* (S-base) de X.

Nous étudions dans ce papier les S-bases de certains espaces vectoriels topologiques. Nous suivons le principe suivant :

ayant connu une S-base B d'un tel espace, nous étudions les autres S-bases de cet espace en prenant B comme un « système d'expression » et en nous servant de la théorie des espaces de suites et des matrices infinies (exposée par exemple dans Cooke, Chillingworth et Matthews).

1. S-base d'un espace de suites.

Soit X un espace vectoriel de suites de nombres complexes. X^+ désigne le dual généralisé (Chilligworth) de X, c'est-à-dire l'espace de suites (u_n) telles que $\Sigma u_n x_n$ converge pour tout $(x_n) \in X$.

Nous supposons toujours que X contienne l'espace Φ des suites finies ou, ce qui est équivalent, que X contienne les suites

$$e_n = (0, 0 \ldots 0, 1^{\text{nième}}, 0 \ldots).$$

Si X est un espace vectoriel topologique de suites tel que $(e_n)_0^{+\infty}$ soit une base de X, alors on peut identifier le dual X′ de X à un sous-espace de X^+ : en effet si U est une forme linéaire continue sur X on a :

$$U(x) = U\left(\sum_0^{+\infty} x_n e_n\right) = \sum_0^{+\infty} x_n U(e_n)$$

On peut donc identifier U à la suite $\{U(e_n)\}$ qui est un élément de X^+.

Soit maintenant X′ un sous-espace de X^+; une forme bilinéaire naturelle sur X et X′ est :

$$< x, u > = \sum_0^{+\infty} x_n u_n \; ; \; x = (x_n) \in X, \; u = (u_n) \in X'$$

$\sigma(X, X')$ désigne la topologie faible sur X correspondant à cette forme bilinéaire. X (X′) désigne l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant X de la topologie $\sigma(X, X')$.

On a le lemme suivant qui est évident :

LEMME. — (e_n) *forme une base de X(X′) pour tout X′ sous-espace de X^+.*

Nous supposons dès maintenant que X′ contienne Φ.

Donc $(e_n)_0^{+\infty}$ est une S-base de X(X′). Nous la prenons comme un « système d'expression » pour étudier les autres S-bases de X(X′).

1.1. Soit (b_n) une S-base de X(X′). Désignons par $\wedge$ l'espace associé de cette base. T désigne la transformation

$$\text{(I)} \qquad \lambda = (\lambda_n) \longrightarrow x = \sum_0^{+\infty} \lambda_n b_n$$

qui est un isomorphisme algébrique de $\wedge$ sur X.

Convention d'écriture matricielle : soit X, Y deux espaces de suites, T une application de X dans Y. On dit que T est représenté par une matrice infinie M si :

$$y = T(x) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^0_0 \, m^1_0 \, \dots \\ m^0_1 \, m^1_1 \, \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m^0_n \, m^1_n \, \dots \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ \\ \end{bmatrix} = M . x$$

Chaque élément de X ou de Y est représenté par une matrice unicolonne infinie.

Avec cette convention on a la proposition suivante :

PROPOSITION I.

Si (b_n) *est une S-base de X(X′) alors :*

a) *La transformation T (respectivement T^{-1}) définie par (I) peut être repré-*

sentée par une matrice infinie unique B (respectivement B').
b) *B.B' = B'.B = I matrice unité.*

DÉMONSTRATION.

a) Il est évident que

$$x = \mathrm{T}(\lambda) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^0_0 & b^1_0 & \dots \\ b^0_1 & b^1_1 & \dots \\ \dots & \dots \\ b^0_n & b^1_n & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathrm{B}.\lambda$$

où les vecteurs colonnes de B sont formés par les $b_n = (b^n{}_k)_{k=0}^{+\infty}$ B est appelé matrice de la suite (ou de la base) $(b_n)_0{}^{+\infty}$.

D'autre part puisque les formes linéaires L_n sont continues, on a

$$\mathrm{L}_n(x) = \lambda_n = \sum_{p=0}^{+\infty} l^n{}_p\, x_p \qquad l_n = \left(l^n_p\right)_{p=0}^{+\infty} \in \mathrm{X}'$$

Donc :

$$\lambda = \mathrm{T}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^0_0 & l^0_1 & \dots \\ l^1_0 & l^1_1 & \dots \\ \dots & \dots \\ l^n_0 & l^n_1 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathrm{B}'.x$$

Montrons que B' est la seule matrice infinie qui représente T^{-1}. Supposons qu'il existe B'* qui représente T^{-1}

$$\mathrm{B}'^* = \begin{bmatrix} l^{0*}_0 & l^{0*}_1 & \dots \\ l^{1*}_0 & l^{1*}_1 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

On a, en posant $l_n^* = \left(l_k^{n*}\right)_{k=0}^{+\infty}$ $(n = 0, 1, 2 \dots)$

$$< x, l_n^* > = < x, l_n > \qquad x \in \mathrm{X}$$

Donc : $l_n^* = l_n$ et $\mathrm{B}'^* = \mathrm{B}'$.

On montre de même façon l'unicité de B.
b) est évident.

B' est donc une inverse de B.

Il est évident que sur Λ la topologie image réciproque par T de la topologie $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ est $\sigma(\Lambda, \Lambda')$ où Λ' est un sous-espace contenant Φ de Λ^+.

PROPOSITION II.

Si (b_n) *est une S-base de* $X(X')$, *alors :*

a) *la suite des vecteurs colonnes de* B' *forme une S-base de* $\wedge(\wedge')$.

b) *la suite des vecteurs colonnes de la matrice transposée* ${}^tB'$ *de* B' *forme une S-base de* $X'(X)$.

c) *la suite des vecteurs colonnes de la matrice transposée* ${}^tB$ *de* B *forme une S-base de* $\wedge'(\wedge)$.

DÉMONSTRATION.

a) est évident. On démontre *b*) et *c*) en utilisant les transposées des applications linéaires T, T^{-1}.

1.2. En gardant les notations de I.I, examinons le cas où $X' = X^+$ et $X(X^+)$ est séquentiellement complet.

PROPOSITION III.

Si $X(X^+)$ *est séquentiellement complet et* $(b_n)_0^{+\infty}$ *est une S-base de* $X(X^+)$, on a : $\wedge' = \wedge^+$.

DÉMONSTRATION.

— T est continue pour les topologies $\sigma(X, X^+)$ et $\sigma(\wedge, \wedge^+)$ car $\sigma(\wedge, \wedge^+)$ est plus forte que $\sigma(\wedge, \wedge')$ $(\wedge' \subset \wedge^+)$.

— T^{-1} est continue pour ces topologies car $\sigma(X, X^+)$ est séquentiellement complet (CHILLIGWORTH).

On en déduit que T est un isomorphisme de $\wedge(\wedge^+)$ sur $X(X^+)$. Donc

$$\wedge' = \wedge^+.$$

COROLLAIRE. — *Si X est parfait et* (b_n) *est une S-base de* $X(X^+)$ *alors on a :*

a) $\wedge' = \wedge^+$.

b) $(\wedge^+)^+ = \wedge$.

DÉMONSTRATION.

Nous rappelons que X^* désigne le dual de Köthe de X, c'est-à-dire l'ensemble des suites (u_n) telles que $\Sigma\,|u_n\, x_n|$ converge pour tout $x = (x_n)$.

On dit que X est parfait lorsque $(X^*)^* = X$.

a) Puisque X est parfait on a $X^+ = X^*$ et $X(X^*)$ est séquentiellement complet. Donc, en appliquant la proposition III, on a :

$$\wedge' = \wedge^+.$$

b) La suite des vecteurs colonnes de 'B' forme une S-base de $X^+(X)$ d'après la proposition II. L'espace associé de cette base est $\wedge^+$, 'T^{-1} est un isomorphisme de $\wedge^+(\wedge)$ sur $X^+(X)$. Puisque X est parfait, $X^+(X)$ est séquentiellement complet : donc en appliquant *a*) on trouve $(\wedge^+)^+ = \wedge$.

2. S-base d'un espace tonnelé.

2.1. Soit X un espace vectoriel topologique. Une base (respectivement S-base) faible de X est par définition une base (resp. S-base) de l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant X de sa topologie affaiblie. Il est clair que dans un espace vectoriel topologique séparé toute S-base est une S-base faible. Nous remarquons que tout espace vectoriel topologique qui a une S-base est séparé.

LEMME. — *Dans un espace tonnelé, toute S-base faible est une S-base.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme analogue donné par

ARSOVE et EDWARDS.

PROPOSITION IV.

Si X est un espace tonnelé de suites qui admet $(e_n)_0^{+\infty}$ *comme une S-base, alors on peut identirer le dual topologique X' de X à* X^+, *et la topologie de X est la topologie de Mackey* $\tau(X, X^+)$.

DÉMONSTRATION.

Puisque $(e_n)_0^{+\infty}$ est une S-base de X, le dual X' de X peut être identifié à un sous-espace de X^+. Montrons que tout $u = (u_n)_0^{+\infty} \in X^+$ est un élément de X', pour cela considérons la forme linéaire définie par u sur X :

$$U(x) = \sum_0^{+\infty} u_n x_n \qquad U = \sum_0^{\infty} u_n L_n \qquad (L_n(x) = x_n)$$

La série converge simplement et les L_n sont continues, donc U est continue d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Donc on peut identifier u à un élément de X' et on a

$$X' = X^+.$$

On en déduit immédiatement que la topologie initiale de X est $\tau(X, X^+)$.

2.2. On déduit de 2.1. que :

Si un espace tonnelé X a une S-base $(b_n)_0^{+\infty}$, alors, en prenant $(b_n)_0^{+\infty}$ comme un « système d'expression » l'étude des S-bases de X se ramène à l'étude des S-bases de $\wedge(\wedge^+)$, $\wedge$ désigne l'espace associé de $(b_n)_0^{+\infty}$.

2.3. Examinons le cas où X est un espace de Fréchet : dans un tel espace toute base est une S-base (voir par exemple ARSOVE). On appelle espace

de type F.K. (ou simplement F.K.) tout espace de Fréchet des suites qui vérifie la condition : *les formes linéaires* $L_n(x) = x_n$ sont continues.
Il est clair que tout F.K contenant Φ admet $(e_n)_0^{+\infty}$ comme une S-base.

PROPOSITION V.

Soit $\wedge$ *un F.K. contenant* Φ *et* $(b_n)_0^{+\infty}$ *une suite d'éléments de* $\wedge$. *Pour que* $(b_n)_0^{+\infty}$ *forme une base de* $\wedge$, *il faut et il suffit que la matrice de* $(b_n)_0^{+\infty}$ *représente un isomorphisme algébrique d'un certain F.K.* $\wedge'$ *sur* $\wedge$.

On démontre cette proposition en se servant du théorème suivant (WILANSKY) :

Entre deux F.K., toute application linéaire représentée par une matrice est continue.

3. Bases similaires et isomorphismes.

3.1. Soit X, Y deux espaces vectoriels topologiques. Une base $(b_n)_0^{+\infty}$ de X est dite similaire à une base $(b'_n)_0^{+\infty}$ de Y si (b_n) et (b'_n) ont le même espace associé. Soit I un isomorphisme de X sur Y; il est évident que si $(b_n)_0^{+\infty}$ est une base (resp. S-base) de X, alors $\{I(b_n)\}_0^{+\infty}$ est une base (resp. S-base) de Y similaire à $(b_n)_0^{+\infty}$.

En général si $(b_n)_0^{+\infty}$ est une S-base de X et $(b'_n)_0^{+\infty}$ est une S-base de Y similaire à (b_n), la transformation :

$$x = \sum_{p}^{+\infty} \lambda_n b_n \longrightarrow y = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b'_n$$

n'est pas nécessairement un isomorphisme de X sur Y quoiqu'elle soit toujours un isomorphisme algébrique.

Nous allons envisager certaines conditions que vérifient X et Y pour que cette transformation soit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

3.2. PROPOSITION VI.

Soient deux espaces de suites séquentiellement complets X(X+) *et* Y(Y+). *Si* (b_n) *est une S-base de* X(X+) *et* (b'_n) *est une S-base de* Y(Y+) *similaire à* (b_n), *alors la transformation :*

$$x = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b_n \longrightarrow y = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b'_n$$

est un isomorphisme de X *sur* Y.

DÉMONSTRATION.

Soit $\wedge$ l'espace associé commun de $(b_n)_0^{+\infty}$ et $(b'_n)_0^{+\infty}$. D'après la proposition III on sait que :

— La transformation $(\lambda_n) \longrightarrow \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b_n$ est un isomorphisme de $\wedge(\wedge^+)$ sur X(X+).

— La transformation $(\lambda_n) \longrightarrow \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b'_n$ est un isomorphisme de $\wedge(\wedge^+)$ sur Y(Y+).

On en déduit la conclusion.

PROPOSITION VII.

Soient deux espaces tonnelés X, Y.

Si $(b_n)_0^{+\infty}$ *est une S-base de X et* $(b'_n)_0^{+\infty}$ *est une S-base de Y similaire à* (b_n), *alors la transformation :*

$$x = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b_n \longrightarrow y = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b'_n$$

est un isomorphisme de X sur Y.

La démonstration est analogue à celle de la proposition VI, en utilisant la proposition IV.

On déduit de la proposition VII le théorème suivant dû à ARSOVE.

THÉORÈME.

Soient X, Y deux espaces de Fréchet. Si (b_n) *est une base de X et* (b'_n) *est une base de Y similaire à* (b_n) *alors la transformation*

$$x = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b_n \longrightarrow y = \sum_{0}^{+\infty} \lambda_n b'_n$$

est un isomorphisme de X sur Y.

En effet, toute base d'un Fréchet est une S-base.

A titre d'exemple d'application de la méthode, nous démontrons un théorème analogue à un résultat de M. POMMIEZ.

4.1. ESPACE $\mathcal{O}$(K).

Soit K un compact du plan. Une fonction f est dite holomorphe près de K si elle est holomorphe dans un voisinage ouvert V de K. Considérons sur l'ensemble H(K) des fonctions holomorphes près de K la relation R définie de façon suivante

$f \mathrel{R} g \rightleftarrows$ il existe un voisinage ouvert de K dans lequel f et g coïncident : c'est une relation d'équivalence.

L'espace $\mathcal{O}$ (K) est par définition l'espace $^{H(K)}/R$ muni de la topologie limite inductive naturelle des espaces $\mathcal{H}(V)$, V parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de K et $\mathcal{H}(V)$ désignant l'espace des fonctions holomorphes dans V muni de la topologie de convergence uniforme sur tout compact de V. $\mathcal{O}(K)$ est donc un espace $\mathfrak{L}\,\mathfrak{F}$.

Soit maintenant K un compact limité par une courbe de Jordan analytique et fermée Γ.

On sait que $\mathcal{O}(K)$ a une S-base formée par la suite $(\Phi_n)_0^{+\infty}$ des polynômes de Faber associés à Γ. Pour fixer les idées on peut choisir les polynômes de Faber Φ_n de façon que l'espace associé $\wedge$ de la base $(\Phi_n)_0^{+\infty}$ soit l'espace des suites (C_n) vérifiant l'inégalité $\overline{\lim_{n\to+\infty}} |C_n|^{\frac{1}{n}} < 1$

D'après HAPLANOV on a

$\wedge^*$ = l'espace des suites (u_n) vérifiant l'inégalité $\overline{\lim_{n\to+\infty}} |C_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$

$(\wedge^*)^* = \wedge$.

$\wedge$ est donc parfait. Donc d'après 2.2. les résultats de I. s'appliquent à l'étude des S-bases de $\mathcal{O}(K)$.

4.2. THÉORÈME.

soit (L_n) une suite de formes linéaires continues sur $\mathcal{O}(K)$ vérifiant les conditions

a) $L_n(\Phi_\kappa) = 0$ pour tout $\kappa < n$, $L_n(\Phi_n) \neq 0$.

b) $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} |L_n(\Phi_p)| \leqslant |L_n(\Phi_n)|$ à partir d'un certain rang n_0

Alors il existe une suite unique de polynômes $(P_n)_0^{+\infty}$ ($d^\circ P_n = n$) formant une base de $\mathcal{O}(K)$ telle que

$$f = \Sigma\, L_n(f)\, P_n \qquad \forall f \in \mathcal{O}(K)$$

DÉMONSTRATION.

Choisissons (Φ_n) comme un système d'expression. Posons

$$b_n = \{ L_n(\Phi_k) \}_{k=0}^{+\infty}$$

D'après le théorème de Boas (POMMIEZ, page 139, théorème 4-1-4) (b_n) forme une S-base de $\wedge^*(\wedge)$, dont la matrice est inférieurement triangulaire et régulière

$$B = \begin{bmatrix} L_0(\Phi_0) & O & O & \cdots \\ L_0(\Phi_1) & L_1(\Phi_1) & O & \cdots \\ L_0(\Phi_2) & L_1(\Phi_2) & L_2(\Phi_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Cette matrice a une inverse unique B^{-1}.

D'après la proposition II, la suite des vecteurs colonnes de la matrice ${}^t(B^{-1})$ forme une S-base de $\wedge(\wedge^*)$; il est évident que (L_n) est la suite des formes linéaires associées à cette base. La conclusion du théorème découle du fait que ${}^t(B^{-1})$ est supérieurement triangulaire et régulière.

BIBLIOGRAPHIE

ARSOVE, Similar basis and isomorphisms in Frechet spaces. Math. Annalen, 135 (1958), pp. 283-293.

ARSOVE - EDWARDS, Generalized basis in topological linear spaces. Studia Math., 19 (1960).

CHILLINGWORTH, Generalized dual sequence spaces. Indagationes Math., 20 (1958), pp. 307-315.

COOKE, Infinite matrices and sequence spaces. Mac Millan, London, 1950.

COOKE, Linear operators. Mac Millan, London, 1953.

HAPLANOV, Quelques propriétés d'un espace analytique (en russe). Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.), 79 (1951), pp. 929-932.

MATTHEWS, Generalized rings of infinite matrices. Indagationes Math., 20 (1958), pp. 298-306.

MONTEL, Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe. Gauthier-Villars, Paris, 1910.

POMMIEZ (Thèse), Sur les restes successifs des séries de Taylor. Annales Fac. Sciences, Toulouse, 1961.

WILANSKY, Functional Analysis. Blaisdell, 1964.