ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

KAZUNARI HAYASHIDA

Sur l'unicité du prolongement des systèmes elliptiques dont la valeur initiale s'annule sur un sous-ensemble de mesure positive

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 1 (1979), p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_33_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol N° 1 - Page 33 à 44

SUR L'UNICITE DU PROLONGEMENT DES SYSTEMES ELLIPTIQUES DONT LA VALEUR INITIALE S'ANNULE SUR UN SOUS-ENSEMBLE DE MESURE POSITIVE

Kazunari Hayashida(1)

(1) Department of Mathematics, Faculty of Science, 1-1 Maruno-Uchi, Kanazawa 920 Japan.

Résumé : Le but de cet article est d'étudier l'unicité du prolongement des systèmes elliptiques de premier ordre dans un domaine D de R^2, sous l'hypothèse que la valeur initiale s'annule sur un sous-ensemble de ∂D de mesure positive.

Summary : The aim of this paper is to study the unique continuation property for elliptic systems of first order in a domain D of R^2, under the assumption that the initial data vanishes on a subset of ∂D with positive measure.

1. Soit Ω un domaine muni de son bord $\partial\Omega$ dans le plan (x,y). On suppose que $\partial\Omega$ contient un segment $\overline{AB}$ de l'axe des x.

Considérons dans Ω le système elliptique

$$(1.1) \qquad \partial f_j / \partial \overline{z} = \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha_{j\ell} f_\ell + \beta_{j\ell} \overline{f_\ell}) \qquad j = 1,\dots,n ,$$

où les coefficients $\alpha_{j\ell}$, $\beta_{j\ell}$ sont tous bornés et mesurables dans $\overline{\Omega}$. On désigne par $\partial / \partial \overline{z}$ l'opérateur $1/2\,(\partial / \partial x + i\,\partial / \partial y)$.

Soit E un sous-ensemble fermé de l'intérieur de $\overline{AB}$ de mesure positive ($|E| > 0$). On considère alors le problème suivant :

(P.1) Soient $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ des solutions de (1.1) qui sont dans $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Si toutes les f_j s'annulent sur E, alors sont-elles identiquement nulles dans Ω ?

Lorsque tous les coefficients sont égaux à zéro, la réponse à (P.1) est affirmative par un théorème du type de Fatou dans la théorie des fonctions, plus précisément le théorème de Fatou et Riesz.

Dans le cas de $n = 1$, il est connu que la solution f de $\partial f / \partial \bar{z} = \alpha f + \beta \bar{f}$ s'exprime comme un produit d'une fonction holomorphe et d'une fonction continue qui ne s'annule jamais (voir Chapitre 4 dans [2]). Cela revient donc au résultat précédent.

Si E contient un point intérieur, (P.1) n'est rien autre que le résultat bien connu sur l'unicité du prolongement.

En général, soit E un ensemble compact dans $\mathbb{R}^1$, on désigne par a_0 (resp. b_0) sa borne inférieure (resp. supérieur), c'est-à-dire que $[a_0, b_0]$ est le plus petit intervalle contenant E. Si E vérifie la condition suivante pour deux nombres positifs K et m, on dit que E satisfait $(C_{K,m})$:

$(C_{K,m})$: *Pour tout* ξ *tel que* $0 < \xi \leq K(b_0 - a_0)$, *on a*

$$\mathrm{Min}\left(\frac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi}, \frac{|E \cap [b_0 - \xi, b_0]|}{\xi}\right) \geq m,$$

en particulier, si $K = 1$, on désigne simplement par (C_m) la condition ci-dessus,

Remarque. Si E satisfait (C_m), il vérifie alors $(C_{K,m/K})$ pour tout $K \geq 1$.

En effet, si $0 < \xi \leq b_0 - a_0$, $\dfrac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi} \geq m \geq m/K$.

Ensuite, si $b_0 - a_0 < \xi \leq K(b_0 - a_0)$, $\dfrac{|E \cap [a_0, a_0 + \xi]|}{\xi} \geq \dfrac{|E \cap [a_0, b_0]|}{K(b_0 - a_0)} \geq m/K$.

De même pour $\dfrac{|E \cap [b_0 - \xi, b_0]|}{\xi}$.

En outre, on définit la condition $(D_{K,m})$.

$(D_{K,m})$: *Soit* $\epsilon > 0$ *donné, il y a alors un intervalle fermé* $[a,b]$ *tel que* $a, b \in E$, $0 < b-a < \epsilon$ *et* $E \cap [a,b]$ *satisfait* $(C_{K,m})$.

Pour simplifier, $(D_{1,m})$ s'écrit (D_m). Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1. *Soient* $\{f_j\}_{j=1}^n$ *des solutions de (1.1) appartenant à* $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. *On suppose* $m > 0$ *donné et que E satisfait* (D_m). *Alors* f_j $(j = 1,\dots,n)$ *s'annulent identiquement dans* Ω, *si toutes* f_j *sont nulles sur E.*

C'est-à-dire, que la réponse à (P.1) est affirmative, lorsque E satisfait (D_m) pour un certain $m > 0$. Notre méthode est une inégalité du «type de Carleman» ayant été exploité par Carleman [1]. La démonstration du Théorème 1 va s'achever après l'énoncé du Théorème 2 dont le contenu est une inégalité du type de Carleman.

Comme le Théorème 1 est déjà connu dans le cas où E aurait un point intérieur, nous allons donner à la Section 2 un exemple de l'ensemble compact satisfaisant (D_m) tel qu'il n'a aucun point intérieur.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur T. NISHIDA pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui.

Ce travail a été fait pendant le séjour de l'auteur à Paris sous la direction de M. le Professeur H. BREZIS. L'auteur désire le remercier chaleureusement pour ses encouragements constants.

2. On élimine de l'intervalle $[0,1]$ un intervalle ouvert de centre $1/2$ et de longueur $k/3$ $(0 < k < 1)$. Et puis, on élimine deux intervalles ouverts tels que leur longueur est $k/3^2$ et leurs centres sont respectivement ceux des deux intervalles fermés qui sont restés.

En répétant une telle opération, on voit que la somme des longueurs des intervalles éliminés est égale à

$$\frac{k}{3} + \frac{2k}{3^2} + \frac{2^2 k}{3^3} + \ldots = k.$$

Il reste donc un ensemble fermé E de mesure positive ($|E| = 1 - k$). Naturellement, E ne contient aucun point intérieur.

Soit $m = \frac{1}{6}(3-k)(1-k)$ (>0). On va démontrer alors que E satisfait (D_m). Pour cela, on va vérifier d'abord que E satisfait (C_m). Comme E est symétrique, il suffit de montrer

$$\frac{|E \cap [0,\xi]|}{\xi} \geqq m \qquad (0 < \xi \leqq 1). \tag{2.1}$$

(Fig. 1)

Soit (a_1,b_1) l'intervalle ouvert qui a été éliminé au début. Si $a_1 \leqq \xi \leqq 1$, on a

$$\frac{|E \cap [0,\xi]|}{\xi} \geqq |E \cap [0,a_1]|.$$

D'autre part, il est clair que $|E \cap [0,a_1]| \geqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{k}{3})\,|E|$.
On obtient donc

$$\frac{|E \cap [0,\xi]|}{\xi} \geqq m \qquad (a_1 \leqq \xi \leqq 1). \tag{2.2}$$

Ensuite soit (a_2,b_2) l'intervalle ouvert ayant été éliminé après et situé dans $[0,a_1]$ (voir Fig. 1).

On a $|E \cap [0,\xi]| \,/\, \xi \geqq \dfrac{|E \cap [0,a_1]|}{a_2}$, si $a_2 \leqq \xi \leqq a_1$.

On répète une telle opération. Soit (a_i,b_i) l'intervalle ouvert le plus près de l'origine qui est éliminé pour $i^{\text{ième}}$ fois, on voit alors que $a_i \to +0$ et $|E \cap [0,\xi]| / \xi \geq \frac{|E \cap [0,a_i]|}{a_{i-1}}$ $(a_i \leq \xi < a_{i-1})$. D'autre part on vérifie sans peine que $\frac{|E \cap [0,a_i]|}{a_{i-1}} \geqslant 1/2(1-\frac{k}{3})|E|$. Il en résulte (2.1). C'est-à-dire que E satisfait (C_m).

Pour $\epsilon > 0$ donné on prend l'intervalle ci-dessus (a_i,b_i) tel que $0 < a_i < \epsilon$. Puisque $E \cap [0,a_i]$, lui aussi, satisfait (C_m), E satisfait donc la condition (D_m).

3. Soit E le même ensemble que dans le Théorème 1. On peut supposer que $\Omega \subset \{y > 0\}$. En posant $M = \sup_{j,\ell,\Omega} (|\alpha_{j\ell}|, |\beta_{j\ell}|)$, on prend un nombre positif fixé R_0 tel que

(3.1) $$8nMR_0 < 1$$

et pour tout $Q \in [a_0,b_0] \times \{y=0\}$

(3.2) $$\{P=(x,y) \,|\, |P-Q| \leq R_0\} \cap \{y>0\} \subset \Omega.$$

De plus, soit $\epsilon_0 > 0$ fixé tel que

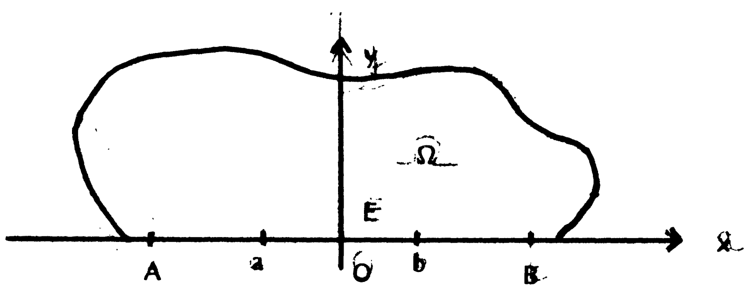
(3.3) $$\epsilon_0 < \text{Min}\left(\frac{R_0}{4(K^2+2)^2}, \frac{mR_0}{2((K+1)^2+1)}\right)$$

et pour $r \geq R_0$, $|\eta| < \epsilon_0/2$

(3.4) $$\frac{r^2}{2} \leq (x-\eta)^2 + y^2,$$

où $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et K est un nombre positif que l'on fixera après.

En posant $\epsilon = \epsilon_0$ dans la définition de (D_m), on va prendre le même intervalle fermé $[a, b]$. On peut supposer que le centre de $[a, b]$ est l'origine (voir Fig. 2).



(Fig. 2)

Pour simplifier la notation, $E \cap [a, b]$ s'écrit E. Alors E satisfait (C_m) $(m > 0)$. On va fixer un nombre quelconque K tel que $K > 1$ (par exemple, $K = 2$). D'après la Remarque de la Section 1, E satisfait la condition $(C_{K,m/K})$. m/K s'écrit alors m.

Comme la situation est un peu compliquée, nous allons ranger le fait ci-dessus comme suit :

(1) a (resp. b) est l'extrémité gauche (resp. droite) de E.

(2) $b-a < \epsilon_0$.

(3) l'origine est le centre de $[a, b]$.

(4) E satisfait la condition $(C_{K,m})$ pour deux nombres fixés $K > 1$ et $m > 0$.

On définit la fonction

$$\Phi_E(x,y) = \int_E \frac{y}{(x-\eta)^2 + y^2}\, d\eta.$$

Et le domaine D_1 se définit :

$$D_1 = \{(x,y) \mid a - K^2(b-a) \leqq x \leqq b + K^2(b-a),\ K(b-a) \leqq y \leqq (K^2+2)(b-a)\}.$$

De plus, on désigne par S_R le cercle ouvert de rayon R, et de centre 0. On a alors le

LEMME 1. $\sup\limits_{S^c_{R_0}} \Phi_E < \mathit{Min}\,(\inf\limits_{D_1} \Phi_E, \dfrac{m}{(K+1)^2+1})$

où $S^c_{R_0}$ *est l'ensemble complémentaire de* S_{R_0}.

Démonstration. Si $\eta \in E$, on a naturellement $a \leqq \eta \leqq b$. Il vient donc pour $(x,y) \in D_1$ et $\eta \in E$

$$|x-\eta| \leqq (K^2+1)(b-a).$$

On en déduit

$$\Phi_E(x,y) \geqq \int_E \frac{y}{(K^2+1)^2(b-a)^2 + y^2}\, d\eta \geqq \frac{K}{(K^2+1)^2 + (K^2+2)^2} \frac{|E|}{b-a}.$$

donc

$$\inf_{D_1} \Phi_E \geqq \frac{1}{2(K^2+2)^2} \frac{|E|}{b-a}. \tag{3.5}$$

D'autre part, (3.4) donne

$$\sup_{S^c_{R_0}} \Phi_E \leqq 2\int_E \frac{y}{x^2+y^2}\, d\eta$$
$$\leqq \frac{2}{R_0}\ E.$$

En notant que $b-a < \epsilon_0$, on en déduit

$$(3.6) \qquad \sup_{S^c_{R_0}} \Phi_E \leqq \frac{2\epsilon_0}{R_0} \cdot \frac{|E|}{b-a} \quad \text{ou} \quad \frac{2\epsilon_0}{R_0}.$$

Combinant (3.3), (3.5) et (3.6), on achève la démonstration.

4. Nous allons continuer à rechercher des propriétés de Φ_E. Le domaine D_1 est déjà défini. Les autres domaines sont définis comme suit (voir Fig. 3) :

$$D_2 = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ 0 < y \leqq K(b-a)\},$$

$$D_3 = \{(x,y) \mid x \leqq a,\ K^{-1}(a-x) < y \leqq K(b-a)\},$$

$$D_3' = \{(x,y) \mid a-K^2(b-a) \leqq x \leqq a,\ 0 < y \leqq K^{-1}(a-x)\},$$

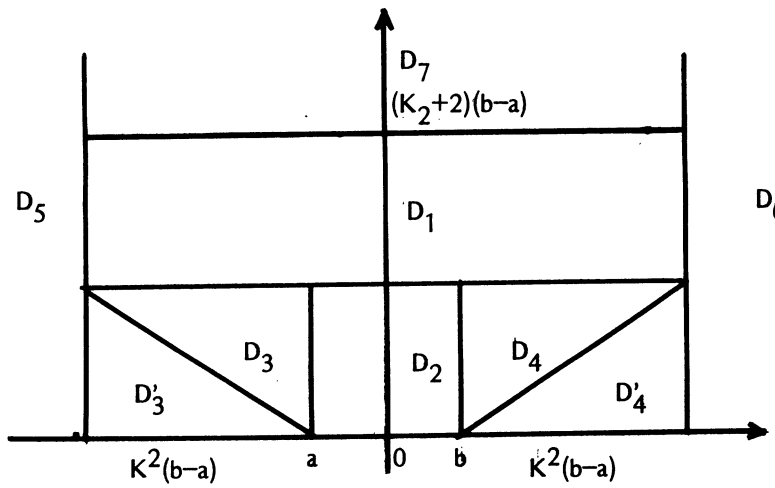
$$D_4 = \{(x,y) \mid b \leqq x,\ K^{-1}(x-b) < y \leqq K(b-a)\},$$

$$D_4' = \{(x,y) \mid b \leqq x \leqq b+K^2(b-a),\ 0 < y \leqq K^{-1}(x-b)\},$$

$$D_5 = \{(x,y) \mid x \leqq a-K^2(b-a),\ y > 0\},$$

$$D_6 = \{(x,y) \mid x \geqq b+K^2(b-a),\ y > 0\},$$

$$D_7 = \{(x,y) \mid a-K^2(b-a) \leqq x \leqq b+K^2(b-a),\ y \geqq (K^2+2)(b-a)\}.$$



(Fig. 3)

LEMME 2. *On a $D_x \Phi_E > 0$ dans D_5 et $D_x \Phi_E < 0$ dans D_6.*

Démonstration. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - E$ il vient

$$(4.1) \qquad D_x \Phi_E = -2 \int_E \frac{(x-\eta)y}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^2} \, d\eta .$$

Si $x \leqq a - K^2(b-a)$, on a

$$x - \eta \leqq -K^2(b-a) < 0.$$

Par ailleurs, si $x \geqq b + K^2(b-a)$, on a

$$x - \eta \geqq K^2(b-a) > 0.$$

De ces inégalités et (4.1) il résulte le Lemme 2.

LEMME 3. *$D_y \Phi_E < 0$ dans D_7*

Démonstration. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - E$ on a

$$(4.2) \qquad D_y \Phi_E = \int_E \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^2} \, d\eta.$$

Il est clair que si $a - K^2(b - a) \leqq x \leqq b + K^2(b-a)$,

$$|x - \eta| \leqq (1 + K^2)(b-a)$$

et donc on a sur D_7

$$|x - \eta| - y \leqq -(b-a) < 0.$$

C'est-à-dire

$$(x-\eta)^2 - y^2 < 0.$$

D'après (4.2) le lemme en résulte.

LEMME 4. *Si $0 < y \leqq K^{-1}(a-x)$, ou si $0 < y \leqq K^{-1}(x-b)$, on a alors $0 \leqq |D_x \Phi_E| / D_y \Phi_E \leqq \dfrac{2}{K-1}$.*

Démonstration. Si $0 < y \leqq K^{-1}(a-x)$, on a

$$|x - \eta| \geqq a - x \geqq Ky.$$

Donc

$$(x-\eta)^2 - y^2 \geqq \{(x-\eta)^2 + y^2\}^{1/2}(K-1)y.$$

De (4.2) et de cette inégalité on déduit

$$D_y\, \Phi_E \geqq (K-1)y \int_E \frac{d\eta}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^{3/2}} > 0 \tag{4.3}$$

D'autre part, (4.1) entraîne

$$|D_x\, \Phi_E| \leqq 2y \int_E \frac{d\eta}{\{(x-\eta)^2 + y^2\}^{3/2}}. \tag{4.4}$$

De (4.3) et (4.4) on achève la démonstration dans le premier domaine, la démonstration dans le second identique.

LEMME 5. *Dans $D_3 \cup D_4$ on a* $\Phi_E \geqq \dfrac{m}{(K+1)^2+1}$.

Démonstration. Soit $x \leqq a$ et $K^{-1}(a-x) < y \leqq K(b-a)$. On pose alors $E_y = E \cap [a, a+y]$. Si $\eta \in E_y$, on a

$$0 \leqq \eta - x \leqq (K+1)y.$$

Donc

$$\Phi_E \geqq \int_{Ey} \frac{y}{((K+1)y)^2 + y^2}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{(K+1)^2+1}\, \frac{|Ey|}{y}$$

D'autre part d'après la condition $(C_{K,m})$ on a

$$|E_y| / y \geqq m.$$

d'où le résultat pour D_3. La démonstration dans D_4 est identique.

5. D'après le Lemme 1 on peut prendre un nombre fixé k_0 tel que

$$\sup_{S^c_{R_0}} \Phi_E < k_0 < \mathrm{Min}\left(\inf_{D_1} \Phi_E\,,\ \frac{m}{(K+1)^2+1}\right). \tag{5.1}$$

Naturellement, $k_0 > 0$.

On désigne par L le segment d'extrémités (a, 0) et (b, 0).

PROPOSITION. *Il existe une courbe continue Γ qui est simple et satisfait les propriétés suivantes :*

(i) *L'origine (resp. l'extrémité) de Γ est (b, 0) (resp. (a, 0)).*

(ii) *Γ est contenu à $S_{R_0} \cap \{y \geq 0\}$.*

(iii) *La longueur de Γ est finie 1).*

(iv) *$\Phi_E = k_0$ sur Γ.*

Par suite le plan est divisé par $\Gamma \cup L$ en deux parties. On a alors

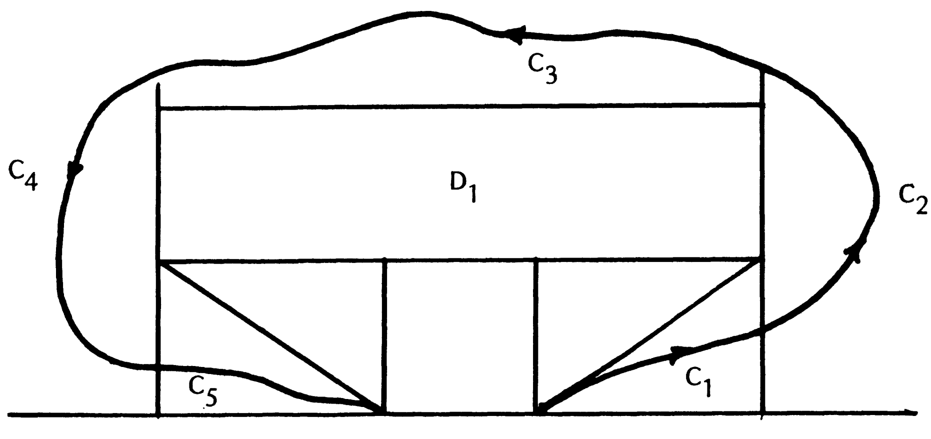
(v) *Dans l'intérieur de la partie bornée limitée par $\Gamma \cup L$ il y a au moins un point où $\Phi_E > k_0$.*

Démonstration. On va appliquer souvent le théorème des fonctions implicites. En notant que $\Phi_E = 0$ sur $\{x > b, y = 0\}$, on utilise le Lemme 5 et le théorème de la valeur intermédiaire. Il y a alors une courbe continue C_1 (où $\Phi_E = k_0$) dans D_4' qui part du point (b, 0) et se termine en un point quelconque situé sur $x = b + K^2(b-a)$ (voir Fig. 4). D'après le Lemme 4, C_1 est simple et sa longueur est finie.

De (5.1) et le Lemme 2 il y a une courbe continue C_2 dans D_6 telle que $\Phi_E = k_0$ sur C_2 et son origine (resp. son extrémité) est l'extrémité de C_1 (resp. un point quelconque de $\partial D_7 \cap \{x = b + K^2(b-a)\}$). C_2, elle aussi, est simple et sa longueur est finie.

Ensuite on va utiliser (5.1) et le Lemme 3. Alors on peut trouver une courbe continue simple (où $\Phi_E = k_0$) sur D_7 dont la longueur est finie et dont les extrémités sont l'extrémité de C_2 et un point quelconque de $\partial D_7 \cap \{x = a - K^2(b-a)\}$.

En continuant, on trouve deux courbes continues simples C_4 ($\subset D_5$) et C_5 ($\subset D_3'$) telles que C_4 est liée à C_5 et l'extrémité de C_5 est (a, 0), de plus $\Phi_E = k_0$ sur $C_4 \cup C_5$ (voir Fig. 3 et 4).



(Fig. 4)

On désigne par Γ la courbe $C_1 \cup \ldots \cup C_5$. Alors les propriétés (i), (iii) et (iv) sont claires de ci-dessus. (ii) se vérifie avec (5.1) et (iv). On déduit aisément (v) d'après (iv) et le Lemme 5. Ce qui achève la démonstration.

---

1) Plus précisément, Γ est une union finie des courbes différentiables à l'exception des extrémités de Γ.

6 . Soit G le domaine borné ouvert de bord $\Gamma \cup L$. On va alors

THEOREME 2. *Sous l'hypothèse du Théorème 1, on a pour tout* $\lambda > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \iint_G |f_j| \exp(\lambda \Phi_E)\, dx\, dy \leq \frac{2R_0}{1-8nMR_0} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda \Phi_E)\, d\sigma.$$

En supposant le Théorème 2, on va démontrer le Théorème 1.

Démonstration du Théorème 1 . D'après (v) de la Proposition il y a un domaine G_1 dans G et un nombre $k_1 > k_0$ tels que $\Phi_E > k_1$ sur G_1. On a donc

$$e^{\lambda k_1} \iint_{G_1} |f_j|\, dxdy \leq \iint_G |f_j| \exp(\lambda \Phi_E)\, dxdy . \tag{6.1}$$

D'autre part, puisque $f_j = 0$ sur E, on voit

$$\int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda\Phi_E) d\sigma = \int_\Gamma |f_j| \exp(\lambda\Phi_E) d\sigma + \int_{L-E} |f_j| \exp(\lambda\Phi_E) d\sigma.$$

De la Proposition, $\Phi_E = k_0$ sur Γ. Et naturellement $\Phi_E = 0$ sur $L - E$. Il en résulte

$$\int_{\Gamma \cup L} |f_j| \exp(\lambda\Phi_E) d\sigma \leq e^{\lambda k_0} \int_{\Gamma \cup L} |f_j|\, d\sigma.$$

De cette inégalité et (6.1) on déduit

$$\sum_{j=1}^{n} \iint_{G_1} |f_j|\, dxdy \leq \frac{2R_0}{1-8nMR_0} e^{\lambda(k_0-k_1)} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma \cup L} |f_j|\, d\sigma,$$

où on a utilisé (3.1). Ici on peut laisser λ tendre vers $+\infty$. Alors $f_j = 0$ dans G_1. En utilisant le résultat bien connu sur l'unicité du prolongement, on en déduit que toutes les f_j sont identiquement nulles dans Ω. Ce qui achève la démonstration.

Ensuite on va démontrer le Théorème 2.

Démonstration du Théorème 2. On pose $z = x + iy$ et $\varphi(z) = \exp\left(\int_E \frac{i}{z-\eta}\, d\eta\right)$. Il est clair que $|\varphi(z)| = \exp \Phi_E(x,y)$. De plus on pose $g_{j\lambda}(z) = f_j(z)\, \varphi(z)^\lambda$, où les f_j sont les solutions de (1.1) et où λ est strictement positif. On vérifie aisément que φ est uniformément bornée et $g_{j\lambda} \in C^1(G)$. En outre on a $g_{j\lambda} \in C^0(\overline{G})$.

En effet, puisque φ est continue sur $\{y > 0\} \cup \{(x,0) \mid x \notin E\}$, $g_{j\lambda}$ y est aussi continue. D'autre part, $g_{j\lambda}$ est continue sur $\{y > 0\} \cup \{(x,0) \quad x \in E\}$, parce que $f_j \in C^0(\overline{\Omega})$, $f_j = 0$ sur E et φ est uniformément bornée. De plus, il est clair que $g_{j\lambda}$ est continue sur $y = 0$. Cela entraîne que $g_{j\lambda} \in C^0(\overline{G})$.

Comme φ est holomorphe dans Ω, de (1.1) on a le système suivant :

(6.1)
$$\partial g_{j\lambda} / \partial \bar{z} = \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha_{j\ell}\, g_{\ell\lambda} + \beta_{j\ell} (\frac{\varphi}{\bar{\varphi}})^{\lambda}\ \bar{g}_{\ell\lambda})$$

D'après (ii) de la Proposition $G \subset S_{R_0}$. On a donc pour $z \in G$

(6.2)
$$\iint_G \frac{dudv}{|z-\varphi|} \leqq \iint_{|\varphi - z| \leqq 2R_0} \frac{dudv}{|z-\varphi|} \leqq 4\pi R_0 ,$$

où $\varphi = u + iv$.

Puisque $\Gamma \cup L$ est une courbe de Jordan de longueur finie (d'après la Proposition), on peut appliquer la formule de Green sur G. On vérifie donc que si $\varphi \in G$

$$g_{j\lambda}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma \cup L} \frac{g_{j\lambda}(z)}{z-\varphi}\ dz - \frac{1}{\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\iint_G (\alpha_{j\ell}\, g_{\ell\lambda} + \beta_{j\ell} (\frac{\varphi}{\bar{\varphi}})^{\lambda}\ \bar{g}_{\ell\lambda}) \frac{1}{z-\varphi}\ dxdy .$$

Donc

$$|g_{j\lambda}(\varphi)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma \cup L} \frac{|g_{j\lambda}(z)|}{|z-\varphi|}\ d|z| + \frac{2M}{\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\iint_G \frac{|g_{i\lambda}(z)|}{|z-\varphi|}\ dxdy .$$

En intégrant des deux côtés par rapport à , on somme sur les indices j. On a alors à partir de (6.2)

$$(1 - 8nMR_0) \sum_{j=1}^{n} \iint_G |g_{j\lambda}(\varphi)|\ dudv \leqq 2R_0 \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma \cup L} |g_{j\lambda}(z)|\, d\,|z|$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

REFERENCES

[1] T. CARLEMAN. *«Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables»,* C. R. Acad. Sci. Paris. 197 (1933) p. 471-474.

[2] R. COURANT and D. HILBERT. *«Methods of mathematical physics, II»*, Interscience, 1962.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1978)