ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL LAURENT

Approximation diophantienne de valeurs de la fonction bêta aux points rationnels

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 53-65
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_53_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 53 à 65

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE DE VALEURS DE LA FONCTION BETA AUX POINTS RATIONNELS

Michel Laurent [(1)]

(1) Laboratoire de Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Tour 45-46, 4, place Jussieu 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : Désignons par $B(a,b) = \Gamma(a)\,\Gamma(b) \,/\, \Gamma(a+b)$ l'intégrale eulérienne de deuxième espèce. Le but de cet article est de donner une mesure de transcendance du nombre $B(a,b)$, lorsque a et b sont des nombres rationnels non entiers.

Soit N un dénominateur commun aux nombres a et b. Posons alors $n = \sup(1, \varphi(N)/2)$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. L'auteur montre qu'il existe un nombre $C > 0$, effectivement calculable en fonction de N, tel que pour tout nombre algébrique ξ de hauteur $\leqslant H$ $(H > e^e)$ et de degré D, on ait :

$$|B(a,b) - \xi| \geqslant \exp(-CD^n T(\log T)^n),$$

où $T = \log H + D \log D$.

Le principe de la démonstration consiste d'abord à déterminer une certaine variété abélienne de dimension n, telle que $B(a,b)$ soit une quasi-période de cette variété. Celle-ci est obtenue comme facteur de la jacobienne de la courbe de Fermat d'équation affine $x^N + y^N = 1$. De plus, cette variété est de type CM (au sens de Shimura). L'auteur utilise alors des techniques classiques d'approximation diophantienne spécifiques à cette situation.

Summary : Let us denote by $B(a,b) = \Gamma(a)\,\Gamma(b) \,/\, \Gamma(a+b)$ the Euler's integral of the second kind. The purpose of this article is to furnish some transcendence measure of the number $B(a,b)$, if a and b are rational numbers and not integral.

Let N be a common denominator of a and b, and put $n = \sup(1, \varphi(N)/2)$, where φ is the usual Euler function. The author shows that there exists some number $C > 0$, effectively computable

in term of N, so that for every algebraic number ξ, with height $\leqslant H$ ($H > e^e$) and degree D, we have :

$$|B(a,b) - \xi| \geqslant \exp(-CD^n T(\log T)^n),$$

where $T = \log H + D \log D$.
The principle of the proof is to exhibit some abelian variety of dimension n, so that B(a,b) should be a quasi-period of this variety. That is obtained as a factor of the jacobian variety of the Fermat's curve with cartesian equation $x^N + y^N = 1$. Moreover, this variety is of CM type (in the Shimura's sense). Then, the author uses classical tools of diophantine analysis, well adapted to that situation.

I - INTRODUCTION

Pour tous nombres réels x et y positifs, désignons par B(x,y) l'intégrale eulérienne de deuxième espèce égale à

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y).$$

En 1941, Th. Schneider a montré que si x et y sont rationnels et non entiers, le nombre B(x,y) est transcendant (cf. [S]). L'objet de cet article, est de donner une version effective de ce résultat. De façon plus précise, nous démontrons le

THEOREME. *Soient* r, s, N *trois entiers naturels, premiers entre eux dans leur ensemble. On suppose que ni* r, *ni* s *n'est divisible par* N. *Il existe un nombre* $C > 0$, *effectivement calculable en fonction de* r, s, N *tel que pour tout nombre algébrique* β *de hauteur* $\leqslant B$ ($B > e^e$) *et de degré* $\leqslant D$, *on ait :*

$$\left|B\left(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}\right) - \beta\right| \geqslant \exp(-C\,D^n \log H(\log\log H)^n),$$

où $H = BD^D$, *et où* $n = \sup(1, \varphi(N)/2)$, φ *désignant la fonction indicatrice d'Euler.*

COROLLAIRE. *Si on suppose de plus que* $r + s$ *n'est pas divisible par* N, *il existe un nombre* $C' > 0$, *effectivement calculable en fonction de* r, s, N *tel que pour tout nombre algébrique* β' *de hauteur* $\leqslant B$ ($B > e^e$) *et de degré* $\leqslant D$, on ait :

$$|B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})/\pi - \beta'| \geqslant \exp(-C' D^n \log H(\log\log H)^n)$$

où H *et* n *sont définis comme précédemment.*

L'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ montre qu'il suffit de prouver le théorème et son corollaire lorsque $0 < r < N$ et $0 < s < N$. Le corollaire se déduit alors simplement du théorème en remarquant que :

$$B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})/\pi = \sin\frac{\pi(r+s)}{N} \Big/ (\frac{N-r-s}{N}) \sin\frac{\pi r}{N} \sin\frac{\pi s}{N} B(\frac{N-r}{N}, \frac{N-s}{N}).$$

On pourra en outre supposer que $N \geqslant 3$ et que $r + s \neq N$. En effet, dans le cas contraire $B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}) = \pi / \sin\frac{\pi r}{N}$, et le théorème est alors une conséquence de résultats classiques sur l'approximation diophantienne du nombre π (voir par exemple [W], prop. 3-2).

Le principe de la démonstration consiste à associer à tout triplet, (r, s, N) vérifiant les conditions précédentes, une certaine variété abélienne de dimension n, facteur de la jacobienne J_N de la courbe de Fermat F_N d'équation affine $x^N + y^N = 1$, telle que $B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})$ soit une quasi-période de cette variété. On utilise les techniques spécifiques de transcendance, telles qu'elles ont été développées par Th. Schneider dans [S].

Commençons par donner quelques propriétés des jacobiennes J_N.

2 - JACOBIENNES DES COURBES DE FERMAT

Supposons que $N \geqslant 3$, la jacobienne J_N a pour dimension $g = (N-1)(N-2)/2$. Pour tout couple (r,s) d'entiers tels que $0 < r < N$, $0 < s < N$ et $r + s \neq N$, notons $\eta_{r,s}$ la forme différentielle sur F_N égale à :

$$x^{r-1}\, y^{s-N}\, dx.$$

On peut montrer (cf. appendice de [GR]) que $\eta_{r,s}$ est une forme différentielle de première ou de deuxième espèce et que l'ensemble $\{\eta_{r,s}\}_{r+s<N}$ est une base de l'espace vectoriel des formes différentielles de première espèce.

De plus le groupe des périodes de $\eta_{r,s}$ est engendré par

$$p(j,k,r,s) = \int_{\gamma(j,k)} \eta_{r,s} = \zeta^{rj+sk}(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)\, B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})/N,$$

où $\gamma(j,k)$ $(0 \leqslant j < N,\ 0 \leqslant k < N)$ désigne un certain lacet de F_N et où l'on a posé $\zeta = e^{2\pi i/N}$.

Après avoir ordonné les couples (r,s) tels que $r + s < N$, introduisons le vecteur $p_{j,k}$ $(0 \leqslant j < N, 0 \leqslant k < N)$ dont les coordonnées dans $\mathbb{C}^g$ sont

$$(\ldots\ldots\ldots\ p(j,k,r,s)\ \ldots\ldots)_{r+s<N}\,,$$

et notons L le réseau de $\mathbb{C}^g$ engendré par les vecteurs $p_{j,k}$.

LEMME 2.1. *Soient* r *et* s *deux entiers tels que* $0 < r < N$, $0 < s < N$ *et* $r + s \neq N$. *Il existe une fonction* $H_{r,s}$, *méromorphe dans* $\mathbb{C}^g$ *telle que :*

i) Pour tout couple d'entiers (j,k) *tels que* $0 \leqslant j < N$ *et* $0 \leqslant k < N$, *on a l'égalité fonctionnelle suivante :*

$$H_{r,s}(z + p_{j,k}) = H_{r,s}(z) + p(j,k,r,s).$$

ii) La fonction $H_{r,s}$ *est régulière à l'origine* 0 *de* $\mathbb{C}^g$, *ses coefficients de Taylor en* 0 *appartiennent au corps* $\mathbb{Q}(\zeta)$, *de plus* $H_{r,s}(0) = 0$.

Preuve. Il est bien connu que les quasi-périodes du réseau L sont les périodes des formes différentielles sur F_N de première ou deuxième espèce, d'où l'existence d'une fonction quasi-abélienne $H_{r,s}$, satisfaisant i).

L'isomorphisme thêta entre $\mathbb{C}^g / L$ et J_N dépend du choix d'un représentant de l'origine de J_N, c'est-à-dire d'un diviseur de F_N linéairement équivalent à 0, lequel peut bien sûr être choisi rationnel sur $\mathbb{Q}(\zeta)$. La deuxième assertion se déduit alors du fait que les formes différentielles $\eta_{r,s}$ sont définies sur $\mathbb{Q}$. ∎

Pour tout élément a de $\mathbb{Z} / N\mathbb{Z}$, notons $< a >$ le représentant de a compris entre 0 et $N - 1$.

Dorénavant, nous supposons donnés un couple (r,s) d'entiers tels que $0 < r < N$, $0 < s < N$, $r + s \neq N$ et pgcd $(r,s,N) = 1$. Introduisons le sous ensemble T de $(\mathbb{Z} / N\,\mathbb{Z})^*$, constitué des éléments t de $(\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^*$ vérifiant :

$$< tr > + < ts > < N\,.$$

Il est facile de voir que les ensembles T et $-$T forment une partition de $(\mathbb{Z} / N\,\mathbb{Z})^*$.

Pour tout entier h et tout élément u de $(\mathbb{Z} / N\,\mathbb{Z})^*$, notons

$$q(h,u) = \zeta^{uh}\,(1 - \zeta^{ur})\,(1 - \zeta^{us})\,B\left(\frac{<ur>}{N}, \frac{<us>}{N}\right) / N,$$

et après avoir ordonné T, notons q_h le vecteur de $\mathbb{C}^n$ (rappelons que $n = \varphi(N)/2$) dont les coordonnées sont

$$(\ldots\ldots q(h,t) \ldots\ldots)_{t \in T}.$$

Il est clair que les vecteurs q_h ($h \in \mathbb{Z}$) engendrent un réseau Λ de $\mathbb{C}^n$. Le lemme suivant explicite les quasi-périodes associées à ce réseau.

LEMME 2.2. *Pour tout* u *appartenant à* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, *il existe une fonction* K_u, *méromorphe dans* $\mathbb{C}^n$, *telle que :*

i) Pour tout entier h *on a l'égalité fonctionnelle*

$$K_u(v + q_h) = K_u(v) + q(h,u).$$

ii) La fonction K_u *est régulière à l'origine* **0** *de* $\mathbb{C}^n$, *ses coefficients de Taylor en* 0 *appartiennent au corps* $\mathbb{Q}(\zeta)$ *et* $K_u(0) = 0$.

Preuve. Soient P la projection canonique de $\mathbb{C}^g$ dans $\mathbb{C}^n$ qui au vecteur de coordonnées $(\ldots\ldots z_{\rho,\sigma} \ldots\ldots)_{\rho+\sigma<N}$ associe le vecteur de coordonnées $(\ldots\ldots z_{<tr>,<ts>} \ldots\ldots)_{t \in T}$, et I l'injection canonique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^g$ de telle sorte que $P \circ I = id_{\mathbb{C}^n}$.

Il est clair que $P(p_{j,k}) = q_{rj+sk}$, d'où il s'ensuit que $P(L) = \Lambda$.

D'autre part, il est possible de montrer que $I(\Lambda)$ est un facteur du réseau L, de telle sorte qu'il existe un entier m non nul tel que $mI(\Lambda) \subset L$ (cf. [GR]). Pour simplifier, notons H_u la fonction $H_{<ur>,<us>}$ introduite dans le lemme 2.1. Nous allons montrer que si p appartenant à L vérifie $P(\mathbf{p}) = 0$, alors $\mathbf{p}$ est une période de H_u. En effet, il existe des entiers $a_{j,k}$ ($0 \leqslant j < N$, $0 \leqslant k < N$) tel que $\mathbf{p} = \sum_{j,k} a_{j,k}\, \mathbf{p}_{j,k}$. Soit $\varkappa = \sum_{j,k} a_{j,k}\, \zeta^{rj+sk}$. Il est facile de voir, d'une part que

$$H_u(\mathbf{z} + \mathbf{p}) = H_u(\mathbf{z}) + \sigma_u(\varkappa)(1 - \zeta^{ur})(1 - \zeta^{us})\, B\left(\frac{<ur>}{N}, \frac{<us>}{N}\right)/N,$$

où σ_u désigne le $\mathbb{Q}$ automorphisme du corps $\mathbb{Q}(\zeta)$ tel que $\sigma_u(\zeta) = \zeta^u$, et d'autre part que $P(\mathbf{p}) = 0$ est équivalent à $\varkappa = 0$, d'où la propriété de périodicité.

Posons alors $K_u = \dfrac{1}{m} H_u \circ (mI)$.

Il est clair que K_u vérifie l'assertion ii).

Soient j et k deux entiers compris entre 0 et $N - 1$ tels que $rj + sk$ soit congru à h modulo N, de telle sorte que $P(p_{j,k}) = q_h$ et que $p(j,k, < ur > , < us >) = q(h,u)$ on a alors :

$$K_u(v + q_h) = \frac{1}{m} H_u(ml(v) + ml \circ P(p_{j,k})).$$

Or $p = ml \circ P(p_{j,k}) - mp_{j,k}$ appartient à L et $P(p) = 0$, d'où il s'ensuit que

$$K_u(v + q_h) = \frac{1}{m} H_u(ml(v) + mp_{j,k} + p) = K_u(v) + q(h,u),$$

ce qui achève la démonstration.

3 - LEMMES AUXILIAIRES

Il s'agit dans cette partie de donner quelques propriétés algébriques et analytiques des fonctions abéliennes associées au réseau Λ, ainsi que de la fonction quasi-abélienne K_u introduite précédemment. En fait, seul le cas $u = 1$ sera utilisé par la suite de telle sorte que l'on écrira K au lieu de K_u.

Comme $l(\Lambda)$ est un facteur du réseau L associé à la jacobienne J_N, il existe des fonctions $A_1,\ldots,A_n$, méromorphes dans $\mathbb{C}^n$ et Λ périodiques, telles que :

i) Les fonctions $A_1 \ldots A_n$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

ii) Les fonctions $A_1 \ldots A_n$ sont régulières à l'origine $\mathbf{0}$ de $\mathbb{C}^n$ et les coefficients de Taylor en $\mathbf{0}$ de ces fonctions appartiennent au corps $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Dans la suite $c_1 \ldots c_4$ désignent des nombres positifs, ne dépendant que de r, de s, et du choix des fonctions K, $A_1 \ldots A_n$ précédentes.

LEMME 3.1. *Les coefficients de Taylor en* $\mathbf{0}$ *des fonctions* K, $A_1 \ldots A_n$, *correspondant à des dérivations d'ordre* $\leqslant k$ *ont une hauteur majorée par* $k^{c_1 k}$ *et un dénominateur commun égal à* $k!c_1^{k+1}$.

Preuve. Voir le lemme 2.4 de [M1]. ■

LEMME 3.2. *Soit* $P[X_1 \ldots X_n]$ *un polynôme non nul de degré total* $\leqslant L$, *la fonction* $P[A_1(z),\ldots,A_n(z)]$ *a un zéro en* $\mathbf{0}$ *d'ordre* $\leqslant L$.

Preuve. Voir le lemme 2.2 de [M1].

Pour tout élément $\rho = \sum_{h=0}^{\varphi(N)-1} a_h \zeta^h$ de $\mathbb{Z}[\zeta]$, notons $\|\rho\| = \max_{0 \leqslant h \leqslant \varphi(N)-1} (|a_h|)$ et introduisons le vecteur $\rho . q$ de $\mathbb{C}^n$ égal à $\sum_h a_h q_h$ ainsi que le nombre complexe $\rho * B$ égal à $\rho(1-\zeta^r)(1-\zeta^s) B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}) / N = \sum_h a_h q(h,1)$, où q_h et $q(h,1)$ sont définis dans la partie précédente, de telle sorte que l'on a l'égalité fonctionnelle $K(\mathbf{z} + \rho * B) = K(\mathbf{z}) + \rho * B$.

LEMME 3.3. *Soient* T *un entier* $\geqslant 1$, R *un nombre réel* $\geqslant 1$. *Alors pour tout* $R' \geqslant 2R$ *et toute fonction* F, *entière dans* $\mathbb{C}^n$, *on a :*

$$|F|_{R'} \leqslant \exp(-c_2 TR^2) \, |F|_{c_3 R'} + \left(\frac{R'}{R}\right)^{c_4 TR^2} |\partial F|_{R,T} ,$$

où $|F|_R$ *désigne le maximum de la valeur absolue de la fonction* F *dans la boule de centre* $\mathbf{0}$ *et de rayon* R *et où* $|\partial F|_{T,R}$ *désigne le maximum des nombres* $|\partial F(\rho.q)|$, ∂ *décrivant les dérivations d'ordre* $< T$ *et* ρ *décrivant les éléments de* $\mathbb{Z}[\zeta]$ *tels que* $\|\rho\| \leqslant R$.

Preuve. C'est un cas particulier du lemme 7 de [M2]. ∎

Indiquons enfin quelques lemmes algébriques classiques.

LEMME 3.4. *Soient* $\alpha_1 \ldots \alpha_j$ *des nombres algébriques de degré* $D_1 \ldots D_j$ *et de hauteurs* $\leqslant H_1,\ldots,H_j$, *engendrant un corps de nombres de degré* $\leqslant D$. *Soit* $P[X_1 \ldots X_j]$ *un polynôme à coefficients entiers, de hauteur* $\leqslant H$, *et de degré* $\leqslant L_i$ *en* X_i $(1 \leqslant i \leqslant j)$. *Si* $P[\alpha_1 \ldots \alpha_j]$ *est non nul, on a la minoration suivante :*

$$|P[\alpha_1 \ldots \alpha_j]| \geqslant H^{1-D} \prod_{i=1}^{j} (\sqrt{2} D_i H_i)^{-DL_i/D_i} (1+L_i)^{1-D} .$$

Preuve. Ceci est essentiellement du à Feld'man, voir par exemple lemme 3 de [M.W].

LEMME 3.5. *Soient* $\alpha_1 \ldots \alpha_j$ *comme dans le lemme précédent et* $P_{\lambda,\mu}[X_1 \ldots X_j]$ $(1 \leqslant \lambda \leqslant L$, $1 \leqslant \mu \leqslant M)$, *des polynômes à coefficients entiers de hauteur* $\leqslant H$ *et de degré* $\leqslant L_i$ en X_i $(1 \leqslant i \leqslant j)$.

Si $L > MD$, *le système d'équations*

$$\sum_{\lambda=1}^{L} x_\lambda P_{\lambda,\mu}[\alpha_1 \ldots \alpha_j] = 0 \qquad (1 \leqslant \mu \leqslant M)$$

admet une solution $(x_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant L}$ *en nombres entiers, non tous nuls, tels que :*

$$\max_\lambda (|x_\lambda|) \leqslant 2 + (2X)^{MD/(L-MD)},$$

où

$$X = LH \prod_{i=1}^{j} (1 + L_i) (\sqrt{2}\, D_i H_i)^{L_i/D_i}$$

Preuve. Il s'agit d'une version raffinée du lemme de Siegel, voir par exemple le lemme 4 de [MW].

4 - PREUVE DU THEOREME

Posons $S = D^n \log H (\log \log H)^n$. Pour prouver le théorème, nous supposons que $| B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N}) - \beta | \leqslant \exp(-\nu^{12n} S)$, et nous déduisons de cette inégalité une contradiction si ν est suffisamment grand par rapport aux nombres réels positifs $c_1, c_2, \ldots$, indépendants de B et de D, apparaissant au cours de la démonstration.

Pour tout élément ρ de $\mathbb{Z}[\zeta]$, notons $\rho * \beta$ le nombre $\rho (1 - \zeta^r) (1 - \zeta^s)\beta/N$, de telle sorte que $\rho * \beta - \rho * B = \rho(1 - \zeta^r) (1 - \zeta^s) (\beta - B(\frac{r}{N}, \frac{s}{N})) / N$ soit «petit» en valeur absolue.

A tout polynôme $P[X_{-1}, X_o, \ldots, X_n]$, associons la fonction Φ, méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, telle que $\Phi(z) = P[\beta, K(z), A_1(z), \ldots, A_n(z)]$. De plus si ρ appartient à $\mathbb{Z}[\zeta]$, posons

$$\Xi_\rho(z) = P[\beta, K(z) + \rho * \beta - \rho * B, A_1(z), \ldots, A_n(z)].$$

Introduisons enfin les paramètres suivants :

$$L_o = [\nu^{5n-1} D^n (\log \log H)^n], \quad L = [\nu^{5n-1} D^{n-1} \log H (\log \log H)^{n-1}]$$

$$T = [\nu^{5n} D^{n-1} \log H (\log \log H)^{n-1}], \quad R = [\nu D^{1/2} (\log \log H)^{1/2}],$$

et notons D_o le degré du nombre algébrique β.

LEMME 4.1. *Il existe un polynôme* $P[X_{-1}, X_o, \ldots, X_n]$ *non nul, de degré* $< D_o$ *en* X_{-1}, *de degré* $\leqslant L_o$ *en* X_o, *de degré* $\leqslant L$ *en* $X_1 \ldots X_n$, *dont les coefficients sont des entiers rationnels de valeur absolue* $\leqslant \exp(\nu^{5n+1} S/D)$, *tel que* $\partial\, \Xi_\rho(\rho . q) = 0$ *pour tout dérivation* ∂ *de* $\mathbb{C}^n$ *d'ordre* $< T$ *et tout élément* ρ *de* $\mathbb{Z}[\zeta]$ *tel que* $\| \rho \| \leqslant R$.

Preuve. Soit ρ appartenant à $\mathbb{Z}[\zeta]$ tel que $\| \rho \| \leqslant R$. Alors :

$$\Xi_\rho(z + \rho . q) = P[\beta, K(z) + \rho*\beta, A_1(z) \ldots A_n(z)] = \sum_\lambda p(\lambda) \beta^{\lambda-1} (K(z) + \rho*\beta)^{\lambda_o} A_1(z)^{\lambda_1} \ldots A_n(z)^{\lambda_n}$$

où la somme est prise sur tous les $n+2$ – uples $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_o \dots \lambda_n)$ d'entiers tels que $0 \leqslant \lambda_{-1} < D_o$, $0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o$ et $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Soit ∂ une dérivation d'ordre $< T$. On déduit du lemme 3.1 que le coefficient d'indice ∂ du développement de Taylor en $\mathbf{0}$ de la fonction $(K(\mathbf{z}) + \rho * \beta)^{\lambda_o} A_1(\mathbf{z})^{\lambda_1} \dots A_n(\mathbf{z})^{\lambda_n}$ est égal à $Q_{\lambda,\rho,\partial}[\beta, \zeta]$; où $Q_{\lambda,\rho,\partial}[x_1,x_2]$ désigne un polynôme de degré $\leqslant L_o$ en x_1, de degré $< \varphi(N)$ en x_2, à coefficients rationnels de hauteur $\leqslant R^{c_1 L_o}(L_o LT)^{c_1 T} \leqslant \exp(\nu^{5n+1} S/D)$.

On doit donc résoudre le système d'équations

$$\sum_{\lambda} p(\lambda)\beta^{\lambda_{-1}} Q_{\lambda,\rho,\partial}[\beta,\zeta] = 0.$$

Le nombre d'équations de ce système est

$\leqslant T^n (R+1)^{2n} \leqslant 4^n \nu^{5n^2+2n} D^{n^2} (\log H)^n (\log\log H)^{n^2}$, tandis que le nombre d'inconnues $p(\lambda)$ est égal à $D_o(L_o+1)(L+1)^n \geqslant \nu^{5n^2+4n-1} D^{n^2} D_o(\log H)^n (\log\log H)^{n^2}$.

Il suffit alors d'utiliser le lemme 3.5, après avoir multiplié ces équations par un dénominateur commun $\leqslant T! c_2^{L_o+L+T}$.

Soit θ une fonction thêta associée au réseau Λ telle que $\theta(\mathbf{0}) \neq 0$ et que θK, $\theta A_1 \dots \theta A_n$ soient des fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$ d'ordre $\leqslant 2$. L'existence d'un tel dénominateur θ est classique pour les fonctions abéliennes $A_1 \dots A_n$, pour la fonction quasi-abélienne K, voir par exemple le lemme 2.1 de **[M1]**. Notons alors $\Theta(\mathbf{z}) = \theta(\mathbf{z})^{L_o+nL}$ et $F(\mathbf{z}) = \Theta(\mathbf{z})\Phi(\mathbf{z})$.

LEMME 4.2. *Soient* ρ *un élément de* $\mathbb{Z}[\xi]$ *tel que* $\|\rho\| \leqslant \nu^2 R$ *et* ∂ *une dérivation de* $\mathbb{C}^n$ *d'ordre* $< T$. *On suppose que pour toute dérivation* ∂' *de* $\mathbb{C}^n$, *d'ordre inférieur à l'ordre de* ∂, *on a* $\partial' \Xi_\rho(\rho . \mathbf{q}) = 0$. *Alors si* ν *est suffisamment grand, on a :*

$$|\partial F(\rho . \mathbf{q}) - \Theta(\rho . \mathbf{q})\, \partial\, \Xi_\rho(\rho . \mathbf{q})| \leqslant \exp(-\nu^{12n} S/2).$$

Preuve. On a les égalités fonctionnelles

$$\Phi(\mathbf{z} + \rho . \mathbf{q}) = P[\beta, K(\mathbf{z}) + \rho * B, A_1(\mathbf{z}),\dots,A_n(\mathbf{z})]$$

$$\Xi_\rho(\mathbf{z} + \rho . \mathbf{q}) = P[\beta, K(\mathbf{z}) + \rho * \beta, A_1(\mathbf{z}),\dots,A_n(\mathbf{z})]$$

Les fonctions K, $A_1 \dots A_n$ sont régulières en $\mathbf{0}$, elles sont donc bornées dans un certain voisinage de $\mathbf{0}$. Il est clair que si $\mathbf{z}$ appartient à ce voisinage, on a

$$|\Phi(z+\rho\,.\,q) - \Xi_\rho(z+\rho\,.\,q)| \leqslant (\nu^2 R)^{L_o} c_3^{L_o+L} \max_\lambda(|p(\lambda)|)\, e^{-\nu^{12n} S}$$

D'autre part, l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction θ montre pour **z** voisin de **0** on a :

$$c_4^{-(L_o+L)\,\|\rho\|^2} \leqslant |\Theta(z+\rho\,.\,q)| \leqslant c_5^{(L_o+L)\,\|\rho\|^2}$$

On a donc :

$$|F(z+\rho\,.\,q) - \Theta(z+\rho\,.\,q)\,\Xi_\rho(z+\rho\,.\,q)| \leqslant (\nu^2 R)^{L_o} c_6^{\nu^4(L_o+L)R^2} \max_\lambda(|p(\lambda)|) e^{-\nu^{12n}S}$$

La formule de Cauchy permet de différentier par rapport à **z** cette inégalité. La substitution de **0** à **z** entraîne alors l'inégalité recherchée en remarquant que

$$\partial\left\{\Theta(z+\rho\,.\,q)\,\Xi_\rho(z+\rho\,.\,q)\right\}_{z=0} = \Theta(\rho\,.\,q)\,\partial\,\Xi_\rho(\rho\,.\,q).$$

LEMME 4.3. *Pour toute dérivation* ∂ *de* $\mathbb{C}^n$ *d'ordre* $<$ T *et tout élément* ρ *de* $\mathbb{Z}[\zeta]$ *tel que* $\|\rho\| \leqslant \nu^2$ R *on a* $\partial\,\Xi_\rho(\rho\,.\,q) = 0$.

Preuve. Soit R' le plus grand entier $\leqslant \nu^2$ R tel que $\partial'\,\Xi_{\rho'}(\rho'\,.\,q) = 0$ pour toute dérivation ∂' de $\mathbb{C}^n$ d'ordre $<$ T et tout élément ρ' de $\mathbb{Z}[\zeta]$ tel que $\|\rho'\| \leqslant$ R'. D'après le lemme 4.1, R' $\geqslant$ R.

Supposons que R' $< \nu^2$ R. Soit ρ un élément de $\mathbb{Z}[\zeta]$ tel que $\|\rho\| =$ R' + 1, et ∂ une dérivation de $\mathbb{C}^n$ d'ordre $<$ T telle que $\partial'\,\Xi_\rho(\rho\,.\,q) = 0$ pour toute dérivation ∂' d'ordre inférieur à l'ordre de ∂.
Le lemme 4.2 montre que

$$|\partial F|_{R',T} \leqslant \exp(-\nu^{12n} S/2).$$

D'autre part,

$$|F|_{64n^2c_3R'} \leqslant \max_\lambda(|p(\lambda)|) c_7^{(L_o+L)R'^2} \leqslant c_8^{TR'^2/\nu},$$

où c_3 désigne ici la constante intervenant dans le lemme 3.3. On déduit alors de ce lemme 3.3 que pour ν suffisamment grand, $|F|_{64n^2R'} \leqslant \exp(-c_9\,TR'^2)$. La formule de Cauchy et le lemme 4.2 montre ensuite que

$$\begin{aligned}|\partial\,\Xi_\rho(\rho\,.\,q)| &\leqslant |\Theta(\rho\,.\,q)|^{-1}(|\partial F(\rho\,.\,q)| + |\partial F(\rho\,.\,q) - \Theta(\rho\,.\,q)\partial\,\Xi_\rho(\rho\,.\,q)|)\\ &\leqslant c_4^{(L_o+L)(R'+1)^2}(e^{-c_{10}TR'^2} + e^{-\nu^{12n}S/2}) \leqslant e^{-c_{11}TR'^2}.\end{aligned}$$

D'autre part, avec des notations analogues à celles du lemme 4.1, on a :

$$\partial\, \Xi_\rho (\rho\,.\,q) = \sum_\lambda p(\lambda)\beta^{\lambda - 1}\, Q_{\lambda,\rho,\partial}[\beta, \zeta],$$

où $Q_{\lambda,\rho,\partial}[x_1, x_2]$ est un polynôme de degré $\leqslant L_o$ en x_1, de degré $< \varphi(N)$ en x_2, à coefficients rationnels de hauteur $\leqslant R'^{c_1 L_o}(L_o LT)^{c_1 T} \leqslant \exp(\nu^{5n+1} S/D)$.

D'après le lemme 3.4, ou bien $\partial\, \Xi_\rho (\rho\,.\,q) = 0$, ou bien on a

$$e^{-c_{11} TR'^2} \geqslant |\partial\, \Xi_\rho (\rho\,.\,q)| \geqslant (2BD)^{-4nL_o} e^{-c_{12}\nu^{5n+1} S} \geqslant e^{-c_{13}\, \nu^{5n+1} S}.$$

Cette dernière inégalité est impossible pour ν suffisamment grand car $TR'^2 \geqslant TR^2 \geqslant \nu^{5n+2} S/8$.

Pour tout élément ρ de $\mathbb{Z}[\zeta]$ tel que $\|\rho\| = R'+1$ et toute dérivation ∂ de $\mathbb{C}^n$ d'ordre $< T$ on a prouvé que $\partial\Xi_\rho (\rho\,.\,q) = 0$.

On en déduit donc que $R' = \nu^2 R$, ce qui achève la preuve. ∎

Notons $P_{\lambda_o}[X_{-1}, X_1 \dots X_n]$ $(0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o)$ le coefficient de X^{λ_o} dans le polynôme P et posons $Q_{\lambda_o}[X_1 \dots X_n] = P_{\lambda_o}[\beta, X_1 \dots X_n]$ et $\Phi_{\lambda_o}(z) = Q_{\lambda_o}[A_1(z) \dots A_n(z)]$.

LEMME 4.4. *Pour tout entier* λ_o *tel que* $0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o$, *la fonction* Φ_{λ_o} *admet un zéro en* 0 *d'ordre* $\geqslant$ T.

Preuve. Il s'agit de montrer que $\partial\, \Phi_{\lambda_o}(0) = 0$ pour toute dérivation ∂ de $\mathbb{C}^n$ d'ordre $< T$ et tout entier λ_o tel que $0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o$. Raisonnons par récurrence sur l'ordre de ∂. On suppose que $\partial'\, \Phi_{\lambda_o}(0) = 0$ pour tout indice λ_o et toute dérivation ∂' d'ordre inférieur à l'ordre de ∂.

Pour tout ρ dans $\mathbb{Z}[\xi]$, on a l'égalité fonctionnelle :

$$\Xi_\rho (z + \rho\,.\,q) = \sum_{\lambda_o} (K(z) + \rho * \beta)^{\lambda_o}\, \Phi_{\lambda_o}(z),$$

d'où l'on déduit que

$$\partial\, \Xi_\rho (\rho\,.\,q) = \sum_{\lambda_o} (\rho * \beta)^{\lambda_o}\, \partial\, \Phi_{\lambda_o}(0).$$

Le polynôme $\sum_{\lambda_o} x^{\lambda_o}\, \partial\, \Phi_{\lambda_o}(0)$ s'annule donc pour $x = \rho * \beta$ si $\|\rho\| \leqslant \nu^2 R$. Ce polynôme de degré $\leqslant L_o < \nu^{5n-1} D^n (\log\log H)^n$ admet donc au moins $\nu^{6n} D^n (\log\log H)^n / 4^n$ racines distinctes, pour ν suffisamment grand, il s'agit donc du polynôme nul. ∎

Comme $T > L$, le lemme 3.2 montre que les polynômes Q_{λ_o} $(0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o)$ sont identiquement nuls, c'est-à-dire que $\sum_{\lambda_{-1}=0}^{D_o-1} p(\lambda_{-1}, \lambda_o \dots \lambda_n)\, \beta^{\lambda_{-1}} = 0$ pour tous les entiers $\lambda_o \dots \lambda_n$ tels que $0 \leqslant \lambda_o \leqslant L_o$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. D_o étant par hypothèse de degré de β, on en déduit que le polynôme P est identiquement nul ce qui contredit le lemme 4.1.

Le théorème est donc démontré.

REFERENCES

[GR] B.H. GROSS et D.E. ROHRLICH. *«On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg»*. Inventiones Math. 45 (1978), 193-211.

[M1] D.W. MASSER. *«The transcendence of certain quasi-periods associated with abelian functions in two variables»*. Compositio Math. 35 (1977).

[M2] D.W. MASSER. *«Diophantine approximation and lattices with complex multiplication»*. Inventiones Math. 45 (1978), 61-82.

[MW] M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT. *«Linear forms in two logarithms and Schneider's method»*. Math. Annalen, 231 (1978), 241-267.

[S] Th. SCHNEIDER. *«Zur theorie der abelschen Funktionen und Integrale»*. Journal Reine Angew. Math. 183 (1941), 110-128.

[W] M. WALDSCHMIDT. *«Transcendence measures for exponentials and logarithms»*. Journal Austr. Soc. 25 (1978), 445-465.

(Manuscrit reçu le 17 novembre 1979)