ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MARC SCHOENAUER

Quelques résultats de régularité pour un système elliptique avec conditions aux limites couplées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 2 (1980), p. 125-135
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_2_125_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 125 à 135

QUELQUES RESULTATS DE REGULARITE POUR UN SYSTEME ELLIPTIQUE AVEC CONDITIONS AUX LIMITES COUPLEES

Marc Schoenauer (1)

(1) Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique - 91128 Palaiseau Cédex - France.

Résumé : Nous étudions un système elliptique linéaire, en dimension 2 ou 3, avec des conditions aux limites non standard. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution forte, et des résultats de régularité qui sont classiques pour des conditions aux limites usuelles, par une méthode directement adaptée à la forme particulière des conditions aux limites.

Summary : We study a linear elliptic system, in dimension 2 or 3, with non standard boundary conditions. We prove the existence and uniqueness of the strong solution, and some regularity results which are wellknown for classical boundary conditions, by a simple method which is directly adapted for the particular shape of the boundary conditions.

I - INTRODUCTION

L'objet de cet article est la démonstration de résultats de régularité pour le système elliptique suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta\, u_i = f_i \quad \text{dans } \Omega\,, \; i = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} u_i \nu_i = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \times \nu = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ régulière, ν est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ et $f = (f_1, f_2, f_3)$ est donnée.

Nous montrons, par exemple, que si $f \in (L^p(\Omega))^3$, $(1 < p < +\infty)$, le système (1) a une solution unique $u = (u_1, u_2, u_3)$ dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$.

Un tel résultat semble contenu dans les résultats généraux de Agmon-Douglis-Nirenberg [1] sur les systèmes elliptiques. Notre approche présente néanmoins l'avantage d'être plus simple et plus directement adaptée au problème.

Ce problème intervient dans un modèle non linéaire de cristaux liquides étudié par Dias [3] . Dias a, par ailleurs (cf. [4]) démontré l'existence et l'unicité d'une solution faible (variationnelle) de (1). Nous rappelons ce résultat dans la section II.

Le plan de l'article est le suivant : dans la section II, nous rappelons les résultats de Dias, puis énonçons nos résultats. Dans la section III, nous démontrons le résultat de régularité $u \in (H^2(\Omega))^3$ dans le cas où $f \in (L^2(\Omega))^3$.

Enfin, dans la section IV, nous montrons que $u \in (W^{2,p}(\Omega))^3$, $(1 < p < +\infty)$ lorsque $f \in (L^p(\Omega))^3$.

Notations : Dans tout l'article, Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ régulière (de classe C^2, par exemple, suffit pour la plupart de nos résultats). Le vecteur ν est le vecteur normal extérieur attaché à $\partial\Omega$.

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, nous noterons

$$(u,v) = u_i v_i \ ; \ |u| = (u.u)^{1/2}$$

$$(\nabla u.\nabla v) = (\nabla u_i.\nabla v_i)$$

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$$

Nous employons la convention de l'indice répété.

II.1. - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION FAIBLE

Une formulation variationnelle du système (1), étudiée par Dias [4] , est la suivante : on définit l'espace W par :

$$W = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 \ ; v.\nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

et on considère le problème :

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\nabla u . \nabla v) = \int_\Omega (f.v) \qquad (\forall\, v \in W) \\ u \in W \end{cases}$$

On munit W de la norme définie par

$$\| u \|_W = \| \nabla u \|_{(L^2(\Omega))^9}$$

Le résultat d'existence d'une solution du problème (2) est basé sur le lemme suivant

LEMME 1. *Sur* W, *la norme* $\| . \|_W$ *et la norme induite par* $(H^1(\Omega))^3$ *sont équivalentes.*

On en déduit le

THEOREME 1. *Si* $f \in (L^2(\Omega))^3$, *le problème (2) a une unique solution* $u \in W$, *avec*

$$\| u \|_W \leqslant C \| f \|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

II.2. - RESULTATS

Notre principal résultat, où apparaît le principe de la démonstration adaptée aux conditions aux limites couplées que nous reprendrons ensuite pour tous les autres résultats, est le résultat de régularité $(H^2(\Omega))^3$:

THEOREME 2. *Si* $f \in (L^2(\Omega))^3$, *le système (1) a une solution unique* $u \in (H^2(\Omega))^3$, *avec de plus*

$$\| u \|_{(H^2(\Omega))^3} \leqslant C \| f \|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

Outre les résultats du paragraphe II.1, nous utiliserons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. *On suppose* $f \in (L^2(\Omega))^3$, *et soit* u *la solution du problème (2) dans* W. *Alors, si* $u \in (H^2(\Omega))^3$, u *est l'unique solution de (1).*

Remarque 1. Avec les hypothèses du théorème (1), si u est la solution du problème (2), il est bien connu que $u \in (H^2_{loc}(\Omega))^3$.

Nous montrerons ensuite le résultat plus général :

THEOREME 3. *Si* $f \in (L^p(\Omega))^3$, *avec* $1 < p < +\infty$, *le problème (1) a une solution unique dans* $(W^{2,p}(\Omega))^3$, *avec l'estimation*

$$\| u \|_{(W^{2,p}(\Omega))^3} \leqslant C \| f \|_{(L^p(\Omega))^3}$$

Je tiens à remercier ici P.L. Lions pour ses fructueux conseils sur le sujet.

III - REGULARITE $(H^2(\Omega))^3$

Nous supposons donc $f \in (L^2(\Omega))^3$, et soit $u \in W$ la solution du problème (2).

Démonstration de la proposition 1. Il suffit d'intégrer par parties l'équation variationnelle définissant (2) : on obtient, si $u \in (H^2(\Omega))^3$,

$$(\forall\, v \in W) \quad \int_\Omega f.v = \int_\Omega (\nabla u. \nabla v) = \int_\Omega (-\Delta u.v) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} . v$$

On en déduit immédiatement

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega$$

et

$$(\forall\, v \in W) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} . v = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

ce qui prouve bien que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ et ν sont colinéaires.

Démonstration du théorème 2. Compte tenu de la proposition 1, et de la remarque 1, il suffit de montrer que u est, localement au voisinage de $\partial\Omega$, une fonction de $(H^2(\Omega))^3$.

Soit (ν, τ_1, τ_2) le trièdre de Frenet attaché à $\partial\Omega$, prolongé sur un voisinage de $\partial\Omega$, et soit α une fonction de localisation de classe C^∞ telle que ν, τ_1 et τ_2 soient suffisamment régulières sur le support de α (de classe C^2 au moins). Nous allons étudier les composantes $\alpha(u.\nu)$ $\alpha(u\,\tau_1)$ et $\alpha(u\,\tau_2)$ de u sur le trièdre (ν, τ_1, τ_2).

De façon formelle, on a l'égalité suivante, dans Ω :

$$\begin{aligned} -\Delta\,(\alpha(u.\nu)) = \alpha(-\Delta u.\nu) + u\,.\,[-\Delta\alpha.\nu - 2\alpha_{x_i}\, \nu_{x_i} - \alpha\,\Delta\,\nu] \\ + \nabla u_k\,.\,[-2\nu_k\, \nabla\alpha - 2\alpha\,\nabla\nu_k] \end{aligned}$$

Soit, si u est solution de (1),

$$(3)\qquad \begin{cases} -\Delta(\alpha(u.\nu)) = \alpha(f.\nu) + (u.a) + (\nabla u.b) \text{ dans } \Omega \\ \alpha(u.\nu) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

De la même manière, compte tenu de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(\alpha(u.\tau_i)) = u \,.\, (\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}\, \tau_i + \alpha \frac{\partial \tau_i}{\partial \nu}) \qquad i = 1,2$$

vérifiée sur $\partial\Omega$ si $\frac{\partial u}{\partial \nu} \times \nu = 0$, on obtient

$$\begin{matrix}(4) \text{ et} \\ (4')\end{matrix}\qquad \begin{cases} -\Delta(\alpha(u.\,\tau_i)) = \alpha(f.\tau_i) + (u.a_i) + (\nabla u.b_i) \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\alpha(u.\,\tau_i)) = u.c_i \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

où a, b, a_i, b_i, c_i ont la même régularité que $\Delta\nu$, $\Delta\,\tau_i$ $(i = 1,2)$.

Nous allons maintenant montrer que $\alpha(u.\nu)$, $\alpha(u.\,\tau_1)$ et $\alpha(u.\,\tau_2)$ sont les solutions variationnelles respectives des problèmes (3), (4) et (4').

On a, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, et pour tout $z = (z_1,z_2,z_3)$ tel que $\alpha z \in (C^2(\Omega))^3$ (par exemple),

$$\nabla(\alpha(u.z))\,\nabla v = \nabla((\alpha v)z) \,.\, \nabla u + (\alpha_{x_i} u_k z_k + \alpha u_k z_{kx_i}) v_{x_i}$$
$$- (\alpha_{x_i} u_{kx_i} z_k + \alpha u_{kx_i} z_{kx_i}) v$$

i) Soit $v \in H_0^1(\Omega)$: on a $(\alpha v)\nu.\nu = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc, u étant la solution de (2),

$$\int_\Omega \nabla((\alpha v)\nu) \,.\, \nabla u = \int_\Omega (f.(\alpha v)\nu) = \int_\Omega \alpha(f.\nu)v$$

La relation (5), avec $z = \nu$, donne immédiatement, après une intégration par parties,

$$\begin{cases} (\forall\, v \in H_0^1(\Omega)), \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla(\alpha(u.\nu))\,\nabla v = \int_\Omega [\alpha(f.\nu) + (u.a) + (\nabla u.b)]\, v \\ \alpha(u.\nu) \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

qui est la formulation variationnelle du problème (3). De plus, $u \in (H^1(\Omega))^3$, et donc $\alpha(f.v) + (u.a) + \nabla u.b \in L^2(\Omega)$. Cela prouve que $\alpha(u.\nu) \in H^2(\Omega)$, avec
$\| \alpha(u.\nu) \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{(L^2(\Omega))^3}$

ii) On a, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $\alpha v \tau_i \,.\, \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc

$$\int_\Omega \nabla((\alpha v)\tau_i) \,.\, \nabla u = \int_\Omega \alpha(f.\tau_i)v.$$

On obtient alors, en reportant dans la relation (5) avec $z = \tau_i$, et en intégrant par parties,

$$\begin{cases} (\forall\, v \in H^1(\Omega)) \displaystyle\int_\Omega \nabla(\alpha(u.\tau_i))\,\nabla v = \int_\Omega [\alpha(f.\tau_i) + (u.a_i) + (\nabla u.b_i)]\,v \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} (u.c_i)v \\ \alpha(u.\tau_i) \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

qui sont, pour $i = 1,2$, les formulations faibles des problèmes (4) et (4').
En utilisant la régularité $(H^1(\Omega))^3$ de u, on en déduit que $\alpha(u.\tau_i) \in H^2(\Omega)$ $(i = 1,2)$ avec de plus $\| \alpha(u.\tau_i) \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C \| f \|_{(L^2(\Omega))^3}$.

Nous pouvons donc maintenant affirmer que $\alpha u \in (H^2(\Omega))^3$ avec $\| \alpha u \|_{(H^2(\Omega))^3} \leqslant C \| f \|_{(L^2(\Omega))^3}$, ce qui achève la démonstration.

IV - REGULARITE $(W^{2,p}(\Omega))^3$ $(1 < p < +\infty)$, ET D'ORDRE SUPERIEUR

Démonstration du théorème 3. Nous allons distinguer deux cas :

Si $p \geqslant 2$, nous utiliserons directement les méthodes et résultats de la section III, puisque $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue, l'ouvert Ω étant borné.

Si $1 < p < 2$, nous déduirons le résultat d'estimations a priori sur la norme $(L^p(\Omega))^3$ de la solution.

Remarque 2. Ici encore, le problème se pose sur le bord de Ω, les estimations L^p (cf. par exemple [1]) donnant des bornes dans $(W^{2,p}_{loc}(\Omega))^3$.

Soit donc $f \in (L^p(\Omega))^3$.

1er cas : $2 \leqslant p < +\infty$: D'après le théorème 2, il existe une solution unique du problème (1) $u \in (H^2(\Omega))^3$, puisque $(L^p(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$. Nous allons montrer en fait que $u \in (W^{2,p}(\Omega))^3$, c'est-à-dire, compte tenu de la remarque 2, et avec les notations de la section III, que $\alpha(u.\nu)$, $\alpha(u.\tau_1)$ et $\alpha(u.\tau_2)$ sont dans $W^{2,p}(\Omega)$. Or, nous savons que $\alpha(u.\nu)$, $\alpha(u.\tau_1)$ et $\alpha(u.\tau_2)$ sont les solutions des problèmes (3), (4) et (4'). Et, en dimension 3, on a

$$u \in H^2(\Omega)^3 \Rightarrow \nabla u \in (L^6(\Omega))^9 \text{ et } u \in (L^6(\Omega))^3$$

$$u \in (H^{3/2}(\partial\Omega))^3 \Rightarrow u \in (W^{1-1/4,4}(\partial\Omega))^3$$

En reportant ces résultats dans (3), (4) et (4'), il vient :

. si $p \leqslant 3$, on a directement

$$\alpha(u.\nu) \in W^{2,p}(\Omega) \ ; \alpha(u.\tau_i) \in W^{2,p}(\Omega), \ i = 1,2$$

. si $p > 3$, on a

$$\alpha(u.\nu) \in W^{2,q}(\Omega) \text{ et } \alpha(u.\tau_i) \in W^{2,q}(\Omega), \ \forall\, q > 3$$

et donc $\alpha(u.\nu) \in W^{2,p}(\Omega)$ et $\alpha(u.\tau_i) \in W^{2,p}(\Omega)$, $i = 1,2$

On a dans tous les cas montré que $\alpha u \in (W^{2,p}(\Omega))^3$, avec l'estimation voulue, ce qui prouve le résultat.

2ème cas : $1 < p < 2$: Il nous faut ici montrer l'existence et l'unicité d'une solution du système (1) dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$.

Unicité : Nous montrons que toute solution u dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$ du problème (1) avec $f = (0,0,0)$ est dans $(H^2(\Omega))^3$, et donc est nulle d'après le théorème 2.

En effet, il est classique que $u \in (C^\infty(\Omega))^3$, puisque $f = 0 \in (C^\infty(\Omega))^3$.

De plus, si $u \in (W^{2,p}(\Omega))^3$, les égalités formelles de la section II sont ici vraies dans $L^p(\Omega)$, et donc $\alpha(u.\nu)$, $\alpha(u.\tau_1)$ et $\alpha(u.\tau_2)$ sont solutions, dans $L^p(\Omega)$, des problèmes (3), (4) et (4'). Le résultat vient alors d'un raisonnement en bootstrap (deux pas suffisent ici) : on a

$$u \in (W^{2,p}(\Omega))^3 \Rightarrow \nabla u \in (L^{p^*}(\Omega))^9 \text{ et } u \in (L^{p^*}(\Omega))^3, \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

$$u \in (W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))^3 \Rightarrow u \in (W^{1-1/\tilde{p},\tilde{p}}(\partial\Omega))^3, \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $\alpha(u.\nu)$, $\alpha(u.\tau_1)$ et $\alpha(u.\tau_2)$ sont dans $W^{2,\tilde{p}}(\Omega)$, et donc que $u \in (W^{2,\tilde{p}}(\Omega))^3$. On recommence alors le raisonnement en partant de l'hypothèse $u \in (W^{2,\tilde{p}}(\Omega))^3$. Comme $\tilde{\tilde{p}} > 2$, si $p > 1$, on en déduit $u \in (H^2(\Omega))^3$, et donc $u = 0$ dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$.

Existence : Montrons tout d'abord qu'il suffit d'obtenir une majoration a priori de la norme L^p de la solution pour conclure.

Nous allons tout d'abord en déduire une majoration a priori dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$, localement au voisinage de $\partial\Omega$.

Revenons pour cela aux problèmes (3), (4) et (4'). Du problème (3) on tire

$$\| \alpha(u.\nu) \|_{2,p} \leqslant C \| f \|_p + C \| u \|_p + C \| u \|_{1,p}$$

où $$\| u \|_p = \| u \|_{(L^p(\Omega))^3} \text{ et } \| u \|_{1,p} = \| u \|_{(W^{1,p}(\Omega))^3}$$

et où la lettre C désigne une constante ne dépendant que de α et ν.

De même, on tire des problèmes (4) et (4')

$$\| \alpha(u.\tau_i) \|_{2,p} \leqslant C \| f \|_p + C \| u \|_p + C \| u \|_{1,p} + C \| u \|_{(W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))^3}$$

soit donc $\| \alpha(u.\tau_i) \|_p \leqslant C \| f \|_p + C \| u \|_p + C \| u \|_{1,p}$.

Or, $(\forall \epsilon > 0), (\exists C_\epsilon > 0)$ $\| u \|_{1,p} \leqslant \epsilon \| u \|_{2,p} + C_\epsilon \| u \|_p$

On en déduit l'existence de constantes C et C' ne dépendant que de α, ν, τ_1, τ_2, telles que

$$\| \alpha u \|_{2,p} \leqslant C \| f \|_p + C' \| u \|_p.$$

Pour prouver l'existence d'une solution de (1) dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$, il suffit maintenant de considérer une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^∞ sur Ω telles que (f_n) converge vers f dans $(L^p(\Omega))^3$, et la suite u_n de solutions de (1) qui lui est associée. Compte-tenu des estimations générales dans $(L^p(\Omega))^3$ donnant des bornes dans $(W^{2,p}_{loc}(\Omega))^3$ (cf. [1]), et du calcul précédent, d'une majoration a priori de la norme dans $(L^p(\Omega))^3$ de la solution nous pouvons déduire une majoration (indépendante de n) de $\| u_n \|_{2,p}$. Des arguments classiques de convergence permettent alors de conclure à l'existence d'une solution de (1) dans $(W^{2,p}(\Omega))^3$, avec l'estimation voulue.

Estimations a priori dans $(L^p(\Omega))^3$: Pour établir ces estimations, nous devons distinguer deux cas :

i) $\frac{6}{5} \leqslant p \leqslant 2$: on sait alors que $L^p(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, avec injection continue : la formulation faible du problème a donc encore un sens ici. On en déduit immédiatement une majoration a priori de la solution dans $(H^1(\Omega))^3$, donc dans $(L^6(\Omega))^3$, et enfin dans $(L^p(\Omega))^3$.

ii) $1 < p < \frac{6}{5}$: nous allons obtenir la majoration cherchée directement, en étudiant $\Delta \mid u \mid^\alpha$, $\alpha \in]1,2[$.

Remarque 3. Lorsque $p < \frac{6}{5}$, la formulation variationnelle du problème n'a plus aucun sens, et les résultats généraux de Agmon-Douglis-Nirenberg sur les systèmes elliptiques [1], ne fournissant ici qu'une majoration a priori de la norme $W^{2,p}$ en fonction d'une norme L^p, ne donnent pas de renseignement quant à l'existence d'une solution.

Soit donc $u \in (H^2(\Omega))^3$, et $\alpha \in]1,2[$. On a

$$\Delta(|u|^\alpha) = \alpha |u|^{\alpha-2}(u.\Delta u) + \alpha |u|^{\alpha-2}|\nabla u|^2 + \alpha(\alpha-2)|u|^{\alpha-4}(u.u_{x_i})(u.u_{x_i})$$

Si u est solution de (1), on a de plus

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega$$

et

$$\frac{\partial |u|^\alpha}{\partial \nu} = \frac{\partial |u|^\alpha}{\partial x_i}\nu_i = \alpha |u|^{\alpha-2} u^k u^k_{x_i} \nu_i$$
$$= \alpha |u|^{\alpha-2} u . \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

Et donc, en intégrant sur Ω, il vient

$$\int_\Omega |u|^{\alpha-2}|\nabla u|^2 + (\alpha-2)\int_\Omega |u|^{\alpha-4}(u.u_{x_i})(u.u_{x_i}) = \int_\Omega |u|^{\alpha-2}(u.f)$$

Or, en tout point de Ω, on a

(6) $$(u.u_{x_i})(u.u_{x_i}) \leqslant |u|^2 |\nabla u|^2$$

On en déduit, puisque $\alpha \in]1,2[$,

$$(\alpha-1)\int_\Omega |u|^{\alpha-2}|\nabla u|^2 \leqslant \int_\Omega |u|^{\alpha-1}|f|$$

De plus, on déduit de l'inégalité (6)

$$|\nabla(|u|^{\alpha/2-1}u)|^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{4}|u|^{\alpha-2}|\nabla u|^2$$

et donc, finalement

$$\int_\Omega |\nabla(|u|^{\alpha/2-1}u)|^2 \leqslant C \int_\Omega |u|^{\alpha-1}|f|$$

Soit

$$\| |u|^{\alpha/2-1}u \|_W^2 \leqslant C \|f\|_p \left(\int_\Omega |u|^{(\alpha-1)p'}\right)^{1/p'}$$

où p' est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Or, du lemme 1 (puisque $|u|^{\alpha/2-1}u \in W$) on tire

$$\| |u|^{\alpha/2-1} u \|_W^2 \geqslant C \| |u|^{\alpha/2-1} u \|^2_{(H^1(\Omega))^3} = \| |u|^{\alpha/2} \|^2_{H^1(\Omega)}$$

Enfin, puisque $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ avec injection continue, on obtient

$$\int_\Omega |u|^{3\alpha} {}^{1/3} \leqslant C \|f\|_p \left[\int_\Omega |u|^{(\alpha-1)p'} \right]^{1/p'}$$

Soit α tel que $3\alpha = (\alpha-1)p'$, on a $\alpha \in]1,2[\Leftrightarrow p \in]1,\frac{6}{5}[$ et donc, dans ce cas, on a

$$\|u\|_{(L^{3\alpha}(\Omega))^3} \leqslant C \|f\|_p$$

d'où l'on déduit la majoration dans $(L^p(\Omega))^3$ cherchée.

Remarque 4. La partie la plus intéressante du résultat, de par son application, est sans doute le cas $\frac{6}{5} \leqslant p \leqslant 2$ (cf. [2]). L'intérêt du cas $1 < p < \frac{6}{5}$ se trouve plutôt dans la méthode employée, donnant directement une majoration a priori de la solution dans $(L^3(\Omega))^3$.

Régularité d'ordre supérieur : On démontrerait d'une manière similaire à la démonstration du théorème 3 pour le cas $p \geqslant 2$ le théorème suivant :

THEOREME 4. *Si* $f \in (C^{k,\alpha}(\Omega))^3$, *avec* $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$, *le système (1) a une solution unique* $u \in (C^{k+2,\beta}(\Omega))^3$ *où* $\beta \in]0,1[$.

Il faut seulement ici supposer $\partial\Omega$ de classe C^∞.

Remarque 5. Une méthode analogue appliquée au problème bi-dimensionnel (cf. [3]) donnerait les mêmes résultats de manière immédiate.

REFERENCES

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS and L. NIRENBERG. *«Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II»*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. XVII pp 35-91 (1964).

[2] D. CIORANESCU and J.P. DIAS. *«A time dependant coupled system related to the tridimensional equations of a nematic liquid crystal»*. A paraître.

[3] J.P. DIAS. *«A simplified variationnal model for the bidimensional coupled equations of a nematic liquid crystal»*. J. of Math. Anal. and Appl. Vol. 67 pp 525-541 (1979).

[4] J.P. DIAS. *«Un problème aux limites pour un système d'équations non linéaires tridimensionnel»*. A paraître.

(Manuscrit reçu le 13 janvier 1980)