ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JACQUELINE FLECKINGER

Estimation des valeurs propres d'opérateurs elliptiques sur des ouverts non bornés

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 2 (1980), p. 157-180

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_2_157_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 157 à 180

ESTIMATION DES VALEURS PROPRES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES SUR DES OUVERTS NON BORNES

Jacqueline Fleckinger (1)

(1) Département de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne - 31062 Toulouse Cédex - France.

Résumé : On étudie le comportement asymptotique du nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique sur un ouvert non borné ; on répond ainsi aux questions de C. CLARK et R.A. ADAMS. Les résultats sont obtenus en utilisant systématiquement la formule du «mini max» et ses corollaires.

Summary : We study the number of eigenvalues of an elliptic operator defined on unbounded open set ; this problem was first studied by C. CLARK and R.A. ADAMS. The results are obtained using the «mini max» principle and its consequences.

On étudie ici le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique sur un ouvert non borné. On complète les résultats de [12,13] et on généralise les théorèmes de G.V. Rozenbljum [18] et H. Tamura [19].

I - INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre 2m, uniformément fortement elliptique sur Ω ; on suppose que $\mathcal{A}$ est formellement autoadjoint et positif. Soit (A, D(A)) une réalisation de $\mathcal{A}$, positive, autoadjointe, non bornée dans $L^2(\Omega)$, et telle que l'injection de D(A), muni de la norme du graphe, dans $L^2(\Omega)$ soit compacte. On sait qu'alors le spectre de A est purement ponctuel ; il est constitué d'une infinité dénombrable de valeurs propres réelles positives λ_j :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_j \leqslant \dots \qquad \lambda_j \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

chaque valeur propre étant répétée selon sa multiplicité, on note

$$N(\lambda, A, \Omega) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1$$

le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ.

On sait [6, 14, 15, 17] que, sous certaines hypothèses de régularité sur Ω et A, on a :

$$N(\lambda, A, \Omega) \sim \mu_A(\Omega)\, \lambda^{n/2m} \qquad \lambda \to +\infty \quad \text{avec} \tag{1.0}$$

$$\mu_A(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega dx \int_{\{\xi \mid \mathcal{A}'(x,\xi) < 1\}} d\xi \tag{1.1}$$

$\mathcal{A}'(x,\xi)$ désignant le symbole de la partie principale de A.

On généralise ici ce résultat au cas d'ouverts non bornés de $\mathbb{R}^n$. On obtient par exemple une estimation de $N(\lambda, A_0, \Omega)$ quand A_0 est le problème de Dirichlet associé à l'opérateur

$$A = I + (-1)^m \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x)^\nu \frac{\partial^m}{\partial x^m}\right) + (1+x)^\sigma \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \right]$$

défini sur $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathbb{R}_+ \,; 0 < y < (1+x)^r \right\}$.

On a dans ce cas, quand $\nu > 2m$ ou $\sigma > 2mr$:

1) si $\sigma - 2mr > 2m - \nu$ $\quad N(\lambda, A_0, \Omega) \sim C_1 \lambda^{1/m}$ $\quad \lambda \to +\infty$ où C_1 est donnée par la formule (1.0). On a la même formule que dans le cas «classique».

2) si $0 < \sigma - 2mr = 2m - \nu$ $\quad N(\lambda, A_0, \Omega) \sim C_2 \lambda^{1/m} \operatorname{Log} \lambda$ $\quad \lambda \to +\infty$. On est dans le cas «intermédiaire». C_2 sera précisé dans III.

3) si $0 < \sigma - 2mr < 2m - \nu$ $\quad N(\lambda, A_0, \Omega) \sim C_3 \lambda^\alpha$ $\quad \lambda \to +\infty$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{2m-\nu}{\sigma - 2mr}\right) > \frac{1}{m} \quad \text{et } C_3 \text{ précisé dans III} \tag{1.2}$$

pour $\nu = \sigma = 0$, $m = 1$ et $-1 \leqslant r < 0$ on retrouve ainsi les résultats de [18, 19] ; et pour $r < -1$ ceux de [9].

Dans [12, 13] on étudie un opérateur très voisin de cet exemple avec $0 < \nu = \sigma$; on trouve que pour $\nu = \sigma > 2m$ la formule «usuelle» (1.0) s'applique ; et on obtient α donné par la formule (1.2) pour $0 < \nu = \sigma < 2m$.

On constate sur cet exemple que si $r < \frac{\nu+\sigma}{2m} - 1$ on a la formule classique ; si l'ouvert «s'élargit», $r > \frac{\nu+\sigma}{2m} - 1$, le spectre restant purement ponctuel, $\alpha > \frac{1}{m}$.

On généralise ici ce résultat ; on montre en particulier que si $\mu_A(\Omega)$ défini par (1.1) est fini, alors on a la formule usuelle (1.0).

Si $\mu_A(\Omega)$ n'est pas fini on a, comme H. Tamura dans [19], le résultat sous forme d'une somme de termes définis par Titchmarsh dans [20].

Les méthodes utilisées ici reposent sur la formule du «mini-max» [10] et on rappelle d'abord les principaux résultats qui s'en déduisent.

Rappels [5, 16]

Soit (V, H, a) une situation variationnelle où l'injection de V dans H est compacte et d'image dense et où a est une forme hermitienne continue et coercive sur V, ce qu'on note : a est V h.c.c.

On note A l'opérateur associé, non borné dans H, et :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_j \leqslant \dots \qquad \lambda_j \underset{j \to +\infty}{\to} +\infty$$

la suite ordonnée de ses valeurs propres, chacune étant répétée selon sa multiplicité. On a la formule du «max-min» [10] :

$$\lambda_j = \sup_{E_j \in \mathcal{G}_j} \inf_{\substack{u \in V \\ u \in E_j^{\perp}}} \frac{(Au,u)}{\|u\|_H^2} \tag{1.3}$$

$\mathcal{G}_j$ désignant l'ensemble des sous-espaces de H de dimension j. On note :

$$N(\lambda, A) = N(\lambda, V, a) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1. \tag{1.4}$$

On déduit immédiatement de (1.3) que si a_1 et a_2 sont deux formes V h.c.c. telles que

$$a_1(u, u) \leqslant a_2(u, u) \text{ pour tout } u \in V, \text{ alors}$$

$$N(\lambda, V, a_2) \leqslant N(\lambda, V, a_1) \tag{1.5}$$

On a aussi :

PROPOSITION 1.1. *Soient* a_1 *et* a_2 *deux formes* V h.c.c. *telles qu'il existe deux nombres positifs* C *et* ϵ *vérifiant*

$$(1-\epsilon)a_1(u,u) + C \| u \|_H^2 \leqslant a_2(u,u) \leqslant (1+\epsilon)a_1(u,u) + C \| u \|_H^2$$

alors

$$N((1-\epsilon)\ \lambda+C\ , V,a_2) \leqslant N(\lambda,V,a_1) \leqslant N((1+\epsilon)\ \lambda+C\ , V,a_2)$$

On suppose maintenant que A_o [resp. A_1] est l'opérateur associé par le théorème de Lax Milgram au triplet variationnel $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), L^2(\Omega), a)$ [Resp. $(H^m(\Omega), L^2(\Omega), a)$]. On note

$$N(\lambda, A_o, \Omega) = N(\lambda, \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega), a)$$

et

$$N(\lambda, A_1, \Omega) = N(\lambda, H^m(\Omega), a).$$

On a la

PROPOSITION 1.2. *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts disjoints de* Ω *tels*

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$$

alors

$$N(\lambda, A_o, \Omega_1) + N(\lambda, A_o, \Omega_2) \leqslant N(\lambda, A_o, \Omega) \leqslant N(\lambda, A_1, \Omega)$$

$$\leqslant N(\lambda, A_1, \Omega_1) + N(\lambda, A_1, \Omega_2)$$

Cette formule s'applique aussi à des découpages en une infinité dénombrable d'ouverts et à des problèmes variationnels définis sur des espaces de Sobolev avec poids. Elle repose sur les inclusions suivantes

$$\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_1) \oplus \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_2) \subset \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^m(\Omega_1) \oplus H^m(\Omega_2).$$

Dans ce qui suit la proposition 1.1 permet de comparer les opérateurs à des opérateurs plus simples en particulier à leur partie principale. La proposition 1.2 permet de localiser les problèmes et on peut alors en réutilisant la proposition 1.1 comparer l'opérateur à un opérateur à coefficient figés.

Notations. $\mathbb{R}^p$ étant l'espace euclidien à p dimensions et α un multientier : $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_p) \in \mathbb{N}^p$. On note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$$

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_p}^{\alpha_p} \quad \text{avec } D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

si

$$x = (x_1,...,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ |x| = (x_1^2 + ... + x_p^2)^{1/2}$$

C désigne diverses constantes intervenant dans les calculs.

L'étude se fait en deux étapes. On étudie d'abord le cas où l'ouvert est cylindrique (dans l'exemple de l'introduction c'est le cas où r = 0), puis le cas général qui se traite de la même façon mais avec quelques difficultés supplémentaires.

Il est clair, en utilisant la proposition 1.2, que les résultats obtenus s'étendent à des ouverts plus généraux ; par exemple à des complémentaires d'ouverts bornés dans les ouverts considérés et à des réunions finies de tels ouverts.

II - CAS D'UN OUVERT CYLINDRIQUE

1. Les espaces

Soient p et q deux nombres entiers naturels, $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$ et G un ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$ défini par

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{p+q} / x \in \mathbb{R}^p ; y \in \mathcal{O} \right\}$$

Soient m un entier strictement positif et ν un nombre réel donnés. Soit τ une fonction strictement positive, continue, définie sur $\mathbb{R}^p$. On définit l'espace $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}$ (G) [Resp. $H^m_{\nu\tau}$ (G)] comme le complété de $\mathcal{D}(G)$ [Resp. $\mathcal{D}(\overline{G})$] pour la norme $\| \ \|_{\nu\tau G}$ avec :

$$\|u\|_{\nu\tau G} = \left\{ \int_G \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \rho^{|\alpha|}(x) \, |D_x^\alpha u|^2 + \sum_{|\beta| \leqslant m} \tau^{|\beta|}(x) \, |D_y^\beta u|^2 \Big) \, dxdy \right\}^{1/2}$$

où

$$\alpha \in \mathbb{N}^p,\ \beta \in \mathbb{N}^q \text{ et } \rho(x) = (1 + |x|^2)^{\nu/2m} = (1 + x_1^2 + ... \ x_p^2)^{\nu/2m}$$

D_x^α désigne une dérivation d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_p$ en $x = (x_1,...,x_p)$ et D_y^β une dérivation d'ordre $|\beta|$ en y.

Munis de leur produit scalaire naturel, ces espaces sont des espaces de Hilbert. On remarque que si q = 0 et $\nu = 0$ on a l'espace de Sobolev usuel, noté $H^m(\mathbb{R}^p)$.

On a le résultat suivant

PROPOSITION 2.0. *On suppose que*

(2.0) τ (x) *tend vers* $+\infty$ *quand* $|x|$ *tend vers* $+\infty$ *ou* $\nu > 2m$ *alors l'injection de* $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$ *alors l'injection de* $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$ *dans* $L^2(G)$ *est compacte.*

Démonstration. Supposons d'abord que τ tend vers $+\infty$ à l'infini ; on écrit l'inégalité de Poincaré usuelle sur $\mathcal{O}$ pour $u \in \mathcal{D}(G)$:

$$\int_{\mathcal{O}} |u(x,y)|^2 dy \leqslant \frac{C}{\tau^m(x)} \int_{\mathcal{O}} \tau^m(x) \sum_{|\beta|=m} |D_y^\beta u|^2 dy.$$

Posant $G_R = \{(x,y) \in G \,/\, |x| > R\}$ on obtient

$$\int_{G_R} |u(x,y)|^2 dx\, dy \leqslant C \sup_{|x|>R} \frac{1}{\tau^m(x)} \|u\|_{\nu\tau G_R}.$$

Du critère de compacité usuel pour les ouverts non bornés on déduit la proposition 2.0.

On suppose maintenant que τ est positive, et que $\nu > 2m$; l'inégalité de Hardy nous donne

$$\int_{G_R} |u(x,y)|^2 dx\, dy \leqslant C \int_{G_R} |x|^{2m} \sum_{|\alpha|=m} |D_x^\alpha u|^2 dx\, dy$$

$$\leqslant C \frac{1}{R^{\nu-2m}} \int_{G_R} \rho^m \sum_{|\alpha|=m} |D_x^\alpha u|^2 dx\, dy \leqslant C \frac{1}{R^{\nu-2m}} \|u\|^2_{\nu\tau G_R}$$

et comme précédemment on a la proposition 2.0.

Dans la suite on utilise aussi des espaces «mixtes» ; si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(\omega \times \mathcal{O})$ est l'ensemble des restrictions à $\omega \times \mathcal{O}$ des éléments de $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$.

2. L'opérateur

Soient γ', δ' des multientiers de $\mathbb{N}^p$ et γ'' et δ'' des multientiers de $\mathbb{N}^q$. On suppose l'hypothèse (2.0) vérifiée ainsi que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x,x') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \quad |x-x'| < \eta \tag{2.1}$$

$$\Rightarrow |\tau(x) - \tau(x')| < \epsilon\, \tau(x).$$

Remarque. Ceci est en particulier vérifié si τ est de classe C^1 et si $\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$ est, pour tout i, borné sur $\mathbb{R}^p$; par exemple si $\tau = \rho$.

Soit ℓ_G une forme intégrodifférentielle $\overset{\circ}{H}{}^m_\nu(G)$ h.c.c.

$$\ell_G(u,v) = \int_G \Big[\sum_{\substack{|\gamma'| \leqslant m \\ |\delta'| \leqslant m}} \ell_{\gamma'\delta'}(x,y) D_x^{\gamma'} u \overline{D_x^{\delta'} v} + \sum_{\substack{|\gamma''| \leqslant m \\ |\delta''| \leqslant m}} \ell_{\gamma''\delta''}(x,y) D_y^{\gamma''} u \overline{D_y^{\delta''} v} \Big] dxdy$$

On fait les hypothèses suivantes :

(2.2) Il existe $k_1 > 0$ tel que pour tout ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^p$

$$\ell_{\omega \times \theta}(u,u) \geqslant k_1 \| u \|^2_{\nu \tau \omega \times \theta} \quad \text{pour tout} \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$$

(2.3)
$$\ell_{\gamma\delta} = \overline{\ell_{\delta\gamma}} \in C^0(\overline{G})$$

(2.4) Il existe $k_2 > 0$ vérifiant

$$| \ell_{\gamma'\delta'}(x,y) | \leqslant k_2 \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(x)$$

$$| \ell_{\gamma''\delta''}(x,y) | \leqslant k_2 \tau^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(x)$$

(2.5)
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall ((x,y), (x',y')) \in G \times G$$

$$d((x,y), (x',y')) < \eta \Rightarrow$$

$$| \ell_{\gamma'\delta'}(x,y) - \ell_{\gamma'\delta'}(x',y') | < \epsilon \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(x)$$

$$| \ell_{\gamma''\delta''}(x,y) - \ell_{\gamma''\delta''}(x',y') | < \epsilon \tau^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(x)$$

$d((x,y), (x',y'))$ désignant la distance dans $\mathbb{R}^{p+q}$ de (x,y) à (x',y').

Remarque. La forme intégrodifférentielle associée à la norme c'est-à-dire la forme intégrodifférentielle vérifiant

$$\ell_G(u,u) = \| u \|^2_{\nu \tau G}$$

vérifie les hypothèses (2.3) à (2.5).

En appliquant (2.2) à $u(x,y) = \psi(x,y)e^{is(\sum_{i=1}^{p} x_i \xi_i + \sum_{j=1}^{q} y_j \eta_j)}$ avec

$$\psi \in \mathcal{D}(G),\ s \in \mathbb{R}^+,\ \xi = (\xi_1,\dots,\xi_p) \in \mathbb{R}^p,\ \eta = (\eta_1,\dots,\eta_q) \in \mathbb{R}^q,$$

et en faisant tendre s vers $+\infty$, on obtient

(2.6) il existe $k_3 > 0$ telle que

$$L'(x,y,\xi,\eta) \geqslant k_3(\rho^m \sum_{|\alpha|=m} |\xi|^{2\alpha} + \tau^m \sum_{|\beta|=m} |\eta|^{2\beta})$$

pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{p+q}$ avec

$$L'(x,y,\xi,u) = \sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m} \ell_{\gamma'\delta'}\, \xi^{\gamma'+\delta'} + \sum_{|\gamma''|=|\delta''|=m} \ell_{\gamma''\delta''}\, \eta^{\gamma''+\delta''}$$

ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on associe par le lemme de Lax Milgram, l'opérateur L_i, positif auto-adjoint non borné dans $L^2(\omega \times \theta)$ au triplet variationnel $(\overset{i}{H}{}^m_{\nu\tau}(\omega \times \theta), L^2(\omega \times \theta), \ell_{\omega\times\theta})$. L'injection de $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$ dans $L^2(G)$ étant compacte, le spectre de L_0 défini sur G est purement ponctuel ; de même celui de L_i défini sur $\omega \times 0$; on note

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_j \leqslant \lambda_{j+1} \leqslant \dots \quad \lambda_j \underset{j\to+\infty}{\to} +\infty$$

la suite ordonné des valeurs propres de L_0 défini sur G chacune étant répétée selon sa multiplicité, et on pose :

$$N(\lambda,L_0,G) = N(\lambda, \overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G), \ell_G) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1$$

nombre de valeurs propres inférieures à λ de L_0 sur G.

De même, $N(\lambda,L_i,\omega \times \theta) = N(\lambda,\overset{i}{H}{}^m_{\nu\tau}(\omega \times \theta), \ell_{\omega \times \theta})$ désigne le nombre de valeurs propres inférieures à λ de L_i défini sur $\omega \times \theta$.

3. Résultats

On étudie le comportement asymptotique, quand λ tend vers $+\infty$, de $N(\lambda,L_0,G)$; selon ν et τ , deux cas se présentent : si $\mu_L(G)$ défini par 1.1 est fini, on a la formule classique (1.0) si $\mu_L(G)$ est infini, on suppose que

$$L(x,y,D_x,D_y) = C(x,D_x) + B(x,y,D_y)$$

B et C étant de «bons» opérateurs elliptiques. Par découpage de $\mathbb{R}^p$, on se ramène à un opérateur à coefficients figés en x que l'on traite par la méthode de séparation des variables. On a :

THEOREME 2.1. *Les hypothèses (2.0) à (2.5) étant vérifiées, on suppose de plus que :*

(2.7) $(1+|x|^2)^{-p}\rho^p(x)\,\tau^q(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $|x|$ *tend vers* $+\infty$ *alors :*

$$\mu_L(G) = \frac{1}{(2\pi)^{p+q}} \int_G dxdy \int_{\{(\xi,\eta)\in R^{p+q}/L'(x,y,\xi,\eta)<1\}} d\xi d\eta$$

est fini et

$$N(\lambda,L_o,G) \sim \lambda^{\frac{p+q}{2}} \mu_L(G) \qquad \lambda\to+\infty$$

avec

$$L'(x,y,\xi,\eta) = \sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m} \ell_{\gamma'\delta'}\,\xi^{\gamma'+\delta'} + \sum_{|\gamma''|=|\delta''|=m} \ell_{\gamma''\delta''}\,\eta^{\gamma''+\delta''} \quad .$$

Remarques. (2.7) entraîne (2.0).

Ce théorème, ainsi que le théorème (3.1), sont déjà connus dans plusieurs cas, et, en particulier, pour la laplacien sur un ouvert non borné de mesure finie [9] .

Quand $\mu_L(G)$ n'est pas fini, on suppose de plus que

(2.8) $\ell_{\gamma'\delta'}(x,y)$ ne dépend que de x.

On note $b_{x\vartheta}(u,v)$ la forme intégrodifférentielle $\overset{\circ}{H}{}^m(\vartheta)$ h.c.c.

$$b_{x\vartheta}(u,v) = \int_\vartheta \sum_{\substack{|\gamma''|\leqslant m\\ |\delta''|\leqslant m}} \ell_{\gamma''\delta''}(x,y)D_y^{\gamma''}u\,\overline{D_y^{\delta''}v}\,dy$$

En appliquant 2.2 sur $\omega\times\vartheta$ à $u(x,y)=\theta(x)\,\psi(y)$ avec

$$\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^p) \text{ et } \theta\equiv 1 \text{ sur } \omega\ ;\ \psi\in\mathcal{D}(\vartheta)\,,$$

on montre que $b_{x\vartheta}$ est $\overset{\circ}{H}{}^m(\vartheta)$ h.c.c.

On désigne par B_x la réalisation positive autoadjointe non bornée dans $L^2(\vartheta)$ du problème variationnel

$$(\overset{\circ}{H}{}^m(\vartheta),\ L^2(\vartheta),\ b_{x\vartheta})$$

et par

$$0 < \mu_1(x) \leqslant \mu_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \mu_j(x) \leqslant \ldots \quad \mu_j(x) \underset{j\to+\infty}{\to} +\infty$$

la suite ordonnée des valeurs propres de B_x, chacune étant répétée selon sa multiplicité ; on a alors le

THEOREME 2.2. *Les hypothèses (2.0) à (2.6) et (2.8) étant vérifiées, on suppose de plus que :*

(2.9) $(1+|x|^2)^{-p}\rho^p(x)\,\tau^q(x)$ *reste borné sur* $\mathbb{R}^p$, *alors*

$$N(\lambda,L_o,G) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in\mathbb{R}^p/\mu_j(x)\leqslant\lambda\}} \omega_{mp}(x)\,[\lambda-\mu_j(x)]^{p/2m}\,dx$$

avec

$$\omega_{mp}(x) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\{\xi\in\mathbb{R}^p/\sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m} \ell_{\gamma'\delta'}\,\xi^{\gamma'+\delta'} < 1\}} d\xi$$

Remarques. 1. Si les hypothèses (2.0) à (2.5) et (2.9) sont vérifiées, $\mu_L(G)$ est infini ; en effet, d'après (2.4)

$$\operatorname{mes}\Big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{p+q}/\sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m}\ell_{\gamma'\delta'}\,\xi^{\gamma'+\delta'}+\sum_{|\gamma''|=|\delta''|=m}\ell_{\gamma''\delta''}\,\eta^{\gamma''+\delta''}<1\Big\}\geqslant$$

$$\operatorname{mes}\Big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{p+q}/\rho^m\sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m}\xi^{\gamma'+\delta'}+\tau^m\sum_{|\gamma''|=|\delta''|=m}\eta^{\gamma''+\delta''}<\frac{1}{k_2}\Big\}$$

$$= c\rho^{-p/2}\tau^{-q/2}$$

et $\displaystyle\int_G \rho^{-p/2}\tau^{-q/2}\,dx\,dy = +\infty$ si (2.9) est vérifiée.

2. Si $\mu_L(G)$ est infini, $\displaystyle\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-\frac{p+q}{2m}} N(\lambda,L_o,G) = +\infty$;

en effet, on a, en posant $G'_R = \{(x,y)\in G \,/\, |x| < R\}$

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\frac{p+q}{2m}}N(\lambda,L_o,G) \geqslant \liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\frac{p+q}{2m}}N(\lambda,L_o,G'_R) = \mu_L(G'_R).$$

Si R tend vers $+\infty$, $\mu_L(G'_R)$ tend vers $\mu_L(G) = +\infty$ et on a le résultat.

3. Si G' est un ouvert inclus dans G et si l'on est dans les conditions d'applications du théorème 2.1 pour l'opérateur L sur G, on a aussi le théorème 2.1 pour L sur G'.

4. Si ω est un ouvert borné de R^p et que l'on est dans les conditions d'application du théorème 2.2 pour L sur G, alors $N(\lambda,L_o,G \setminus \omega \times \theta) \sim N(\lambda,L_o,G)$ quand $\lambda \to +\infty$ car $\omega \times \theta$ est borné.

4. Application

On reprend l'opérateur A de l'introduction,

$$A = I + (-1)^m \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x)^\nu \frac{\partial^m}{\partial x^m}\right) + (1+x)^\sigma \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \right]$$

défini sur $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}_+ ; 0 < y < 1 \}$.

L'injection de $\overset{\circ}{H}{}^m_{\nu\tau}(G)$ dans $L^2(G)$ est compacte si $\nu > 2m$ ou $\sigma > 0$.

Cette condition est automatiquement vérifiée si $\nu + \sigma > 2m$, c'est-à-dire si la condition (2.7) introduite dans le théorème 2.1 est vérifiée.

1. Si $\nu + \sigma > 2m$ on remarque que

$$V_m = \text{mes} \{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 / \xi^{2m} + \eta^{2m} < 1 \} = \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}\right)$$

avec $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$; par conséquent le théorème 2.1 s'applique :

$$N(\lambda,A_o,G) \sim \frac{\lambda^{1/m}}{2\pi^2(\sigma+\nu-2m)} B\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}\right) \qquad \lambda \to +\infty.$$

2. Si $\nu + \sigma \leqslant 2m$ avec $\sigma > 0$

On déduit du théorème 2.2 et de la remarque 4 que

$$N(\lambda,A_o,G) \sim \frac{1}{\pi} \lambda^{1/2m} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\{x \in \mathbb{R}_+/(j\pi)^{2m}(1+x)^\sigma < \lambda\}} (1+x)^{-\frac{\nu}{2m}} \left(1 - \frac{(1+x)^\sigma j^{2m} \pi^{2m}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2m}} dx$$

$$\sim \frac{1}{\pi} \lambda^{1/2m} \sum_{j \in J} \int_0^{\left(\frac{\lambda}{(j\pi)^{2m}} - 1\right)^{1/\sigma}} (1+x)^{-\nu/2m} \left(1 - \frac{(1+x)^\sigma j^{2m} \pi^{2m}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2m}} dx$$

avec $J = \{ j \in \mathbb{N} / j^{2m} \pi^{2m} < \lambda \}$; en effet, si $j \notin J$

$$\{ x > 0 / (1+x)^\sigma j^{2m} \pi^{2m} < \lambda \} = \phi ;$$

par conséquent

$$N(\lambda,A_0,G) \sim \frac{1}{\sigma\pi}\,\frac{\lambda^{\frac{1}{2m}+\frac{1}{\sigma}-\frac{\nu}{2m\sigma}}}{\pi^{\frac{2m-m}{\sigma}}}\sum_{j\in J}\frac{1}{j^{\frac{2m-\nu}{\sigma}}}\int_{\frac{(j\pi)^{2m}}{\lambda}}^{1} t^{\frac{2m-\nu}{2m\sigma}-1}\,(1-t)^{1/2m}\,dt$$

on a alors

si $\sigma > 0$ et $\nu+\sigma < 2m$

$$N(\lambda,A_0,G) \sim \frac{1}{2m+\sigma-\nu}\,\frac{\lambda^{\frac{1}{2m}+\frac{2m-\nu}{2m\sigma}}}{\pi^{1+\frac{2m-\nu}{\sigma}}}\;\zeta\left(\frac{2m-\nu}{\sigma}\right) B\left(\frac{1}{2m},\frac{2m-\nu}{2m\sigma}\right)$$

avec $\zeta(s)=\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$ défini pour $s > 1$.

si $\sigma > 0$ et $\nu+\sigma = 2m$

$$N(\lambda,A_0,G) \sim \frac{1}{4m\sigma\pi^2}\,B\left(\frac{1}{2m},\frac{1}{2m}\right)\lambda^{\frac{1}{m}}\,\mathrm{Log}\,\lambda \qquad \lambda\to+\infty$$

si $\sigma < 0$ et $\nu+\sigma \leqslant 2m$ on retrouve les mêmes formules que pour $\sigma > 0$ selon que $\nu+\sigma < 2m$ ou $\nu+\sigma = 2m$; nécessairement alors : $\nu > 2m$.

Démonstration du théorème 2.1. On montre d'abord, qu'avec les hypothèses et les notations précédentes $\mu_L(G)$ est fini ; on minore ensuite $N(\lambda,L_0,G)$ en «tronquant» G. La majoration s'obtient par découpage et figeage des coefficients.

Minoration : Les hypothèses (2.0) à (2.7) étant réalisées, on déduit de (2.6) et (2.7) que $\mu_L(G)$ est fini :

$$\mu_L(G) \leqslant (2\pi)^{-\frac{p+q}{2m}} \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathcal{O}} dy \int_{\{(\xi,\eta)\in \mathbb{R}^{p+q}\,/\,M'(\xi,\eta) < c\}} d\xi d\eta$$

$$\leqslant c(m,p,q)\,\mathrm{mes}\int_{\mathbb{R}^p} \tau^{-\frac{q}{2}}\rho^{-\frac{p}{2}}\,dx \leqslant +\infty \text{ si } x^{-p}\rho^{\frac{p}{2}}\tau^{\frac{q}{2}} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

où $\quad M'(\xi,\eta) = \rho^m \sum_{|\gamma'|=|\delta'|=m} \xi^{\gamma'+\delta'} + \tau^m \sum_{|\gamma''|=|\delta''|=m} \eta^{\gamma''+\delta''}$

Désignons par G'_R l'ensemble borné

$$G'_R = \{ (x,y) \in G \,/\, |x| < R \}.$$

Pour tout $R > 0$, on minore $N(\lambda, L_o, G)$ par $N(\lambda, L_o, G_R)$ pour lequel on a (1.0). Faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient :

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\frac{p+q}{2m}} N(\lambda, L_o, G) \geqslant \mu_L(G) \tag{2.10}$$

Majoration : Soit ϵ_1 un nombre positif donné et V un voisinage de $\overline{G}$ tel que $d(G, \complement V) < \epsilon_1$; on prolonge sur V les coefficients $\ell_{\gamma\delta}$ en des coefficients $\tilde{\ell}_{\gamma\delta}$ vérifiant (2.4) et on considère un pavage de $\mathbb{R}^{p+q}$ en cubes $(Q_\zeta)_{\zeta \in M}$, de centres (x_ζ, y_ζ) tels que si : $M' = \{ \zeta \in M \,/\, Q_\zeta \cap G \neq \phi \}$, on ait, pour tout $(x,y) \in Q_\zeta$

$$(2.11) \qquad \begin{aligned} |\tilde{\ell}_{\gamma'\delta'}(x,y) - \tilde{\ell}_{\gamma'\delta'}(x_\zeta, y_\zeta)| &\leqslant k_1 \, \epsilon_1 \, \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(x) \\ |\tilde{\ell}_{\gamma''\delta''}(x,y) - \tilde{\ell}_{\gamma''\delta''}(x_\zeta, y_\zeta)| &\leqslant k_1 \, \epsilon_1 \, \tau^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(x) \end{aligned}$$

On appelle ℓ_ζ la forme intégrodifférentielle de coefficients (constants) $\tilde{\ell}_{\gamma\delta}(x_\zeta, y_\zeta)$, définie sur Q_ζ ; on a :

$$N(\lambda, L_o, G) \leqslant N(\lambda, L_o, \bigcup_{\zeta \in M'} Q_\zeta) \leqslant \sum_{\zeta \in M'} N((1+\epsilon_1)\lambda, \overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(Q_\zeta), \ell_\zeta) \tag{2.12}$$

On sait de plus (théorème 1.0) que $(\text{mes } Q_\zeta)^{-1} \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\frac{p+q}{2m}} N(\lambda, \overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(Q_\zeta), \ell_\zeta)$ tend vers une limite finie quand mes Q_ζ tend vers 0.

On déduit de ce qui précède que :

$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-\frac{p+q}{2m}} N(\lambda, L_o, G) \leqslant$$
$$\sum_{\zeta \in M'} (1+\epsilon_1)^{\frac{p+q}{2m}} \limsup_{\lambda \to \infty} [(1+\epsilon_1)\lambda]^{-\frac{p+q}{2m}} N((1+\epsilon_1)\lambda, \overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(Q_\zeta), \ell_\zeta)$$

Faisons tendre mes Q_ζ puis ϵ_1 vers 0 ; on a le résultat.

5. Démonstration du Théorème II.2

On suppose vérifiées les hypothèses (2.0) à (2.6), (2.8) et (2.9). Pour obtenir une estimation de $N(\lambda, L_o, G)$ on découpe $\mathbb{R}^p$.

Découpage : Soit ϵ_2 un nombre positif donné ; on considère un pavage de $\mathbb{R}^p$ en pavés égaux et disjoints $(K_\zeta)_{\zeta \in M}$ de centre x_ζ, tel que

$$|\ell_{\gamma'\delta'}(x) - \ell_{\gamma'\delta'}(x_\zeta)| < k_1\, \epsilon_2\, \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(x) \text{ pour tout } x \in K_\zeta$$

(2.13)

$$|\ell_{\gamma''\delta''}(x,y) - \ell_{\gamma''\delta''}(x_\zeta,y)| < k_1\, \epsilon\, \tau^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(x) \text{ pour tout } x \in K_\zeta$$

posons $G_\zeta = K_\zeta \times \mathcal{O}$ et

$$\ell_\zeta(u,v) = \int_{G_\zeta} \Big[\sum_{\substack{|\gamma'|\leqslant m \\ |\delta'|\leqslant m}} \ell_{\gamma'\delta'}(x_\zeta) D_x^{\gamma'} u \overline{D_x^{\delta'} v} + \sum_{\substack{|\gamma''|\leqslant m \\ |\delta''|\leqslant m}} \ell_{\gamma''\delta''}(x_\zeta,y) D_y^{\gamma''} u \overline{D_y^{\delta''} v} \Big]\, dx\, dy$$

On a, comme précédemment

$$|\ell_\zeta(u,v) - \ell_{G_\zeta}(u,v)| \leqslant k_1\, \epsilon_2\, \|u\|^2_{\nu\tau G_\zeta} \leqslant \epsilon_2\, \ell_{G_\zeta}(u,u)$$

et par conséquent,

$$N((1-\epsilon_2)\lambda, \overset{i}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_\zeta) \leqslant N(\lambda, \overset{i}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_{Q_\zeta}) \leqslant N((1+\epsilon_2)\lambda, \overset{i}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_\zeta) \tag{2.14}$$

or

$$\sum_{\zeta \in M} N(\lambda, \overset{o}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_{G_\zeta}) \leqslant N(\lambda, L_o, G) \leqslant \sum_{\zeta \in M} N(\lambda, \overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_{G_\zeta})$$

on en déduit

$$\sum_{\zeta \in M} (N(1-\epsilon_2)\lambda, \overset{o}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_\zeta) \leqslant N(\lambda, L_o, G) \leqslant \sum_{\zeta \in M} N((1+\epsilon_2)\lambda, \overset{1}{H}{}^m_{\nu\tau}(G_\zeta), \ell_\zeta) \tag{2.15}$$

Séparation des variables : Sur chaque G_ζ on a des opérateurs à coefficients ne dépendant que de y ; appelons B_{x_ζ} l'opérateur associé au triplet variationnel $(\overset{o}{H}{}^m(\mathcal{O}), L^2(\mathcal{O}), b_{x_\zeta\,\mathcal{O}})$ avec

$$b_{x_\zeta\,\theta}(u,v) = \sum_{\substack{|\gamma''|\leq m \\ |\delta''|\leq m}} \int_\theta \ell_{\gamma''\delta''}(x_\zeta,y) D_y^{\gamma''} u \, \overline{D_y^{\delta''} v} \, dy$$

$\mu_j(x_\zeta)$ étant valeur propre de B_{x_ζ}, appelons $\psi_{x_\zeta,j}$ la fonction propre associée, la suite $(\psi_{x_\zeta,j})_{j\in N}$ étant orthonormale totale dans $L^2(\theta)$.

On désigne par $C_{\zeta\,i}$ (i = 0 ou 1 précisant les conditions limites), l'opérateur défini sur K_ζ par

$$C_{\zeta i} = \sum_{\substack{|\gamma'|\leq m \\ |\delta'|\leq m}} (-1)^{|\gamma'|} \ell_{\gamma'\delta'}(x_\zeta) \, D_x^{\gamma'+\delta'},$$

par $(\varphi^i_{\zeta,k})_{k\in \mathbb{N}}$ la suite orthonormée dans $L^2(K_\zeta)$ des fonctions propres de $C_{\zeta i}$ et par $\nu^i_{\zeta k}$ les valeurs propres associées :

$$C_{\zeta i}\, \varphi^i_{\zeta k} = \nu^i_{\zeta k}\, \varphi^i_{\zeta k}$$

on a :

LEMME 2.1. *Avec les notations précédentes*

$$N(\lambda, L_{\zeta i}, G_\zeta) = \sum_{j\in \mathbb{N}} N(\lambda - \mu_j(x_\zeta), C_{\zeta i}, K_\zeta).$$

Démonstration. L'ensemble $(\varphi^i_{\zeta,k} \otimes \psi_{x_{\zeta,j}})_{k,j}$ forme une base orthonormée de $L^2(K_\zeta) \otimes L^2(\theta)$. Les fonctions de la forme $\varphi^i_{\zeta,k}(x)\, \psi_{x_{\zeta,j}}(y)$ forment une base orthonormée de $L^2(K_\zeta \times \theta)$; de plus ces fonctions sont les fonctions propres de $L_{\zeta i}$ défini sur G_ζ et

$$\ell_\zeta(\varphi^i_{\zeta,k}\, \psi_{x_{\zeta,j}}, \varphi^i_{\zeta,k}\, \psi_{x_{\zeta,j}}) = \nu^i_{\zeta,k} + \mu_j(x_\zeta)$$

on en déduit que :

$$\text{card}\ \left\{(\nu^i_{\zeta,k}, \mu_j(x_\zeta) \,/\, \nu^i_{\zeta,k} + \mu_j(x_\zeta) \leq \lambda\right\} = \sum_{j\in \mathbb{N}} \text{card}\ \left\{\nu^i_{\zeta,k} \leq \lambda - \mu_j(x_\zeta)\right\}.$$

et on a alors le lemme.

Posons $M^o = \left\{\zeta \in M \mid \nu^i_{\zeta,1} + \mu_1(x_\zeta) < \lambda\right\}$; on remarque que si $\zeta \notin M_o$ ou si $\mu_j(x_\zeta) > \lambda$, alors $N(\lambda - \mu_j(x_\zeta), C_{\zeta i}, K_\zeta) = 0$.

Par conséquent, en utilisant (2.18) et (2.19), on obtient :

$$\sum_{\zeta \in M_o} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \mu_j(x_\zeta) < \lambda}} N((1-\epsilon_2)\lambda - \mu_j(x_\zeta), C_{\zeta o}, K_\zeta) \leqslant N(\lambda, L_o, G) \leqslant$$

$$\sum_{\zeta \in M^o} \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \mu_j(x_\zeta) < \lambda}} N((1+\epsilon_2)\lambda - \mu_j(K_\zeta), C_{\zeta 1}, K_\zeta)$$

M_o est fini et on n'a que des termes positifs ou nuls ; on peut donc permuter les signes Σ. Par ailleurs,

$C_{\zeta i}$ est un opérateur à coefficients constants et on a

$$N(\lambda, C_{\zeta i}, K_\zeta) = \omega_{mp}(x_\zeta) \text{ mes } K_\zeta \, \lambda^{p/2m} + 0(\lambda^{\frac{p-1}{2m}})$$

($\omega_{mp}(x)$ défini dans le théorème 2.2).
On en déduit que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\zeta \in M_o \\ \mu_j(x_\zeta) < \lambda}} N(\lambda(1-\epsilon_2) - \mu_j(x_\zeta), C_{\zeta i}, K_\zeta) =$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\zeta \in M_o \\ \mu_j(x_\zeta) < \lambda}} \omega_{mp}(x_\zeta) \text{ mes } K_\zeta \, [(1-\epsilon_2)\lambda - \mu_j(x_\zeta)]^{p/2m} + 0(\lambda^{\frac{p-1}{2m}})$$

faisant tendre mes K_ζ vers 0 on a le théorème 2.2.

III - CAS D'UN OUVERT QUELCONQUE

m, p et q sont toujours des entiers naturels et ν un nombre réel.

(3.0) ϕ est une fonction de classe C^o, strictement positive, définie sur $\mathbb{R}^p$.

(3.1) $\mathcal{O}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$ et on suppose que $\overline{\mathcal{O}}$ est étoilé par rapport à l'origine.

On définit Ω, ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$ par

$$\Omega = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^{p+q} \,/\, X \in \mathbb{R}^p \,;\, Y = (Y_1,\dots,Y_q) \in \mathbb{R}^q \,;\, \frac{Y}{\phi(X)} = \left(\frac{Y_1}{\phi(X)},\dots,\frac{Y_q}{\phi(X)}\right) \in \mathcal{O}\right\}$$

1. Les espaces

(3.2) Soit σ une fonction continue, strictement positive, définie sur $\mathbb{R}^p$.

On définit l'espace $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$ [resp. $\mathscr{H}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$] comme le complété de $D(\Omega)$ [resp. $D(\overline{\Omega})$] pour la norme $\|\ \|_{\nu\sigma\Omega}$ avec

$$\| U \|_{\nu\sigma\Omega} = \left\{ \int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha| \leqslant m} \rho^{|\alpha|}(x)\, |D_x^\alpha U|^2 + \sum_{|\beta| \leqslant m} \sigma^{|\beta|}(x)\, |D_y^\beta U|^2 \Big] dxdy \right\}^{1/2}$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $\beta \in \mathbb{N}^q$, les notations étant les mêmes que précédemment.

On introduit aussi, comme dans II, des espaces «mixtes» ; ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\tilde{\omega}$ l'ouvert

$$\tilde{\omega} = \left\{ (X,Y) \in \Omega \,/\, X \in \omega \right\}$$

et par $\overset{1}{\mathscr{H}}{}^m_{\nu\sigma}(\tilde{\omega})$ l'ensemble des restrictions à $\tilde{\omega}$ des éléments de $\mathscr{H}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$.

Ces espaces, munis de leur produit scalaire naturel, sont des espaces de Hilbert et on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. *On suppose vérifiées les hypothèses (3.0) à (3.2) et*

(3.3) $\dfrac{\sigma(X)}{\phi^2(X)}$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $|X|$ *tend vers* $+\infty$ *ou* $\nu > 2m$

alors l'injection de $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$ *est compacte.*

Démonstration de la proposition 3.1. Elle s'effectue comme dans II, en utilisant, selon les cas, l'inégalité de Poincaré ou l'inégalité de Hardy.

On considère maintenant un problème aux limites elliptiques défini sur Ω.

2. L'opérateur

Soit a_Ω une forme intégrodifférentielle $\overset{\circ}{\mathscr{H}}{}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$ h.c.c. :

$$a_\Omega(U,V) = \int_\Omega \Big[\sum_{\substack{|\gamma'| \leqslant m \\ |\delta'| \leqslant m}} a_{\gamma'\delta'}(X,Y) D_x^{\gamma'} U\, \overline{D_x^{\delta'} V} + \sum_{\substack{|\gamma''| \leqslant m \\ |\delta''| \leqslant m}} a_{\gamma''\delta''}(X,Y) D_y^{\gamma''} U\, \overline{D_y^{\delta''} V} \Big] dxdy$$

on fait les hypothèses suivantes :

Il existe $k_3 > 0$ tel que, pour tout ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^p$

(3.4) $$a_{\tilde{\omega}}(U,U) \geqslant k_3 \| U \|^2_{\nu\sigma\tilde{\omega}} \text{ pour tout } U \in \mathring{\mathcal{H}}^m_{\nu\sigma}(\Omega)$$

$\tilde{\omega}$ étant défini comme précédemment

(3.5) $$a_{\gamma\delta} = \overline{a_{\delta\gamma}} \in C^0(\overline{\Omega})$$

(3.6) il existe $k_4 > 0$ vérifiant, pour tout $(X,Y) \in \Omega$

$$|a_{\gamma'\delta'}(X,Y)| \leqslant k_4\, \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(X)$$

$$|a_{\gamma''\delta''}(X,Y)| \leqslant k_4\, \sigma^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(X)$$

(3.7) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \eta(\epsilon) \quad d((X,Y),(X',Y')) \leqslant \eta(\epsilon) \Rightarrow$

$$|a_{\gamma'\delta'}(X,Y) - a_{\gamma',\delta'}(X',Y')| \leqslant \epsilon\, \rho^{\frac{|\gamma'+\delta'|}{2}}(X)$$

$$|a_{\gamma''\delta''}(X,Y) - a_{\gamma''\delta''}(X',Y')| \leqslant \epsilon\, \sigma^{\frac{|\gamma''+\delta''|}{2}}(X)$$

$$|\sigma(X) - \sigma(X')| \leqslant \epsilon\, \sigma(X)$$

$$|\phi(X) - \phi(X')| \leqslant \epsilon\, \phi(X)$$

$$b_{X\,\theta}(U,V) = \sum_{|\gamma''| = |\delta''| = m} \int_{\theta} a_{\gamma''\delta''}(X, Y\,\phi(X))\, D_Y^{\gamma''} U\, \overline{D_Y^{\delta''} V}\, dY$$

est une forme $\mathring{H}^m(\theta)$ h.c.c. et on désigne par $B_{X\theta}$ l'opérateur associé au triplet $(\mathring{H}^m(\theta), L^2(\theta), b_{X\theta})$ et par $(\mu_j(X))_{j \in \mathbb{N}}$ la suite croissante de ses valeurs propres.

3. Résultats

$\tilde{\omega}$ étant un ouvert de Ω, on désigne par A_j l'opérateur positif autoadjoint non borné dans $L^2(\tilde{\omega})$ associé au triplet variationnel $(\mathring{\mathcal{H}}^m_{\nu\sigma}(\tilde{\omega}), L^2(\tilde{\omega}), a_{\tilde{\omega}})$. L'hypothèse de la proposition (3.1) étant vérifiée, le spectre de A_o défini sur Ω est purement ponctuel ; on note :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots \quad \text{avec} \quad \lambda_j \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

la suite ordonnée des valeurs propres de A_o, chacune étant répétée selon sa multiplicité ; on étudie le comportement asymptotique, quand λ tend vers $+\infty$, de $N(\lambda, A_o, \Omega) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1$.

On obtient :

THEOREME 3.1. *On suppose que les hypothèses (3.1) à (3.6) sont vérifiées et que*

(3.8) $\quad (1+ |X|^2)^{-p(1-\nu/2m)} \left[\dfrac{\sigma(x)}{\phi^2(x)}\right]^q$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $|X|$ *tend vers* $+\infty$ *alors*

$$\mu_A(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{p+q}} \int_\Omega dXdY \int_{\{(\xi,\eta) \in R^{p+q} / A'(x,y,\xi,\eta) < 1\}} d\xi d\eta$$

est fini, $A'(x,y,\xi,\eta)$ *désignant le symbole de la partie principale de* A, *et*

$$N(\lambda, A_o, \Omega) \sim \lambda^{\frac{p+q}{2m}} \mu_A(\Omega) \qquad \lambda \to +\infty$$

THEOREME 3.2. *On suppose que les hypothèses (3.1) à (3.7) sont vérifiées et que*

(3.9) *les coefficients* $a_{\gamma,\delta}$, *sont indépendants de* Y

(3.10) $\quad (1+ |X|^2)^{-p(1-\nu/2m)} \left[\dfrac{\sigma(x)}{\phi^2(x)}\right]^q$ *est borné sur* $\mathbb{R}^p$ *alors*

$$N(\lambda, A_o, \Omega) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\{X/\mu_j(x) < \lambda \quad \phi^{2m}(x)\}} \omega_{m_p}(x) \, [\lambda - \mu_j(x) \, \phi^{-2m}(x)]^{\frac{p}{2m}} dx$$

quand λ *tend vers* $+\infty$ *avec*

$$\omega_{mp}(x) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^p / \sum_{\substack{|\gamma'| = |\delta'| \\ = m}} a_{\gamma'\delta'}(x) \xi^{\gamma'+\delta'} < 1\}} d\xi$$

$\mu_j(x)$ *désignant les valeurs propres du problème variationnel* $(\overset{\circ}{H}{}^m(\theta), L^2(\theta), b_{X\,\theta})$ *avec*

$$b_{X\,\theta}(U,V) = \sum_{\substack{|\gamma''| = |\delta''| \\ = m}} \int_\theta a_{\gamma''\delta''}(X, Y\phi(X)) \, D_Y^{\gamma''} U \, \overline{D_Y^{\delta''} V} \, dY$$

4. Application

On reprend l'exemple de l'introduction :

$$A = I + (-1)^m \left[\frac{\partial^m}{\partial X^m} (1+X)^\nu \frac{\partial^m}{\partial X^m} + (1+X)^\sigma \frac{\partial^{2m}}{\partial Y^{2m}} \right]$$

défini sur $\Omega = \left\{ (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ X \in \mathbb{R}_+ \ ; 0 < Y < (1+X)^r \right\}$ avec $\sigma > 2mr$; ou, quand $\sigma < 2mr$, $\nu > 2m$.

On retrouve les résultats du II en remplaçant σ par $\sigma - 2mr$ (ce qui revient à faire le changement de variables $x = X$ et $y = Y(1+X)^{-r}$).

On obtient :

1°) Si $\nu + \sigma - 2mr > 2m$

$$N(\lambda, A_0, \Omega) \sim \frac{\lambda^{1/m}}{2\pi^2[\sigma+\nu-2m(r+1)]} B\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}\right) \qquad \lambda \to +\infty$$

2°) Si $\nu + \sigma - 2mr < 2m$

$$N(\lambda, A_0, \Omega) \sim \frac{1}{(2m-\nu+\sigma-2mr)} \frac{\lambda^{\frac{1}{2m} + \frac{2m-\nu}{2m(\sigma-2mr)}}}{\pi^{1+\frac{2m-\nu}{\sigma-2mr}}} \zeta\left(\frac{2m-\nu}{\sigma-2mr}\right) B\left(\frac{1}{2m}, \frac{2m-\nu}{2m(\sigma-2mr)}\right) \qquad \lambda \to +\infty$$

3°) Si $\nu + \sigma - 2mr = 2m$

$$N(\lambda, A_0, \Omega) \sim \frac{1}{4m\pi^2} \frac{1}{\sigma-2mr} B\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}\right) \lambda^{1/2} \operatorname{Log} \lambda \qquad \lambda \to +\infty$$

Remarque. Le théorème 3.1 se démontre comme le théorème 2.1.

5. Démonstration du théorème 3.2

Pour démontrer le théorème 3.2, on procède comme dans II, par découpage, mais l'ouvert n'étant plus cylindrique, on l'encadre par des réunions de pavés. Plus précisément, ϵ_2 étant un nombre positif donné, on considère un pavage de $\mathbb{R}^p$ en pavés égaux et disjoints K_ζ, de centres X_ζ ; posant

$$\tilde{K}_\zeta = \left\{ (x,y) \in \Omega, \ x \in K_\zeta \right\},$$

on a : $I^o_\zeta \subset \tilde{K}_\zeta \subset I^1_\zeta$ avec

$$I^o_\zeta = \left\{ (X,Y) \in \mathbb{R}^{p+q} \,/\, X \in K_\zeta \,;\, \frac{1+\epsilon_2}{\phi(X_\zeta)} Y = \left(\frac{1+\epsilon_2}{\phi(X_\zeta)} Y_1, \dots, \frac{1+\epsilon_2}{\phi(X_\zeta)} Y_q\right) \in \theta \right\}$$

$$I^1_\zeta = \left\{ (X,Y) \in \mathbb{R}^{p+q} \,/\, X \in K_\zeta \,;\, \frac{1-\epsilon_2}{\phi(X_\zeta)} Y \in \theta \right\}$$

Prenons les pavés K_ζ suffisamment petits pour que la forme $a_{i\zeta}$ à coefficients figés $a_{\gamma\delta}(X_\zeta,Y)$ définie sur chaque I^i_ζ vérifie

(3.12) $$| a_{I^i_\zeta}(U,U) - a_{i\zeta}(U,U) | \leqslant \epsilon_2\, a_{I^i_\zeta}(U,U) \quad \text{pour } U \in \mathring{\mathscr{H}}^m_{\nu\sigma}(\Omega).$$

Soit ϵ_3 un nombre positif donné et R tel que si $\zeta \in M_R = \{ \zeta \in M \mid |X| > R \}$, alors :

(3.13) $$| a_{i\zeta}(U,U) - a'_{i\zeta}(U,U) | \leqslant c(1-\epsilon_2^2)(1+\epsilon_2)^{m/2}\, \epsilon_3\, a_{i\zeta}(U,U)$$

où $a'_{i\zeta}$ est la partie principale de $a_{i\zeta}$.

On se ramène alors à la démonstration du théorème II-2 en posant

$$x = X,\; y = (1 \pm \epsilon_2)\phi^{-1}(X_\zeta)Y \quad \text{et} \quad u(x,y) = (1 \pm \epsilon_2)^{-q/2}\, \phi^{q/2}(X_\zeta)\, U(X,Y) \;\;;$$

on montre en effet que

(3.14) $U \in L^2(I^i_\zeta)$ si et seulement si $u \in L^2(G_\zeta)$

(3.15) $U \in \overset{i}{\mathscr{H}}{}^m_{\nu\sigma}(I^i_\zeta)$ si et seulement si $u \in \overset{i}{H}{}^m_{\nu,\sigma(1 \pm \epsilon_2)\phi^{-2}(X_\zeta)}(G_\zeta)$

et on obtient, comme dans le cas cylindrique, en faisant tendre ϵ_2 vers 0, une minoration de $N(\lambda,A_o,\Omega_R)$ et une majoration de $N(\lambda,A_1,\Omega_R)$ avec $\Omega_R = \{ (x,y) \in \Omega \,/\, |X| > R \}$.

Pour conclure, on considère une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$f^*(\mu) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f(\lambda\mu)}{f(\lambda)} \text{ existe et est continue pour } \mu > 0$$

$$f^*(1) = 1$$

$\lambda^{-(p+q)/2m}\, f(\lambda)$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$.

De la formule (10) appliquée à l'ouvert borné

$$\Omega_R' = \{(X,Y) \in \Omega \,/\, |X| < R\}$$

et de la proposition (1.2), on déduit que

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} f^{-1}(\lambda)\, N(\lambda, A_o, \Omega_R) \leqslant \liminf_{\lambda \to +\infty} f^{-1}(\lambda) N(\lambda, A_o, \Omega) \leqslant \limsup_{\lambda \to +\infty} f^{-1}(\lambda) N(\lambda, A_1, \Omega_R).$$

Faisant tendre ϵ_3 vers 0, on a le résultat.

REFERENCES

[1] R.A. ADAMS. *«The Rellich Kondrachov theorem for unbounded domains»*. Arch Rat Mech Anal, 29, 1968, p. 39.

[2] R.A. ADAMS. *«Compact imbeddings of weighted Sobolev spaces on unbounded domains»*. Jal of Diff Eq, Vol 9, N^{O} 9, 1971.

[3] S. AGMON. *«Lectures on elliptic boundary value problems»*. Van Nostrand, 1965.

[4] J.M. AUDRIN. *«Classes de compacité de l'injection canonique entre les espaces de Sobolev relatifs à des ouverts non bornés»*. Thèse de 3e cycle, Nantes, 1976.

[5] L. BOUTET DE MONVEL et P. GRISVARD. *«Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur»*. CRAS, t. 272, N^{O} 1, 1971.

[6] F. BROWDER. *«Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self-adjoint et du type elliptique à coefficients variables»*. CRAS, t. 236, p. 214, 1953.

[7] C. CLARK. *«An embedding theorem for function spaces»*. Pac Jal Math, 19, 1964.

[8] C. CLARK. *«Rellich's embedding theorem for a spiny urchin»*. Canad Math Bull, 10, 1967, p. 731.

[9] C. CLARK. *«An asymptotic formula for the eigenvalues of the Laplacien operator in an unbounded domain»*. Bull Amer Math Soc, 72, 1966.

[10] R. COURANT et D. HILBERT. *«Methods of mathematical physics»* Intersciences.

[11] D. EDMUNDS et W. EVANS. *«Elliptic and degenerate elliptic operator in unbounded domains»*. Annali del Sc Norm Sup, Pisa, 1973.

[12] J. FLECKINGER. *«Répartition des valeurs propres d'opérateurs elliptiques sur des ouverts non bornés»*. CRAS A, t. 286, 1978, p. 149.

[13] J. FLECKINGER. *«Comportement des valeurs propres d'opérateurs elliptiques sur des ouverts non bornés»*. Publication CNRS Bordeaux, 1977.

[14] J. FLECKINGER et G. METIVIER. *«Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers»*. CRAS, t. 276, 1973, p. 913.

[15] L. GARDING. *«The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic operators»*. Math Scand, 1953.

[16] C. GOULAOUIC. *«Cours de CIME»* 3e ciclo, 1973, Edizioni Cremonese.

[17] G. METIVIER. *«Comportement asymptotique des valeurs propres de problèmes aux limites irréguliers»*. Thèse de 3e cycle, Orsay, 1973.

[18] G.V. ROZENBLJUM. *«On the eigenvalues of the first boundary value problem in unbounded domains»*. Math Sbornik, t. 89, N^{o} 2, 1972.

[19] H. TAMURA. *«The asymptotic distribution of the eigenvaluees of the Laplace operator in an unbounded domain»*. Nagya Math Jal, V 60, 1976.

[20] E.C. TITCHMARSH. *«Eigenfunction expansion»*. Oxford Univ Press, 1958.

(Manuscrit reçu le 6 mai 1979)