

MICHEL ARTOLA

GEORGES DUVAUT

**Un résultat d'homogénéisation pour une classe de problèmes
de diffusion non linéaires stationnaires**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 4, n° 1 (1982), p. 1-28

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_1_1_0

© Université Paul Sabatier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN RESULTAT D'HOMOGENEISATION POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES DE DIFFUSION NON LINEAIRES STATIONNAIRES

Michel Artola ⁽¹⁾ et Georges Duvaut ⁽²⁾

(1) *Université de Bordeaux I, Laboratoire Associé n° 226, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cédex - France.*

(2) *Université Pierre et Marie Curie, Mécanique Théorique, Laboratoire Associé n° 229, Tour 66, 4 Place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05 - France.*

Résumé : On donne un résultat d'homogénéisation pour une classe de problèmes non linéaires de diffusion stationnaire où les coefficients de diffusion dépendent de la fonction inconnue. Les démonstrations sont basées sur une méthode de type énergie et ont pu être obtenues grâce à une approximation sur les coefficients.

Summary : We give homogenization results for a class of non linear stationary diffusion problems where diffusion coefficients depend on the unknown function. Proofs are based on an energy method and have been obtained with the help of an approximation on the coefficients.

INTRODUCTION

De nombreux auteurs ont étudié ces dernières années des problèmes d'homogénéisation dans le cadre linéaire.

Pour une revue sur le sujet on pourra consulter [2] ainsi que la bibliographie de cet ouvrage et L. Tartar [13].

Dans le cadre non linéaire, les résultats sont plus fragmentaires et sont obtenus soit pour des perturbations non linéaires raisonnables d'un opérateur linéaire, soit pour des non-linéarités particulières. Voir par exemple [2], [3], [10], [11], [12].

Nous étudions, dans cet article, une classe de problèmes non linéaires de diffusion stationnaire où les coefficients de diffusion dépendent de la fonction inconnue de manière Lipschitzienne, et montrons que la méthode d'énergie due à L. Tartar peut être utilisée ici comme dans le cas linéaire.

Plus précisément, nous montrons que tout revient à homogénéiser une famille d'opérateurs linéaires de coefficients $a_{ij}(\cdot, \lambda)$, dépendent d'un paramètre λ , ce qui conduit à une famille d'opérateurs homogénéisés de coefficients $q_{ij}(\lambda)$ donnés par les formules usuelles de [2].

Les coefficients du problème non linéaire homogénéisé du problème initial sont alors $q_{ij}(u)$ où u est la solution du problème homogénéisé.

Pour obtenir ce résultat nous utilisons une méthode de régularisation des coefficients et des propriétés d'interversion de limites.

Bien entendu, mais cela n'est pas fait ici, le résultat obtenu s'étend aux équations d'évolution de diffusion en suivant les méthodes de [2].

Le plan de cet article est le suivant :

- I. - POSITION DU PROBLEME ET ENONCE DU RESULTAT
- II. - DEMONSTRATION DU THEOREME I
- III. - QUELQUES LEMMES
- IV. - DEMONSTRATION DU THEOREME II DANS LE CAS DE COEFFICIENTS REGULIERS
- V. - DEMONSTRATION DU THEOREME II DANS LE CAS GENERAL

I. - POSITION DU PROBLEME ET ENONCE DU RESULTAT

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . On désigne par Γ la frontière de Ω que l'on suppose très régulière. On introduit

$$Y = \prod_{k=1}^n]0, Y_k^0[, Y_k^0 > 0 , k = 1, 2, \dots, n$$

un «rectangle» de \mathbb{R}^n et l'on dira qu'une fonction φ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est Y -périodique, si elle admet la période Y_k^0 dans la direction y_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Ceci posé, on se donne pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ des coefficients de comportement

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} : (y, \lambda) & \longrightarrow & a_{ij}(y, \lambda) \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

vérifiant

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, y \rightarrow a_{ij}(y, \lambda) \text{ est mesurable et } Y\text{-périodique} \\ \text{ii) Il existe } \beta > 0 \text{ tel que } |a_{ij}(y, \lambda)| \leq \beta, \text{ p.p. en } y, \text{ pour tout } \lambda \text{ et pour tout } \\ \text{ } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{iii) Il existe } k > 0 \text{ tel que} \\ \text{ } |a_{ij}(y, \lambda) - a_{ij}(y, \mu)| \leq k |\lambda - \mu|, \\ \text{ } \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \text{iv) Il existe } \alpha_0 > 0 \text{ tel que} \\ \text{ } a_{ij}(y, \lambda) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2, \\ \text{ } \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. en } y, \text{ et pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Soit $\epsilon > 0$ destiné à tendre ultérieurement vers zéro. On suppose que Ω a une structure ϵY -périodique et l'on définit les coefficients a_{ij}^ϵ dans Ω par :

$$(2) \quad a_{ij}^\epsilon(x, \lambda) = a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right).$$

On considère alors le problème de diffusion non linéaire :

Problème P_ϵ :

On cherche $u^\epsilon, \sigma_i^\epsilon$ solution de

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i^\epsilon = f \\ \sigma_i^\epsilon = a_{ij}^\epsilon(x, u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \\ u^\epsilon|_{\Gamma} = 0. \end{array} \right.$$

Après avoir montré que ce problème P_ϵ possède une solution au moins, pour tout $\epsilon > 0$ (Théorème 1), on s'intéresse à la limite de ces solutions lorsque ϵ tend vers zéro (Théorème 2).

On introduit maintenant les notations :

$$(4) \quad a_Y(\lambda; \varphi, \psi) = \int_Y a_{ij}(y, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy$$

$$(5) \quad a^\epsilon(\lambda; \varphi, \psi) = \int_\Omega a_{ij}^\epsilon(x, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx$$

* La répétition de l'indice indique une sommation.

et l'espace

$$(6) \quad W(Y) = \{ \varphi \mid \varphi \in H^1(Y), \text{ traces de } \varphi \text{ égales sur les faces opposées de } Y \}.$$

On prolonge alors les fonctions $\varphi \in W(Y)$ à \mathbb{R}^n par Y -périodicité de sorte que (en notant encore φ le prolongement obtenu) $\varphi \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.

On a alors :

THEOREME 1.

i) Sous les hypothèses (1), (2) sur les coefficients et

$$(7) \quad f \in L^2(\Omega),$$

il existe au moins une solution au Problème P_ϵ , c'est-à-dire u^ϵ vérifiant

$$(8) \quad u^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \quad a^\epsilon(u^\epsilon; u^\epsilon, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{où } (f, v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

ii) En outre, il existe $p > 2$, tel que si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, alors :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \| \text{grad } u^\epsilon \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| f \|_{W^{-1,p}(\Omega)} \end{array} \right.$$

où C et p ne dépendent que de n, Ω, α, β .

Le résultat principal de cet article annoncé dans [1], est alors contenu dans le

THEOREME 2. *Lorsque ϵ tend vers zéro, il existe une sous-suite u^ϵ telle que*

$$(10) \quad u^\epsilon \rightarrow u \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible}$$

où u est une solution de

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} (q_{ij}(u) \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f \text{ dans } \Omega, \end{array} \right.$$

les $q_{ij}(\lambda)$ étant donnés par les mêmes formules que dans le cas linéaire [2], λ étant considéré

comme un paramètre, c'est-à-dire :

$$(11) \quad a_{ij}(\lambda) = \frac{1}{|Y|} a_Y(\lambda; \chi_\lambda^i - y_i, \chi_\lambda^j - y_j) \quad (|Y| = \text{mesure de } Y);$$

où les χ_λ^i sont donnés par

$$(12) \quad \chi_\lambda^i \in W(Y), a^*(\lambda; \chi_\lambda^i - y_i, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in W(Y)$$

$$(a^*(\lambda; \varphi, \psi) = a(\lambda; \psi, \varphi)).$$

II. - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

1) On rappelle les résultats suivants :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soient } b_{ij} \in L^\infty(\Omega) \text{ avec} \\ \exists \alpha > 0, b_{ij} \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Alors pour g donné dans $H^{-1}(\Omega)$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \varphi \text{ unique solution dans } H_0^1(\Omega) \text{ avec} \\ \int_{\Omega} b_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = \langle g, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

De plus, d'après un théorème de Meyer (cf. [2] et [8])

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } p > 2 \text{ tel que si } g \in W^{-1,p}(\Omega) \text{ la solution de (14) vérifie } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \text{avec} \\ \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|g\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \end{array} \right.$$

où on définit

$$(16) \quad \|g\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \inf_{g = \text{Div } h} \|h\|_{L^p(\Omega)}.$$

Le nombre p ne dépend que de α , de $\text{Sup } |b_{ij}|$, de Ω et de n . La constante C dépend des mêmes quantités que p .

Remarque 1. i) On n'a pas de contrôle de p tel que (15) ait lieu. On sait qu'en général ($n > 2$) on ne peut avoir $p > n$.

ii) On peut noter que si $g \in L^2(\Omega)$ alors $g \in W^{-1,p}(\Omega)$ si

$$W^{1,p'}(\Omega), \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) \text{ est contenu dans } L^2(\Omega)$$

ce qui a lieu pour

$$2 \leq p \leq q^*, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire pour

$$2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2} \quad \text{si } n > 2.$$

Si $n = 2$, $L^2(\Omega) \subset W^{-1,p}(\Omega)$ quel que soit p .

2) Démonstration du théorème 1 - Première étape (voir aussi [6])

Si $w \in L^q(\Omega)$, $q > 1$ et si on choisit $b_{ij}^\epsilon(x) = a_{ij}^\epsilon(x, w(x))$ il résulte de [4], [9] que $x \rightarrow b_{ij}^\epsilon(x)$ est mesurable et vérifie (13). Ainsi il existe u^ϵ , unique, tel que

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} a_{ij}^\epsilon(x, w(x)) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

et il existe $p > 2$ tel que si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ alors $u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec

$$(18) \quad \|\nabla u^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$$

où p et C sont des constantes indépendantes de w et ϵ .

Deuxième étape

La première étape permet de définir une application T^ϵ telle que

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} w \longrightarrow u_\epsilon = T^\epsilon(w) \\ \text{de } L^p(\Omega) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right.$$

Comme $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ avec injection compacte, $u_\epsilon = T^\epsilon(w)$ reste dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc dans un compact de $L^p(\Omega)$ lorsque w décrit un borné de $L^p(\Omega)$.

Si l'on montre le :

LEMME 1. Si une suite $\{w_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est telle que,

$$(20) \quad w_m \in L^p(\Omega), \quad w_m \rightarrow w \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort,}$$

alors

$$(21) \quad u_m = T^\epsilon(w_m) \rightarrow u = T^\epsilon(w) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ fort.}$$

On peut appliquer à T^ϵ le théorème du point fixe de Schauder, ainsi

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } u^\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ tel que } u^\epsilon = T^\epsilon(u^\epsilon) \\ \|\nabla u^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Démonstration du lemme 1. Considérons une suite $w_m \in L^p(\Omega)$ telle que w_m converge vers w dans $L^p(\Omega)$; alors $u_m = T^\epsilon(w_m)$ et $u = T^\epsilon(w)$ satisfont :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^\epsilon(w_m; u_m, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{pour tout } v \in W_0^p(\Omega) \\ a^\epsilon(w; u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{pour tout } v \in W_0^p(\Omega). \end{array} \right.$$

Par différence

$$a^\epsilon(w_m; u_m - u, v) = a^\epsilon(w_m; u, v) - a^\epsilon(w; u, v)$$

c'est-à-dire

$$a^\epsilon(w_m; u_m - u, v) = \int_{\Omega} (a_{ij}^\epsilon(w_m) - a_{ij}^\epsilon(w)) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

il en résulte que, d'après (15), (16) :

$$(24) \quad \|\nabla(u_m - u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \sum_i \|a_{ij}^\epsilon(w_m) - a_{ij}^\epsilon(w) \frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme $w_m \rightarrow w$ dans $L^p(\Omega)$ fort, $w_m \rightarrow w$ en mesure. Alors, les a_{ij} vérifiant les conditions de Carathéodory * il résulte de [9] que $a_{ij}^\epsilon(w_m) - a_{ij}^\epsilon(w) \rightarrow 0$ en mesure, cette quantité étant majorée

* $f : (x, \lambda) \rightarrow f(x, \lambda)$ satisfait aux conditions de Carathéodory si

- i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, \lambda) : x \rightarrow f(x, \lambda)$ est mesurable
- ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x, \cdot) : \lambda \rightarrow f(x, \lambda)$ est continue.

indépendamment de m , puisque $|a_{ij}(x, \lambda)| \leq \beta$. Comme par ailleurs, $|\frac{\partial u}{\partial x_j}|^p \in L^1(\Omega)$, nous allons montrer :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varphi_m \in L^\infty(\Omega), \quad \|\varphi_m\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \text{ converge en mesure vers zéro, alors} \\ \text{pour toute } \psi \in L^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \varphi_m \psi \, dx \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Or pour $\delta > 0$, soit

$$E_{N,\delta} = \{x \in \Omega ; |\varphi_n(x)| \leq \delta \text{ pour } n \geq N\}.$$

Les ensembles mesurables $E_{N,\delta}$ croissent avec N et

$$\text{mes } E_{N,\delta} \rightarrow \text{mes } \Omega \text{ lorsque } N \rightarrow +\infty$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi_m \psi \, dx \right| &\leq \int_{E_{N,\delta}} |\psi_m| |\varphi| \, dx + \int_{E_{N,\delta}} |\varphi_m| |\psi| \, dx \\ &\leq \delta \int_{\Omega} |\psi| \, dx + M \int_{E_{N,\delta}} |\psi| \, dx. \end{aligned}$$

Pour $\eta > 0$ donné, on peut trouver δ indépendant de N tel que

$$\delta \|\psi\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\eta}{2}$$

δ ainsi fixé, on peut choisir N assez grand de sorte que

$$M \int_{E_{N,\delta}} |\psi| \, dx < \frac{\eta}{2}$$

car $\text{mes } E_{N,\delta} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

On en déduit (25), d'où il résulte que le second membre de (25) tend vers zéro lorsque $m \rightarrow +\infty$ et la démonstration du lemme 1 est ainsi achevée. ■

III. – QUELQUES LEMMES

Considérons une fonction $\beta : (y, \lambda) \rightarrow \beta(y, \lambda)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} et vérifiant :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \beta(y, \lambda) \text{ est } Y\text{-périodique en } y \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{ii) } \beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \\ \text{iii) } \text{il existe } k > 0, \text{ tel que } |\beta(y, \lambda) - \beta(y, \mu)| \leq k |\lambda - \mu| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On introduit

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^\epsilon(x, \lambda) = \beta\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right) \\ \bar{\beta}(\lambda) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \beta(y, \lambda) dy. \end{array} \right.$$

On a alors :

LEMME 2. On suppose que β vérifie (26), alors, $\forall p \geq 1$

$$(28) \quad \int_{\Omega} |\beta^\epsilon(x, \varphi(x)) - \beta^\epsilon(x, \psi(x))|^p dx \leq k^p \int_{\Omega} |\varphi(x) - \psi(x)|^p dx \quad \forall \varphi, \psi \in L^p(\Omega)$$

$$(29) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \beta^\epsilon}{\partial \lambda}(x, \varphi(x)) \right|^p \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^p dx \leq k^p \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^p dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

LEMME 3. On suppose que β vérifie (26), alors

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \varphi^\epsilon \rightarrow \varphi \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort} \\ \beta^\epsilon(\cdot, \varphi^\epsilon) \rightarrow \bar{\beta}(\varphi) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Démonstration du lemme 2.

i) L'inégalité (28) est immédiate grâce à (26,iii).

ii) Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il suffit d'établir (29) pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

De plus, quitte à remplacer $\beta(\cdot, \lambda)$ par $\beta(\cdot, \lambda) - \beta(\cdot, 0)$ on peut supposer $\beta(\cdot, 0) = 0$.

Ainsi de (28), où l'on choisit $\psi(x) = \varphi(x+h)$, $h = (0, 0, 0, \dots, h_i, 0, 0, \dots, 0)$ $h_i > 0$ (à la $i^{\text{ème}}$ place),

on déduit :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\beta^\epsilon(x, \varphi(x+h)) - \beta^\epsilon(x, \varphi(x))}{h_i} \right]^p dx \leq k^p \int_{\Omega} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h_i} \right|^p dx$$

or (voir par exemple [9]) :

$$\frac{\beta^\epsilon(\cdot, \varphi(\cdot+h)) - \beta^\epsilon(\cdot, \varphi(\cdot))}{h_i} \text{ tend dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ vers } \frac{\partial \beta^\epsilon}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$$

(car si β vérifie (26), on a $\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et :

$$\frac{\varphi(\cdot+h) - \varphi(\cdot)}{h_i} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ dans } L^p(\Omega).$$

On en déduit alors (29). ■

Démonstration du lemme 3. D'après la structure périodique de Ω on peut écrire :

$$\Omega = \bigcup_q Y_q^\epsilon, \quad |Y_q^\epsilon| = \epsilon |Y|.$$

En introduisant la fonction caractéristique χ_q^ϵ de Y_q^ϵ , à $\varphi \in L^p(\Omega)$ on associe $\hat{\varphi}_\epsilon$ par

$$(31) \quad \hat{\varphi}_\epsilon = \sum_q \bar{\varphi}_{\epsilon,q} \hat{\chi}_q^\epsilon, \quad \bar{\varphi}_{\epsilon,q} = \frac{1}{\epsilon |Y|} \int_{Y_q} \varphi(x) dx$$

et l'on note que

$$(32) \quad \hat{\varphi}_\epsilon \rightarrow \varphi \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort pour } \epsilon \rightarrow 0.$$

Maintenant pour φ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \beta^\epsilon(x, \hat{\varphi}_\epsilon(x)) \psi(x) dx = \sum_q \int_{Y_q} \beta^\epsilon(x, \hat{\varphi}_\epsilon) \psi dx = \sum_q \epsilon^n \int_Y \beta(y, \varphi_{\epsilon,q}) \psi(y_q + \epsilon y) dy, \\ y_q \in Y_q$$

de sorte que

$$(33) \quad \int_{\Omega} \beta^\epsilon(x, \hat{\varphi}_\epsilon(x)) \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} \bar{\beta}(\varphi) \psi dx \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0$$

résultat qui s'étend par densité à $\varphi \in L^p(\Omega)$, $\psi \in L^{p'}(\Omega)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

Ainsi si $\varphi^\epsilon \rightarrow \varphi$ dans $L^p(\Omega)$ fort, on peut écrire :

$$(34) \quad \int_{\Omega} [\beta^\epsilon(\varphi^\epsilon) - \beta(\varphi)] \psi \, dx = \int_{\Omega} (\beta^\epsilon(\hat{\varphi}_\epsilon) - \beta(\varphi)) \psi \, dx + \int_{\Omega} [\beta^\epsilon(\varphi^\epsilon) - \beta^\epsilon(\hat{\varphi}_\epsilon)] \psi \, dx$$

Le premier terme de (34) tend vers zéro d'après (33) et le second terme est majoré en valeur absolue par

$$k \|\varphi^\epsilon - \hat{\varphi}_\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

d'après le lemme 2, terme qui tend vers zéro en vertu de la définition de φ^ϵ et de (32). D'où le lemme 3. ■

Remarque 2. En fait la conclusion du lemme 3 est valable avec des hypothèses plus faibles sur β : la condition de Lipschitz (26 ; iii) n'est pas indispensable ; l'hypothèse $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^n ; C^0B(\mathbb{R}))^*$ où $C^0B(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues bornées sur la droite, est suffisante. Pour le voir on approchera β par une suite β^θ de fonctions de l'espace $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, avec $\beta^\theta \rightarrow \beta$ dans $L^p(Y ; C^0(\mathbb{R}))$ lorsque $\theta \rightarrow \infty$, où $C^0(\mathbb{R})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

IV. - DEMONSTRATION DU THEOREME 2 DANS LE CAS DE COEFFICIENTS REGULIERS

IV.1. - Première étape

Soit u^ϵ solution de (3). Avec les hypothèses (1) on a d'après (9) :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u^\epsilon \text{ reste dans un borné de } W_0^{1,p}(\Omega) \\ \text{ii) } \sigma_i^\epsilon = a_{ij}^\epsilon(x, u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \text{ reste dans un borné de } L^p(\Omega). \end{array} \right.$$

Ainsi on peut extraire des sous-suites, encore notées u^ϵ et σ_i^ϵ ($i = 1, 2, \dots, n$) telles que :

$$(36) \quad \begin{array}{l} u^\epsilon \rightarrow u \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ faible et dans } L^p(\Omega) \text{ fort} \\ \sigma_i^\epsilon \rightarrow \sigma_i \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ faible } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{array}$$

* On rappelle que si E est un espace de Banach de norme notée $\|\cdot\|_E$ on note $L^q(Y ; E)$ $1 \leq q \leq +\infty$ l'espace des (classes de) fonctions f mesurables dans Y pour la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n à valeurs dans E , telles que $\int_Y \|f(t)\|_E^q \, dt < +\infty$ si $1 \leq q < +\infty$ et $\text{supess}_{t \in Y} \|f(t)\|_E < +\infty$ si $q = +\infty$. Muni de sa structure d'espace naturelle $L^q(Y; E)$ est un espace de Banach.

et σ_i satisfait à

$$(37) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + f = 0 \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega).$$

IV.2. - Deuxième étape

On introduit maintenant une fonction $w : (y, \lambda) \rightarrow w(y, \lambda)$ par

$$(38) \quad w(y, \lambda) = P(y) - \chi(y, \lambda)$$

où P est un polynôme homogène de degré 1 et où la fonction

$$\chi : (y, \lambda) \rightarrow \chi(y, \lambda)$$

est l'unique solution de

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{def} \\ \chi_\lambda = \chi(\cdot, \lambda) \in W(Y), \int_Y \chi(y, \lambda) dy = 0 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \\ a_Y(\lambda; \chi_\lambda - P, \varphi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in W(Y). \end{array} \right.$$

On introduit aussi

$$(40) \quad C_j(y, \lambda) = a_{ij}(y, \lambda) \frac{\partial w}{\partial y_i}(y, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Les C_j sont Y -périodique en $y \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et satisfont à

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} C_j = 0.$$

Nous allons maintenant faire une hypothèse supplémentaire de régularité sur les coefficients a_{ij} . Pour cela, soit :

$$W^{1, \infty}(\mathbb{R}) = \left\{ \text{classe des } v ; v \in L^\infty(\mathbb{R}), \frac{\partial v}{\partial \lambda} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

Tout élément de $W^{1, \infty}(\mathbb{R})$ est représenté par une fonction continue bornée sur \mathbb{R} et lipschitzienne sur \mathbb{R} . Muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1, \infty}(\mathbb{R})} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$W^{1, \infty}(\mathbb{R})$ est un espace de Banach contenu avec injection continue dans l'espace $C^0B(\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} .

Si en plus de (1) on fait l'hypothèse

$$(42) \quad a_{ij} \in C^\infty B(\mathbb{R}^n ; W^{1,\infty}(\mathbb{R})) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

où $C^\infty B(\mathbb{R}^n ; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n à valeurs dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont bornées, alors on a le :

LEMME 4. Si les a_{ij} vérifient (1) et (42), les fonctions χ et C_j sont des fonctions β particulières vérifiant (26).

Supposons avoir montré le lemme 4 et introduisons

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} w^\epsilon(x, \lambda) = \epsilon w\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right) = P(x) - \epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right) \\ C_j^\epsilon(x, \lambda) = a_{ij}^\epsilon(x, \lambda) \frac{\partial w^\epsilon}{\partial x_i}(x, \lambda) \end{array} \right.$$

D'après (41) C_j^ϵ vérifie

$$(44) \quad \frac{d}{dx_j} C_j^\epsilon(x, v) = \frac{\partial}{\partial \lambda} C_j^\epsilon(x, \lambda) \Big|_{\lambda=v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

où quelle que soit la fonction $K(x, \lambda)$, on introduit la notation

$$(45) \quad \frac{d}{dx_j} K(x, v) = \frac{\partial}{\partial x_j} K(x, \lambda) \Big|_{\lambda=v} + \frac{\partial K}{\partial \lambda}(x, \lambda) \Big|_{\lambda=v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Il résulte alors du lemme 3 que

$$(46) \quad C_j^\epsilon(\cdot, u^\epsilon) \rightarrow \overline{C_j}(u), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ faible}$$

et du lemme 2 que

$$(47) \quad \frac{d}{dx_j} C_j^\epsilon(\cdot, u^\epsilon) \text{ reste dans un borné de } L^p(\Omega) \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

et donc que

$$(48) \quad \frac{d}{dx_j} C_j^\epsilon(\cdot, u^\epsilon) \rightarrow \frac{d}{dx_j} C_j(u) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ faible.}$$

Il résulte alors de [(46) - (48)] et de la compacité de l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ que

$$(49) \quad C_j^\epsilon(\cdot, u^\epsilon) \rightarrow C_j(u) \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ fort, } j = 1, 2, \dots, n.$$

D'après le lemme 4, $(y, \lambda) \rightarrow \chi(y, \lambda)$ est majorée par une constante indépendante de $y \in \mathbb{R}^n$ et de $\lambda \in \mathbb{R}$; il en est donc de même de $\chi\left(\frac{x}{\epsilon}, u^\epsilon\right)$ ce qui entraîne que

$$(50) \quad w^\epsilon(u^\epsilon) \rightarrow P \text{ dans } L^P(\Omega) \text{ fort.}$$

De même, χ étant une fonction β particulière,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right) \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \text{ reste dans un borné de } L^P(\Omega)$$

Il en résulte que

$$(51) \quad \frac{\partial w^\epsilon}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} = -\epsilon \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda\right) \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0 \text{ dans } L^P(\Omega) \text{ fort lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

IV.3. - Troisième étape

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; nous pouvons prendre $v = \varphi w^\epsilon$ dans (8), ce qui donne :

$$(52) \quad \int_{\Omega} a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}, u^\epsilon\right) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^\epsilon dx + \int_{\Omega} a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}, u^\epsilon\right) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \frac{d}{dx_i}(w^\epsilon) \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi w^\epsilon dx$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \sigma_i^\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^\epsilon dx + \int_{\Omega} C_j^\epsilon(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma_i^\epsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} w^\epsilon(x, \lambda) \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi w^\epsilon dx.$$

Si on fait tendre ϵ vers zéro, il résulte de (36), (49), (50), (51)

$$(53) \quad \int_{\Omega} \sigma_i P \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \bar{C}_j(u) \varphi \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f \varphi P dx.$$

Comme d'après (37) on a

$$(54) \quad \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i} (P \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi P dx$$

de (53) - (54) on déduit :

$$(55) \quad \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \varphi dx = \int_{\Omega} \bar{C}_j(u) \varphi \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors le choix $P(y) = y_k$ donne les formules (11) et le théorème 2 est démontré sous réserve de vérifier le lemme 4. ■

IV.4. - Démonstration du lemme 4

i) Notons tout d'abord ceci :

Soient α_{ij} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } y \rightarrow \alpha_{ij}(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \\ \text{ii) } \alpha_{ij} \in C^\infty B(\mathbb{R}^n) \\ \text{iii) } \alpha_{ij}(y) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2, \alpha_0 > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Alors si P est un polynôme homogène de degré 1, il existe (en raison de la Y-périodicité et d'après les propriétés de régularité locale * des problèmes elliptiques), une fonction Y-périodique unique $\theta : y \rightarrow \theta(y)$ telle que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\alpha_{ij}(y) \frac{\partial \theta}{\partial y_j} \right] = -\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\alpha_{ij}(y) \frac{\partial P}{\partial y_j} \right] \\ \int_Y \theta(y) dy = 0 \end{array} \right.$$

Alors d'après la régularité locale * on a :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\theta\|_{H^r(Y)} \leq \gamma_1 \|\theta\|_{H^{r-1}(Y)} + \gamma_2 \quad r > 1 \\ \|\theta\|_{L^2(Y)} \leq \gamma_3 \end{array} \right.$$

où γ_k ($k = 1, 2, 3$) ne dépend que de $n, |Y|, \max_i \left| \frac{\partial P}{\partial y_i} \right|, \max_{i,j} \|\alpha_{ij}\|_{C^m(\bar{Y})}, 0 \leq m \leq r-1$.

Comme d'après le théorème de Sobolev, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$H^r(Y) \hookrightarrow C^m(\bar{Y}) \quad (r > \frac{n}{2} + m)$$

il résulte de (58) que

$$(58) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \|\theta\|_{C^m(\bar{Y})} \leq \gamma_m$$

où γ_m est une constante qui dépend de $n, m, |Y|, \max_i \left| \frac{\partial P}{\partial y_i} \right|, \max_{i,j} \|\alpha_{ij}\|_{C^k(\bar{Y})}$
 $0 \leq k \leq r-1, r > \frac{n}{2} + m$.

ii) Ceci posé si $a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, on peut appliquer les résultats du i) avec $\alpha_{ij}(y) = a_{ij}(y, \lambda), \theta(y) = \chi(y, \lambda)$ en notant que d'une part

$$\max_{i,j} |a_{ij}(y, \lambda)| \leq \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{C^k(\bar{Y}; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}$$

* voir par exemple [7]

et que d'autre part $\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij}(y, \lambda) \frac{\partial \chi}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial y_j} \dot{a}_{ij}(y, \lambda) \frac{\partial}{\partial y_i} (P - \chi) \\ \dot{a}_{ij}(y, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{ij}(y, \lambda) \end{array} \right.$$

équation ayant les mêmes propriétés que celle vérifiée par χ .

Il résulte alors de (58) appliquée avec $m = 0$ que l'on a (les C désignant des constantes diverses ne dépendant que de $|Y|$, n , $\text{Max} \frac{\partial P}{\partial x_i}$, $\sup_{i,j} \|a_{ij}\|_{C^k(Y; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))}$, k convenable mais ne dépendant pas de λ)

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\chi(y, \lambda)| \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \left| \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(y, \lambda) \right| \leq C \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

ce qui établit que χ vérifie (26).

Le fait que les C_j définis par (40) vérifient (26) est alors immédiat, d'où le lemme 4.

Remarques 3.

i) Le lemme 4 n'est pas économique relativement aux hypothèses sur les a_{ij} . Nous n'avons pas jugé utile de minimiser les hypothèses pour obtenir (59).

ii) Notons cependant que sous l'hypothèse

$$a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \quad a_{ij}(y, \lambda) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

on peut, en adaptant légèrement un raisonnement de [5], obtenir

$$\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Avec a_{ij} vérifiant (1) on n'obtient seulement que :

$$\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \in L^2(Y; L^\infty(\mathbb{R}))$$

l'estimation $\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \in L^\infty(Y; L^\infty(\mathbb{R}))$ ne s'obtient que si on est assuré d'avoir :

$$\frac{\partial \chi}{\partial y_i} \in L^q(Y; L^\infty(\mathbb{R})) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad q > n.$$

V. - DEMONSTRATION DU THEOREME 2 DANS LE CAS GENERAL

En notant que les a_{ij} vérifiant (1) sont dans l'espace $L^\infty(Y ; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$, on peut les approcher dans l'espace $L^q(Y ; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$ (q à choisir) par des fonctions a_{ij}^θ dans $C^\infty B(\mathbb{R}^n ; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$ espace des fonctions de classe C^∞ dans \mathbb{R}^n à valeurs dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et à dérivées bornées sur \mathbb{R}^n .

V.1. - Résultats d'approximation

Introduisons une fonction $j : y \rightarrow j(y)$ possédant les propriétés suivantes :

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), j(y) \geq 0, j(y) = 0 \text{ pour } |y| \geq 1 \\ \int_{\mathbb{R}^n} j(y) dy = 1 \end{array} \right.$$

et, pour tout $\theta > 0$

$$(61) \quad j^\theta(y) = \frac{1}{\theta^n} j\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

on régularise alors les coefficients a_{ij} (vérifiant (1)) par convolution en y :

$$(62) \quad a_{ij}^\theta(y, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} j^\theta(y-\xi) a_{ij}(\xi, \lambda) d\xi$$

on a alors immédiatement

$$(63) \quad |a_{ij}^\theta(y, \lambda) - a_{ij}^\theta(y, \mu)| \leq k |\lambda - \mu|$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^\theta(\cdot, \lambda) \text{ est } Y\text{-périodique} \\ |a_{ij}^\theta(y, \lambda)| \leq \beta \end{array} \right.$$

$$(65) \quad a_{ij}^\theta(y, \lambda) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire que les coefficients a_{ij}^θ satisfont (1) ; donc, pour tout $\theta > 0$:

$$(66) \quad a_{ij}^\theta \in L^\infty(Y ; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

Par ailleurs, si D^p désigne une dérivation d'ordre p en $y = (y_1, \dots, y_n)$ on a

$$D^p a_{ij}^\theta(y, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} D^p j^\theta(y-\xi) a_{ij}(\xi, \lambda) d\xi$$

d'où :

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} |D^p a_{ij}^\theta(y, \lambda)| \leq \beta \int_{\mathbb{R}^n} |D^p j^\theta(y)| dy = \beta_1(\theta, p) \\ \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

et

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} D^p a_{ij}^\theta(y, \lambda) \right| \leq \beta_1 k = k_1(\theta, p) \\ \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n \text{ et pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Ainsi

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \theta > 0, a_{ij}^\theta \in C^\infty B(\mathbb{R}^n; W^{1, \infty}(\mathbb{R})) \\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$$

En outre on vérifie que

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall q \geq 1 \\ \int_Y [\sup_\lambda |a_{ij}^\theta(y, \lambda) - a_{ij}(y, \lambda)|]^q dy \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

donc

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^\theta \rightarrow a_{ij} \text{ dans } L^q(Y; C^0 B(\mathbb{R})) \\ \text{lorsque } \theta \rightarrow 0, \text{ pour } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

Maintenant à u^ϵ vérifiant (8) et (36), associons $u^{\theta, \epsilon}$ l'unique solution de

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } a^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon; u^{\theta, \epsilon}, v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \text{ii) } u^{\theta, \epsilon} \in W_0^{1, p}(\Omega), \quad \|\nabla u^{\theta, \epsilon}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{-1, p}(\Omega)} \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(73) \quad a^{\theta, \epsilon}(\varphi; \psi, v) = \int_{\Omega} a_{ij}^\theta\left(\frac{x}{\epsilon}, \varphi\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Ainsi :

LEMME 5. q étant choisi dans (71) par

$$(74) \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

alors pour $\theta \rightarrow 0$:

- i) $u^{\theta, \epsilon} \rightarrow u^\epsilon$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort, uniformément par rapport à ϵ
- ii) $\sigma_i^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) = a_{ij}^{\theta, \epsilon}(x, u^\epsilon) \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} \rightarrow \sigma_i^\epsilon(u^\epsilon) = a_{ij}^\epsilon(x, u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j}$
dans $L^2(\Omega)$ fort, uniformément par rapport à ϵ .

Démonstration du lemme 5

Point i)

De (63) et (8) on obtient en posant

$$(75) \quad U^{\theta, \epsilon} = u^{\theta, \epsilon} - u^\epsilon$$

$a^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon ; U^{\theta, \epsilon}, v) = a^\epsilon(u^\epsilon ; u^\epsilon, v) - a^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon ; u^\epsilon, v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ choisissant $v = U^{\theta, \epsilon}$, on obtient :

$$\alpha_0 \| \nabla U^{\theta, \epsilon} \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \int_{\Omega} [a_{ij}^\epsilon(x, u^\epsilon) - a_{ij}^{\theta, \epsilon}(x, u^\epsilon)] \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} U^{\theta, \epsilon} dx \right|$$

ce qui grâce à (74) est

$$\leq \| a_{ij}^\epsilon(u^\epsilon) - a_{ij}^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) \|_{L^q(\Omega)} \cdot \left\| \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)} \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} U^{\theta, \epsilon} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où compte-tenu de (72)

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| \nabla U^{\theta, \epsilon} \|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i,j} \| a_{ij}^\epsilon(u^\epsilon) - a_{ij}^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) \|_{L^2(\Omega)} \\ \text{où } C = \text{cte} > 0. \end{array} \right.$$

Mais

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} | a_{ij}^\epsilon(x, u^\epsilon) - a_{ij}^{\theta, \epsilon}(x, u^\epsilon) |^q dx \leq C_1 \int_Y \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [| a_{ij}^\epsilon(y, \lambda) - a_{ij}^{\theta, \epsilon}(y, \lambda) |]^q dy = C_1 \cdot \overset{\text{def}}{\Phi_{ij}^\theta} \\ C_1 = \text{cte} > 0 \end{array} \right.$$

De (76), (77) on déduit (C_2 étant une constante > 0 indépendante de (θ, ϵ))

$$(78) \quad \| U^{\theta, \epsilon} \|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 |\text{Max } \Phi_{ij}^{\theta}|^{1/q} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0$$

d'après (70) ; d'où le point i).

Point ii)

$$\sigma_i^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) - \sigma_i^\epsilon(u^\epsilon) = (a_{ij}^{\theta, \epsilon} - a_{ij}^\epsilon) \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} + a_{ij}^\epsilon \left[\frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} - \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \right]$$

donc

$$(79) \quad \|\sigma_i^{\theta, \epsilon} - \sigma_i^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left[\left\| (a_{ij}^{\theta, \epsilon} - a_{ij}^\epsilon) \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \| \nabla U^{\theta, \epsilon} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Mais

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\| (a_{ij}^{\theta, \epsilon} - a_{ij}^\epsilon) \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left[\int_{\Omega} |a_{ij}^{\theta, \epsilon} - a_{ij}^\epsilon|^q dx \right]^{2/q} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} \right|^p dx \right]^{2/p} \\ \leq C \cdot [\text{Max } \Phi_{i,j}^{\theta}]^{2/q} \\ C \text{ cte } > 0 \text{ indépendante de } (\epsilon, \theta). \end{array} \right.$$

[car $u^{\theta, \epsilon}$ reste dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'après (72)].

On obtient donc, compte-tenu de (78), (79), (80) :

$$(81) \quad \|\sigma_i^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) - \sigma_i^\epsilon(u^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\text{Max } \Phi_{ij}^{\theta}|^{2/q} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0$$

C étant une constante > 0 indépendante de (θ, ϵ) ; d'où le point ii) du lemme (5). ■

Du lemme 5 nous allons déduire le :

LEMME 6. *Sous les hypothèses du lemme 5, lorsque $(\theta, \epsilon) \rightarrow (0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:*

- i) $u^{\theta, \epsilon} \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et dans $L^2(\Omega)$ fort
- ii) $\sigma_i^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) \rightarrow \sigma_i(u)$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

Démonstration du lemme 6

- i) ((,)) désignant le produit scalaire dans $H_0^1(\Omega)$ on peut écrire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |((u^{\theta, \epsilon} - u, v))| \leq \|u^{\theta, \epsilon} - u^\epsilon\| \cdot \|v\| + |((u^\epsilon - u, v))|.$$

Soit $\eta > 0$; d'après le lemme 5, on peut choisir $\theta_0(v)$ indépendant de ϵ avec $0 < \theta < \theta_0 \Rightarrow \|u^{\theta, \epsilon} - u^\epsilon\| \leq \frac{\eta}{2 \|v\|}$.

D'après (36) $u^\epsilon \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, donc on peut trouver $\epsilon_0(v)$ tel que $0 < \epsilon < \epsilon_0(v) \Rightarrow |((u^\epsilon - u, v))| \leq \eta/2$.

Ainsi, pour tout $\eta > 0$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on peut trouver (ϵ_0, θ_0) tel que

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \theta < \theta_0 \\ 0 < \epsilon < \epsilon_0 \end{array} \right\} \Rightarrow |((u^{\theta, \epsilon} - u, v))| < \eta$$

d'où le point i) du lemme 6.

Démonstration analogue pour le point ii). ■

Maintenant, comme u^{θ, ϵ^*} est uniformément bornée en (θ, ϵ) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ $p > 2$ (donc dans $H_0^1(\Omega)$), on peut pour θ fixé, extraire une sous-suite $\epsilon'(\theta) \rightarrow 0$ telle que l'on ait :

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} i) \quad u^{\theta, \epsilon'} \rightarrow u^\theta \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ ii) \quad \sigma_i^{\theta, \epsilon'} \rightarrow \sigma_i^\theta \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible (} i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

on en déduit alors le

LEMME 7. *Sous les hypothèses des lemmes 5 et 6 et (83), lorsque $\theta \rightarrow 0$*

- i) $u^\theta \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et $L^2(\Omega)$ fort
- ii) $\sigma_i^\theta \rightarrow \sigma_i(u)$ $i = 1, 2, \dots, n$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

Démonstration du lemme 7. Le lemme 7 exprime une propriété d'intervention de limites. Pour fixer les idées, soit

$$\epsilon = \{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ la suite } \epsilon \text{ telle que l'on ait (36)}$$

* où ϵ est choisi tel que (36) ait lieu

et

$$\epsilon' = \{\epsilon_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}} \quad n' > n \text{ la sous-suite extraite vérifiant (83).}$$

Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on peut écrire :

$$((u^\theta - u, v)) = ((u^\theta - u^{\theta, \epsilon'}, v)) + ((u^{\theta, \epsilon'} - u^{\theta, \epsilon, v}), v)) + ((u^{\theta, \epsilon} - u^\epsilon, v)) + ((u^\epsilon - u, v)).$$

Pour $\eta > 0$ donné, on peut

1^o) d'après le lemme 5, choisir $\theta_0(v)$ indépendant de ϵ, ϵ' tel que

$$0 < \theta < \theta_0(v) \quad \text{implique} \quad |((u^{\theta, \epsilon} - u^\epsilon, v))| < \frac{\eta}{4}.$$

2^o) D'après la convergence faible de u^ϵ vers u dans $H_0^1(\Omega)$, trouver $n_0(v) \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0(v)$ implique $|((u^\epsilon - u, v))| < \frac{\eta}{4}$.

3^o) D'après le lemme 5 et la convergence faible de u^ϵ vers u dans $H_0^1(\Omega)$, on peut supposer (quitte à changer de θ_0 et n_0) que pour $0 < \theta < \theta_0(v)$, $n' > n > n_0(v)$ on a :

$$|((u^{\theta, \epsilon'} - u^{\theta, \epsilon, v}))| < \frac{\eta}{4}.$$

Car

$$((u^{\theta, \epsilon'} - u^{\theta, \epsilon, v})) = ((u^{\theta, \epsilon'} - u^{\epsilon'}, v)) + ((u^{\epsilon'} - u^\epsilon, v)) + ((u^\epsilon - u^{\theta, \epsilon, v})).$$

4^o) Enfin, d'après (83), θ étant fixé $< \theta_0(v)$, on peut trouver $n_1(\theta, v)$ tel que

$$n' > n > n_1(\theta, v) \quad \text{on ait} \quad |((u^\theta - u^{\theta, \epsilon'}, u))| < \frac{\eta}{4}.$$

Ainsi, pour $0 < \theta < \theta_0$ et $n > \text{Max}(n_0, n_1)$ on aura simultanément les conclusions des points 1^o à 4^o ci-dessus. Donc :

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \eta > 0 \quad \exists \theta_0 \text{ tel que } 0 < \theta < \theta_0 \\ \text{implique } |((u^\theta - u, v))| < \eta \end{array} \right.$$

ce qui établit le point i).

Démonstration analogue pour le point ii) ; d'où le lemme 7. ■

Désignons maintenant par

$$(85) \quad W^\theta(y, \lambda) = P(y) - \chi^\theta(y, \lambda)$$

l'unique solution de

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[a_{ij}^\theta(y, \lambda) \frac{\partial W^\theta}{\partial y_i} \right] = 0 \\ \chi^\theta(\cdot, \lambda) \in W(Y), \quad \int_Y \chi^\theta(y, \lambda) dy = 0 \end{array} \right.$$

et posons

$$(87) \quad C_j^\theta(y, \lambda) = a_{ij}^\theta(y, \lambda) \frac{\partial W^\theta}{\partial y_i}(y, \lambda).$$

Alors on a le :

LEMME 8. Lorsque $\theta \rightarrow 0$

- i) $\chi^\theta(\cdot, \lambda) \rightarrow \chi(\cdot, \lambda)$ dans $H^1(Y)$ fort uniformément par rapport à λ .
- ii) $\overline{C_j^\theta}(u) \rightarrow \overline{C_j}(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Démonstration du lemme 8

i) De

$$a_Y^\theta(\lambda; \chi^\theta, \varphi) = a_Y^\theta(\lambda; P, \varphi)$$

$$a_Y(\lambda; \chi, \varphi) = a_Y(\lambda; P, \varphi)$$

vérifiées pour tout $\varphi \in W(Y)$, on a par différence

$$a_Y^\theta(\lambda; \chi^\theta - \chi, \varphi) = a_Y^\theta(\lambda; W, \varphi) - a_Y^\theta(\lambda; W, \varphi)$$

et par choix de $\varphi = \chi^\theta - \chi$, on obtient

$$\alpha_0 \|\nabla(\chi^\theta - \chi)\|_{L^2(Y)}^2 \leq \int_Y \left| (a_{ij}^\theta(y, \lambda) - a_{ij}(y, \lambda)) \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{\partial(\chi^\theta - \chi)}{\partial y_j} \right| dy$$

d'où on déduit pour $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

$$\alpha_o \|\nabla(\chi^\theta - \chi)\|_{L^2(\Upsilon)} \leq \sum_j \left[\int_{\Upsilon} (\sup_{\lambda} |a_{ij} - a_{ij}^\theta|)^q dy \right]^{1/q} \cdot \left\| \frac{\partial W}{\partial y_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prenant pour p , celui de l'estimation de Meyer (cf. [2], [8]) relative à (39), pour lequel on a :

$$(88) \quad \sup_{\lambda} \left\| \frac{\partial W}{\partial y_i} \right\|_{L^p(\Upsilon)} \leq C \left\| \frac{\partial P}{\partial y_i} \right\|_{L^p(\Upsilon)} \quad (\text{C cte indépendante de } \lambda)$$

on a

$$\sup \|\nabla(\chi^\theta - \chi)\|_{L^p(\Upsilon)} \leq C \cdot \Phi^\theta$$

(89) C cte > 0 indépendante de λ ,

$$\Phi^\theta = \left[\text{Max} \int_{\Upsilon} (\sup_{\lambda} (a_{ij}^\theta - a_{ij}))^q dy \right]^{1/q} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0 \text{ d'après (70)}$$

d'où le point i) du lemme 8.

ii) De

$$\overline{C}_j^\theta(u(\cdot)) = \frac{1}{|\Upsilon|} \int_{\Upsilon} a_{ij}^\theta(y, u(\cdot)) \frac{\partial W^\theta}{\partial y_i}(y, u(\cdot)) dy$$

et

$$\overline{C}_j(u(\cdot)) = \frac{1}{|\Upsilon|} \int_{\Upsilon} a_{ij}(y, u(\cdot)) \frac{\partial W}{\partial y_i}(y, u(\cdot)) dy$$

on déduit

$$(90) \quad \|\overline{C}_j^\theta(u) - \overline{C}_j(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{|\Upsilon|} \left[\int_{\Omega} \int_{\Upsilon} |a_{ij}^\theta(y, u(x)) - a_{ij}(y, u(x))|^2 \left| \frac{\partial W}{\partial y_i}(y, u(x)) \right|^2 dy dx + \int_{\Omega} \int_{\Upsilon} \left[a_{ij}^\theta(y, u(x)) \right]^2 \left| \frac{\partial \chi^\theta}{\partial y_i}(y, u(x)) - \frac{\partial \chi}{\partial y_i}(y, u(x)) \right|^2 dy dx \right]$$

en procédant comme dans le i) et en utilisant (89) on a si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{|\Upsilon|} \int_{\Upsilon} |a_{ij}^\theta - a_{ij}|^2 \left| \frac{\partial W}{\partial y_i} \right|^2 dy \leq \|a_{ij}^\theta(u) - a_{ij}(u)\|_{L^q(\Upsilon)}^2 \cdot \left\| \frac{\partial W(u)}{\partial y_i} \right\|_{L^p(\Upsilon)}^2 \leq$$

$$\leq C \cdot (\Phi^\theta)^2 \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0$$

(C cte indépendante de λ, θ).

De sorte qu'en utilisant (89), on déduit de (90) que

$$\| \overline{C_j^\theta(u)} - \overline{C_j(u)} \|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \cdot \Phi^\theta \rightarrow 0 \text{ lorsque } \theta \rightarrow 0.$$

(C_1 constante > 0 indépendante de θ) ; d'où le lemme 8. ■

V.2. - Démonstration du théorème 2

On part de (72), où l'on peut prendre

$$(91) \quad v = \varphi W^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \quad , \quad f \in L^2(\Omega)$$

où

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} = \epsilon w^\theta \left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda \right) \Big|_{\lambda = u^\epsilon} \quad , \quad w^\theta(y, \lambda) \text{ donné par (85).} \end{array} \right.$$

on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma_i^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} dx + \int_{\Omega} \sigma_i^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \varphi \frac{d}{dx_i} w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} dx = \int_{\Omega} f \varphi w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} dx$$

or

$$\frac{d}{dx_i} [w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)}] = \frac{\partial}{\partial x_i} w^\theta \left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda \right) \Big|_{\lambda = u^\epsilon} + \frac{\partial}{\partial \lambda} w^\theta \left(\frac{x}{\epsilon}, \lambda \right) \Big|_{\lambda = u^\epsilon} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i}$$

d'où

$$(93) \quad \int_{\Omega} \sigma_i^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} dx + \int_{\Omega} C_j^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \cdot \frac{\partial u^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} \varphi dx + \\ + \int_{\Omega} \sigma_i^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} \varphi \frac{\partial w^{\theta, \epsilon}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = u^\epsilon} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi w^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} dx$$

$$\text{(où } C_j^{\theta, \epsilon(u^\epsilon)} = a_{ij}^{\theta} \left(\frac{x}{\epsilon}, u^\epsilon \right) \frac{\partial w^{\theta, \epsilon}}{\partial x_j} (x, u^\epsilon) \text{).}$$

D'après les résultats du § IV, on a pour θ fixé > 0 :

$$(94) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } w^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) \rightarrow \mathbf{P} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \text{ii) } \frac{\partial w^{\theta, \epsilon}}{\partial \lambda}(x, \lambda) \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \text{iii) } C_j^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) \rightarrow \overline{C_j^\theta}(u) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \text{iv) } \frac{d}{dx_j} C_j^{\theta, \epsilon}(u^\epsilon) = \frac{\partial}{\partial \lambda} C_j^{\theta, \epsilon}(x, \lambda) \Big|_{\lambda=u^\epsilon} \cdot \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \rightarrow \frac{d}{dx_j} \overline{C_j^\theta}(u) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

On peut alors passer à la limite pour $\theta > 0$ fixé dans (93) lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ en utilisant (83) et (94) ; on obtient :

$$(95) \quad \int_{\Omega} \sigma_i^\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P \, dx + \int_{\Omega} \overline{C_j^\theta}(u) \varphi \frac{\partial u^\theta}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi P \, dx.$$

Mais lorsque $\theta \rightarrow 0$

$$(96) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \sigma_i^\theta \rightarrow \sigma_i(u) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible (lemme 7)} \\ \text{ii) } u^\theta \rightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible (lemme 7)} \\ \text{iii) } \overline{C_j^\theta}(u) \rightarrow \overline{C_j}(u) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort (lemme 8)} \end{array} \right.$$

on peut donc passer à la limite lorsque $\theta \rightarrow 0$ dans (95) pour obtenir

$$(97) \quad \int_{\Omega} \sigma_i(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P \, dx + \int_{\Omega} \overline{C_j}(u) \varphi \frac{\partial P}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi P \, dx.$$

Comme

$$\int_{\Omega} f \varphi P \, dx = \int_{\Omega} \sigma_i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} P + \varphi \frac{\partial P}{\partial x_i} \right] \, dx$$

on aboutit à

$$(98) \quad \int_{\Omega} \overline{C_j}(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx = \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \varphi \, dx$$

d'où la conclusion de théorème 2. ■

Remarque 4. Il résulte de (71) et de la remarque 2, que l'on peut, en approchant les coefficients a_{ij} par des coefficients a_{ij}^θ réguliers qui convergent dans $L^q(Y; C^0(\mathbb{R}))$ où $C^0(\mathbb{R})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, démontrer le théorème 2 pour des coefficients a_{ij} Y -périodique dans \mathbb{R}^n et vérifiant

$$(99) \quad a_{ij} \in L^\infty(Y; C^0 B(\mathbb{R})) \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Note ajoutée à la correction des épreuves

Remarque 5. M. ARTOLA a démontré récemment (note à paraître) que sous les hypothèses du théorème 1 ci-dessus il y a unicité de la solution des problèmes P_1 et P_2 .

REFERENCES

- [1] ARTOLA M., DUVAUT G. «*Homogénéisation d'une classe de problèmes non-linéaires*» C.R.A.S. Paris, t. 288 (1979), série A, p. 775-778. voir aussi :
- Proceeding Colloque Evanston, sept. 1978.
- Colloque des A.T.P., Ile de Bendor, mars 1979.
- [2] BENSSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. «*Asymptotic Analysis for Periodic structures*». North-Holland, 1978.
- [3] DUVAUT G. «*Homogénéisation d'une plaque à structure périodique en théorie non-linéaire de van Karman*». Compte rendu des Journées d'Analyse non linéaire, Besançon juin 1977.
- [4] KRASNOSELSKI. «*Topological Methods in the theory of non linear integral equation*». Pergamon Press, 1964.
- [5] LADYZENSKAYA O.A., URAL'CEVA N.N. «*Equations aux dérivées partielles de type elliptique*». Dunod, Paris, 1868.
- [6] LIONS J.L. «*Equations différentielles opérationnelles*». Springer Verlag, 1963.
- [7] LIONS J.L., MAGENES. «*Problèmes aux limites homogènes et applications*». Vol. 1, Dunod, 1968.
- [8] MEYERS N.G. «*An L^p -estimate for the gradient of the solutions of second order elliptic divergence equations*». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17 (1963), p. 183-206.
- [9] SCORZA-DRAGONI. «*Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabile rispetto ad un'altra variabile*». Rend. Sem. Math. Padova 17 (1948), p. 102-106.
- [10] RAYNAL M.L. «*Homogénéisation d'un problème diffusion linéaire du type de Volterra*». C.R.A.S. Paris, t. 292 (1981), série A, p. 421-424.
- [11] STAMPACCHIA G. «*Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*». Presses Univ. Montréal (1966), t. 16.
- [12] SUQUET. «*Sur l'homogénéisation de la loi de comportement d'une classe de matériaux dissipatifs non linéaires*». C.R.A.S. Paris, t. 291 (1980), série A, p. 231-234.
- [13] TARTAR L. «*Cours Peccot*». Collège de France, sept. 1977.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1981)