

DOMINIQUE APPRATO

**Étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline à une variable satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 6, n° 2 (1984), p. 153-170

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1984\\_5\\_6\\_2\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_2_153_0)

© Université Paul Sabatier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ETUDE DE LA CONVERGENCE DU PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE A UNE VARIABLE SATISFAISANT A DES CONDITIONS D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Dominique Apprato <sup>(1)</sup>

*(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes et Naturelles, Avenue Louis Sallenave, 64000 Pau - France.*

**Résumé :** On montre que dans un certain espace fonctionnel le produit tensoriel de fonctions spline à une variable satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange est en fait une fonction spline. On étudie alors la convergence du produit tensoriel de fonctions spline dans cet espace.

**Summary :** We show that tensor-product of spline functions in one variable satisfying Lagrange interpolation conditions is in fact a genuine spline function in some functional space. Then we study the convergence of tensor product of spline functions in this space.

### 1. - INTRODUCTION - NOTATIONS - RAPPELS

#### 1.0. - Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline à une dimension satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange aux noeuds d'un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

Par souci de simplicité on s'est limité au cas du produit tensoriel de deux fonctions spline à une variable minimisant, sous des conditions d'interpolation de Lagrange, la semi-norme

correspondant aux dérivées de longueur 2. Mais il n'y a aucune difficulté théorique à généraliser les résultats obtenus au cas du produit tensoriel de  $m$  fonctions spline appartenant chacune à des espaces de Sobolev d'ordre  $k > 2$  et satisfaisant à des conditions d'interpolation analogues.

Dans les paragraphes 1 et 2 on rappelle les propriétés du produit tensoriel de fonctions spline à une variable ; des propriétés, classiques, on déjà été étudiées par AHLBERT - NILSON - WALSH [1], M. ATTEIA [4], C. de BOOR [5], C.F. DUCATEAU [9], T.N.E. GREVILLE [10], M.H. SCHULTZ [15], L. SCHUMAKER [16], etc...

On introduit ici une norme tensorielle «naturelle» associée aux conditions d'interpolation, qui permet d'établir une propriété minimale (analogue à une propriété obtenue par C.F. DUCATEAU [9]) du produit tensoriel de fonctions spline et d'étudier sa convergence.

Dans le paragraphe 3 on introduit un espace de Sobolev intermédiaire  $V$  muni d'une norme associée à la norme tensorielle introduite dans le paragraphe 2. On établit pour cet espace des résultats de densité, de traces et de complétude. On montre que dans  $V$  le produit tensoriel de fonctions spline est encore une fonction spline.

Dans le paragraphe 4 on fait l'étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline dans l'espace  $V$ . Ces résultats complètent et généralisent de façon naturelle des résultats intermédiaires obtenus par exemple par AHLBERG - NILSON - WALSH [1], M.H. SCHULTZ [15], L. SCHUMAKER [16] etc... Ils sont aussi à rapprocher de ceux obtenus par W. DAHMEN - R. de VORE et K. SCHERER [8], concernant l'erreur de meilleure approximation par des polynômes dans des espaces produits.

### 1.1. - Rappels

Pour tout ouvert borné  $\omega$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = 1$  ou  $2$ , on désigne par  $H^2(\omega)$  l'espace de Sobolev des (classes) de fonctions  $v$  qui appartiennent à  $L^2(\omega)$  ainsi que toutes leurs dérivées partielles  $\partial^\alpha v$  d'ordre  $|\alpha| \leq 2$ , muni de la norme

$$\|v\|_{2,\omega} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \int_{\omega} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On utilisera également les semi-normes

$$|v|_{\ell,\omega} = \left( \sum_{|\alpha|=\ell} \int_{\omega} |\partial^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \ell = 0, 1, 2.$$

Enfin, on désigne par  $Q_1(\omega)$  l'espace vectoriel des restrictions à  $\omega$  de (fonctions) polynômes à  $m$  variables de degré  $\leq 1$  par rapport à chaque variable.

1.2. - Notations

- Soient a et b deux réels strictement positifs. Dans tout ce qui suit on désigne par  $\Omega$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^2$  défini par ;  $\Omega = ]-a,a[ \times ]-b,b[$ .

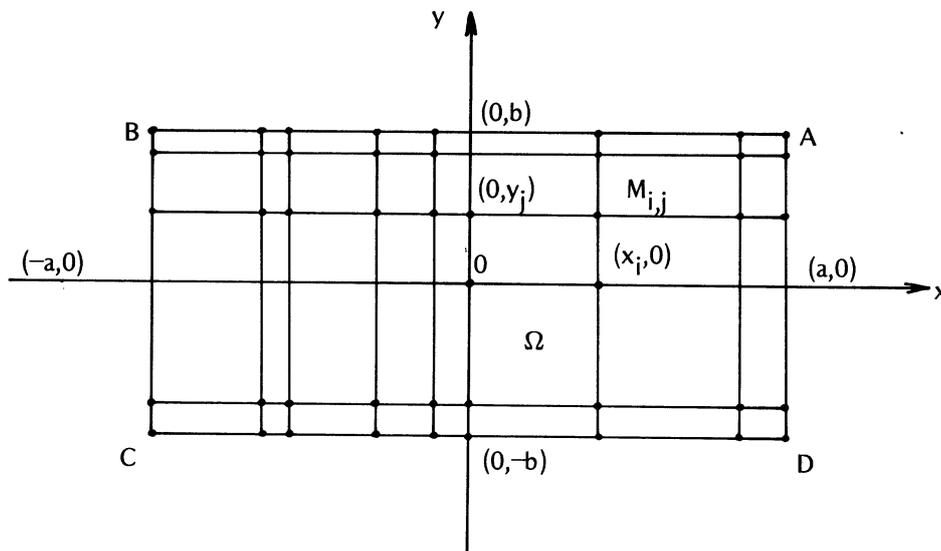
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , un entier donné, et  $\{x_i\}_{i=0}^{k(n)}$ ,  $\{y_j\}_{j=0}^{\ell(n)}$  des réels tels que :

$$\begin{cases} x_0 = -a < x_1 < \dots < x_i < \dots < a = x_{k(n)} \\ y_0 = -b < y_1 < \dots < y_j < \dots < b = y_{\ell(n)}. \end{cases}$$

On note alors

$$\forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n), M_{i,j} = (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2,$$

on obtient ainsi une «triangulation»  $\mathcal{T}_n$  de  $\overline{\Omega}$  par des rectangles de sommets  $M_{i,j}$



Si l'on note  $\{A,B,C,D\}$  les quatre sommets du rectangle  $\overline{\Omega}$ , on remarque que  $\{M_{i,j}\}_{\substack{j=0, \dots, \ell(n) \\ i=0, \dots, k(n)}}$  contient  $\{A,B,C,D\}$  qui est  $Q_1(\Omega)$ -unisolvant, au sens de CIARLET-RAVIART [7].

- On introduit alors les fonctions spline ponctuelles suivantes, cf. P.J. LAURENT [11];

Pour tout  $i = 0, \dots, k(n)$ ,  $\varphi_i \in H^2(]-a,a[ )$  est la fonction spline de base définie par :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } i_0 = 0, \dots, k(n), \quad \varphi_i(x_{i_0}) = \delta_{i, i_0}, \\ \text{et pour tout } v \in \{v \in H^2(\text{]-}a, a[); \forall i_0 = 0, \dots, k(n), v(x_{i_0}) = \delta_{i, i_0}\} \\ \|\varphi_i\|_{2, \text{]-}a, a[} \leq \|v\|_{2, \text{]-}a, a[} \end{array} \right.$$

Pour tout  $j = 0, \dots, \ell(n)$ ,  $\Psi_j \in H^2(\text{]-}b, b[ )$  est la fonction spline de base définie par :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } j_0 = 0, \dots, \ell(n), \quad \Psi_j(y_{j_0}) = \delta_{j, j_0} \\ \text{et pour tout } v \in \{v \in H^2(\text{]-}b, b[ ); \forall j_0 = 0, \dots, \ell(n), v(y_{j_0}) = \delta_{j, j_0}\} \\ \|\Psi_j\|_{2, \text{]-}b, b[} \leq \|v\|_{2, \text{]-}b, b[} \end{array} \right.$$

On sait alors, d'après les propriétés minimales de  $\varphi_i$  et  $\Psi_j$ , que

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 0, \dots, k(n), \forall v \in \{v \in H^2(\text{]-}a, a[ ); \forall i_0 = 0, \dots, k(n), v(x_{i_0}) = 0\}, \\ \int_{-a}^a \varphi_i''(x) v''(x) dx = 0 \\ \forall j = 0, \dots, \ell(n), \forall v \in \{v \in H^2(\text{]-}b, b[ ); \forall j_0 = 0, \dots, \ell(n), v(y_{j_0}) = 0\}, \\ \int_{-b}^b \Psi_j''(y) v''(y) dy = 0. \end{array} \right.$$

## 2. - CONSTRUCTION D'UN PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE SUR $\Omega$ -CARACTERISATION ET PROPRIETES

Dans ce qui suit, sauf précision contraire,  $n \in \mathbb{N}^*$  est fixé quelconque ainsi que  $\beta = (\beta_{i,j})_{\substack{j=0, \dots, \ell(n) \\ i=0, \dots, k(n)}} \in \mathbb{R}^{k(n) + \ell(n) + 2}$ .

### 2.1. - Construction

On note  $\sigma_n(\beta)$  la fonction définie sur  $\Omega$  par :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n(\beta) = \sum_{i=0}^{k(n)} \sum_{j=0}^{\ell(n)} \beta_{i,j} \sigma_{i,j} \\ \text{où } \forall (x,y) \in \Omega, \quad \sigma_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x) \Psi_j(y), \text{ avec } \varphi_i \text{ et } \Psi_j \\ \text{définies dans (1.1) et (1.2).} \end{array} \right.$$

D'après (1.1), (1.2), (2.1) et les propriétés de régularité que l'on a sur  $\varphi_i$  et  $\Psi_j$ , cf. P.J. LAURENT [11], on obtient

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n(\beta) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ \forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n), [\sigma_n(\beta)](M_{i,j}) = \beta_{i,j} \\ \forall j = 0, \dots, \ell(n), \frac{\partial^2 \sigma_n(\beta)}{\partial x^2} (\cdot, y_j) \in C^0(]-a, a[) \\ \forall i = 0, \dots, k(n), \frac{\partial^2 \sigma_n(\beta)}{\partial y^2} (x_i, \cdot) \in C^0(]-b, b[) \\ \frac{\partial^4 \sigma_n(\beta)}{\partial x^2 \partial y^2} \in C^0(\Omega) \end{array} \right.$$

2.2. - Caractérisation

- On considère l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  des combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme  $(f \otimes g)$  où  $f \in H^2(]-a, a[)$  et  $g \in H^2(]-b, b[)$ . On a alors les propriétés suivantes

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n(\beta) \in \mathcal{E} \\ \mathcal{E} \subset H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ \forall v \in \mathcal{E} : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\cdot, b) \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\cdot, -b) \in L^2(]-a, a[) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (a, \cdot) \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (-a, \cdot) \in L^2(]-b, b[) \\ \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

- On munit alors, de façon canonique,  $\mathcal{E}$  d'un produit scalaire noté  $(\cdot)_{\otimes}$  et défini par :

si  $u_1 = \sum_{r=1}^{N_1} \xi_r^1 (f_r^1 \otimes g_r^1) \in \mathcal{E}$  et  $u_2 = \sum_{s=1}^{N_2} \xi_s^2 (f_s^2 \otimes g_s^2) \in \mathcal{E}$ ,

avec  $f_r^1, f_s^2 \in H^2(]-a, a[)$ ,  $g_r^1, g_s^2 \in H^2(]-b, b[)$ ,  $\xi_r^1$  et  $\xi_s^2 \in \mathbb{R}$  alors

$$(u_1, u_2)_{\otimes} = \sum_{r=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \xi_r^1 \xi_s^2 \langle f_r^1, f_s^2 \rangle_X \langle g_r^1, g_s^2 \rangle_Y$$

$$\text{où } \langle f_r^1, f_s^2 \rangle_X = f_r^1(a)f_s^2(a) + f_r^1(-a)f_s^2(-a) + \int_{-a}^a (f_r^1)''(x)(f_s^2)''(x)dx$$

$$\text{et } \langle g_r^1, g_s^2 \rangle_Y = g_r^1(b)g_s^2(b) + g_r^1(-b)g_s^2(-b) + \int_{-b}^b (g_r^1)''(y)(g_s^2)''(y)dy$$

sont des produits scalaires respectivement sur  $H^2([-a,a])$  et  $H^2([-b,b])$  et qui sont respectivement équivalents, cf. J. NEČAS [13], aux produits scalaires usuels sur ces espaces.

On a, avec les notations précédentes, la relation suivante :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (u,v) \in \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} \\ \\ (u,v)_{\mathfrak{E}} = u(A)v(A) + u(B)v(B) + u(C)v(C) + u(D)v(D) \\ \\ + \int_{-a}^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\cdot, -b) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\cdot, -b) dx + \int_{-a}^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\cdot, b) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\cdot, b) dx \\ \\ + \int_{-b}^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (a, \cdot) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (a, \cdot) dy + \int_{-b}^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (-a, \cdot) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (-a, \cdot) dy \\ \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy, \end{array} \right.$$

les intégrales ayant un sens d'après (2.3) ; on peut d'ailleurs vérifier directement que (2.4) définit un produit scalaire sur  $\mathfrak{E}$ , cela venant du fait que  $\{A,B,C,D\}$  est  $Q_1(\Omega)$ -unisolvant.

### 2.3. - Propriété minimale de $\sigma_n(\beta)$

La fonction  $\sigma_n(\beta)$  vérifie la propriété minimale

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathfrak{E}_n^0 = \{v \in \mathfrak{E} ; \forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n), v(M_{i,j}) = 0\}, \\ \\ \text{alors} \\ \\ \forall v \in \mathfrak{E}_n^0 \quad (\sigma_n(\beta), v)_{\mathfrak{E}} = 0 \end{array} \right.$$

Pour montrer (2.5), il suffit d'après (2.1) de le vérifier pour chaque fonction  $\sigma_{i,j}$ .

Démonstration de (2.5). Pour cela il suffit, d'après (2.4) de vérifier les assertions suivantes :

$$\forall v \in \mathfrak{E}_n^0, \text{ tel que } \forall (x,y) \in \Omega, v(x,y) = u(x) w(y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) si } y^* = -b \text{ ou } b, \int_{-a}^a \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial x^2} (\cdot, y^*) u''(x) w(y^*) dx = 0 \\ \text{ii) si } x^* = -a \text{ ou } a, \int_{-b}^b \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial y^2} (x^*, \cdot) u(x^*) w''(y) dy = 0 \\ \text{iii) } \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \sigma_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2} u''(x) w''(y) dy = 0. \end{array} \right.$$

-) Le résultat s'en déduira alors par linéarité pour tout  $v \in \mathfrak{E}_n^0$ .

-) démonstration de i) : on a,

$$\int_{-a}^a \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial x^2} (\cdot, y^*) u''(x) w(y^*) dx = \int_{-a}^a (\varphi_i)''(x) \Psi_j(y^*) u''(x) w(y^*) dx$$

d'après (2.1).

Posons  $\theta(x) = u(x) w(y^*)$ , alors  $\theta \in H^2(-a, a[ )$  et

$$\forall i = 0, \dots, k(n), \theta(x_i) = 0$$

puisque  $u(x) w(y) \in \mathfrak{E}_n^0$ , donc d'après (1.3),

$$\int_{-a}^a (\varphi_i)''(x) \theta''(x) dx = 0, \text{ d'où i).}$$

-) les démonstrations de ii) et iii) sont analogues à celles de i)

□

Remarque 2.1. L'idée est maintenant d'étendre la propriété minimale (2.5) à un espace plus général que  $\mathfrak{E}$ .

### 3. - CADRE FONCTIONNEL DE L'APPROXIMATION PAR PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE

Suivant les idées de M. ATTEIA [4] et L. SCHUMAKER [16], on considère l'espace

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \in L^2(\Omega) \right\};$$

c'est un Hilbert pour la norme euclidienne notée  $\|\cdot\|$ ,

$$(2.8) \quad v \in V \rightarrow \|v\| = \left( |v|_{0,\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{0,\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{0,\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

On peut remarquer que  $(V, \|\cdot\|)$  est le produit tensoriel (complété) de  $H^2(\text{]-}a, a[)$  par  $H^2(\text{]-}b, b[)$  munis respectivement des normes définies par :

$$\forall u \in H^2(\text{]-}a, a[), \quad \|u\|_{\text{]-}a, a[} = \left( |u|_{0,\text{]-}a, a[}^2 + |u|_{2,\text{]-}a, a[}^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\forall w \in H^2(\text{]-}b, b[), \quad \|w\|_{\text{]-}b, b[} = \left( |w|_{0,\text{]-}b, b[}^2 + |w|_{2,\text{]-}b, b[}^2 \right)^{1/2}$$

Ces normes étant équivalentes aux normes usuelles sur ces espaces d'après, par exemple, un théorème d'ARONSZAJN - SMITH, cf. [3] :

Pour un ouvert  $\Omega$  assez régulier de  $\mathbb{R}^n$ , si  $u \in L^p(\Omega)$  et si pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \in L^p(\Omega)$ , on a  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$  et il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $u$  telle que

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq c \left( |u|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right|_{0,p,\Omega} \right).$$

- On a alors  $\mathcal{E} \subset V \hookrightarrow H^2(\Omega)$ .

THEOREME 3.1. Avec les notations précédentes, l'on a :

$$(2.9) \quad \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } V \text{ pour la topologie induite par } \|\cdot\|.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))_n^0 = \left\{ \eta \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) ; \forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n), \eta(M_{i,j}) = 0 \right\} \\ \text{est dense dans } V_n^0 = \left\{ v \in V ; \forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n), v(M_{i,j}) = 0 \right\} \\ \text{pour la topologie induite par } \|\cdot\|. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* i) La démonstration de (2.9) utilise des arguments analogues à ceux du théorème des dérivées intermédiaires (cf. J.L. LIONS - E. MAGENES [12]). Elle se fait par prolongement, troncature et régularisation.

ii) Pour démontrer (2.10), on opère de la façon suivante :

-  $n \in \mathbb{N}^*$  étant donné, ainsi qu'une triangulation  $\mathcal{T}_n$  (voir notations) de  $\bar{\Omega}$ , notons  $r$  la plus petite des largeurs des rectangles de  $\mathcal{T}_n$ .

En chaque noeud  $M_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, k(n)$ ,  $j = 0, \dots, \ell(n)$ , de  $\mathcal{T}_n$  on peut considérer alors une fonction

$$\chi_{i,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \chi_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{sur la boule de centre } M_{i,j} \text{ de rayon } \frac{r}{4} \\ 0 & \text{à l'extérieur de la boule de centre } M_{i,j} \\ & \text{et de rayon } \frac{r}{3} \end{cases}$$

On obtient ainsi une famille finie  $\{\chi_{i,j}\}_{\substack{j=0, \dots, \ell(n) \\ i=0, \dots, k(n)}}$  de fonctions très régulières à supports disjoints.

- Soit alors  $v$  une fonction donnée de  $V_n^0$ . D'après (2.9)  $\exists \{\eta_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  telle que  $\eta_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} v$  dans  $V$  pour la topologie induite par  $\|\cdot\|$ .

Considérons alors la suite de fonctions définies par :

$$\forall m \in \mathbb{N}, g_m = \eta_m - \sum_{i=0}^{k(n)} \sum_{j=0}^{\ell(n)} \eta_m(M_{i,j}) \chi_{i,j} \Big|_{\bar{\Omega}}.$$

Il est clair par construction que  $g_m(M_{i,j}) = 0, \forall i = 0, \dots, k(n), \forall j = 0, \dots, \ell(n)$ , d'autre part  $\eta_m \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ; donc  $\forall m \in \mathbb{N} \quad g_m \in (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))_n^0$ . On vérifie alors que  $g_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} v$  dans  $V$  pour  $\|\cdot\|$ , cela résultant des inclusions  $V \subset H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , d'où (2.10).  $\square$

LEMME 3.1. *Les applications*

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(]-a,a[) \\ \gamma_2 &: \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(]-b,b[) \\ \gamma_3 &: \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(]-a,a[) \\ \gamma_4 &: \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(]-b,b[), \end{aligned}$$

définies par

$$\gamma_1(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\cdot, b), \quad \gamma_2(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (a, \cdot), \quad \gamma_3(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (\cdot, -b) \quad \text{et} \quad \gamma_4(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (-a, \cdot)$$

vérifient

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists c_1, c_2 > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \\ |\gamma_1(\varphi)|_{0, ]-a, a[} \leq c_1 \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{0, \Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \leq c_1 \|\varphi\| \\ |\gamma_2(\varphi)|_{0, ]-b, b[} \leq c_2 \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{0, \Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \leq c_2 \|\varphi\| \\ |\gamma_3(\varphi)|_{0, ]-a, a[} \leq c_1 \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{0, \Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \leq c_1 \|\varphi\| \\ |\gamma_4(\varphi)|_{0, ]-b, b[} \leq c_2 \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \leq c_2 \|\varphi\| \end{array} \right.$$

De plus on peut prolonger par densité les applications  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sur  $V$  et les relations (2.11) sont encore vraies pour tout  $v \in V$ .

*Démonstration.* On vérifie uniquement la première inégalité de (2.11), les autres se démontrant de façon analogue.

Le prolongement par densité résulte alors du théorème 3.1. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , on a alors pour tout  $(x, y) \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, b) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) + (b-y) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} (x, y) + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (x, y+t(b-y)) (b-y)^2 dt$$

et donc

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, b) \right]^2 &\leq 3 \left( \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (x, y) \right]^2 + (b-y)^2 \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} (x, y) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} (x, y+t(b-y)) (b-y)^2 dt \right]^2 \right) \end{aligned}$$

On intègre alors cette inégalité par rapport à y sur ]-b,b[ et l'on obtient

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,b) \right]^2 &\leq \frac{3}{2b} \left( \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \right]^2 dy + 4b^2 \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x,y) \right]^2 dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y+t(b-y))(b-y)^2 dt \right]^2 dy \right) \end{aligned} \right.$$

or  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , pour tout  $x \in ]-a,a[$   $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,.) \in H^2(]-b,b[)$  et d'après un théorème d'ARONSZAJN-SMITH cf. [3], on a :

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{Il existe } c > 0 \text{ indépendante de } x \in ]-a,a[ \text{ telle que} \\ &\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,.) \right\|_{2,]-b,b[} \leq c \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,.) \right|_{0,]-b,b[} + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,.) \right|_{0,]-b,b[} \right). \end{aligned} \right.$$

On en déduit en particulier que

$$\left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x,.) \right|_{0,]-b,b[}^2 \leq 2c^2 \left( \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \right]^2 dy + \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) \right]^2 dy \right)$$

D'où en reportant cette dernière inégalité dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,b) \right]^2 &\leq c' \left( \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) \right]^2 dy + \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) \right]^2 dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y+t(b-y))(b-y)^2 dt \right]^2 dy \right) \end{aligned}$$

On intègre alors cette dernière inégalité par rapport à x sur ]-a,a[ et l'on obtient

$$\begin{aligned} |\gamma_1(\varphi)|_{0,]-a,a[}^2 &\leq c' \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{0,\Omega}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0,\Omega}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y+t(b-y))(b-y)^2 dt \right]^2 dy dx \right) . \end{aligned}$$

En posant alors  $s = (1-t)(y-b)$  dans la dernière intégrale de cette inégalité, on montre qu'elle est majorée par  $c \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2$ , d'où le résultat.  $\square$

LEMME 3.2. Soient  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  les applications définies dans le lemme 3.1. On a :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c_3 \text{ et } c_4 > 0 \text{ telles que } \forall v \in V, \\ \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{0, \Omega} \leq c_3 \left( |\gamma_1(v)|_{0, ]-a, a[}^2 + |\gamma_3(v)|_{0, ]-a, a[}^2 + \left| \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2}, \\ \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{0, \Omega} \leq c_4 \left( |\gamma_2(v)|_{0, ]-b, b[}^2 + |\gamma_4(v)|_{0, ]-b, b[}^2 + \left| \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2}. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer le résultat pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , le résultat général dans  $V$  s'obtenant par densité. On vérifie ici uniquement la première inégalité de (2.13), l'autre se démontrant de façon analogue.

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , on a alors pour tout  $(x, y) \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, b) + (y-b) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x, b) + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, b+t(y-b))(y-b)^2 dt$$

En élevant au carré cette égalité et en intégrant par rapport à  $y$  sur  $]-b, b[$  on obtient :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) \right]^2 dy \leq 3 \left( 2b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, b) \right]^2 + \frac{8b^3}{3} \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x, b) \right]^2 \right. \\ \left. + \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, b+t(y-b))(y-b)^2 dt \right]^2 dy \right) \end{array} \right.$$

Or  $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , donc pour tout  $x \in ]-a, a[$   $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x, \cdot) \in H^1(]-b, b[) \hookrightarrow C^0(]-b, b[)$

donc il existe  $c > 0$  indépendante de  $x \in ]-a, a[$  telle que :

$$\sup_{y \in [-b, b]} \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}(x, y) \right| \leq c \left\| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2}(x, \cdot) \right\|_{2, ]-b, b[}.$$

En utilisant alors un théorème d'équivalence de normes cf. J. NEČAS [13] on en déduit que :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in ]-a, a[, \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2}(x, b) \right|^2 \leq \alpha \left( \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, b) \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, -b) \right]^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, \cdot) \right|_{0, ]-b, b[}^2 \right)$$

En reportant cette inégalité dans (2.14) on obtient

$$\int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) \right]^2 dy \leq c' \left( \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, b) \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, -b) \right]^2 + \int_{-b}^b \left[ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) \right]^2 dy + \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, b+t(y-b))(y-b)^2 dt \right]^2 dy \right)$$

On intègre alors cette dernière inégalité par rapport à x sur ]-a, a[ et l'on a

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{0, \Omega}^2 \leq c' \left( |\gamma_1(\varphi)|_{0, ]-a, a[}^2 + |\gamma_3(\varphi)|_{0, ]-a, a[}^2 + \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2 + \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}(x, b+t(y-b))(y-b)^2 dt \right]^2 dy dx \right).$$

En posant  $s = (1-t)(b-y)$  dans la dernière intégrale de cette inégalité on montre qu'elle est majorée par  $c \left| \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega}^2$ , d'où le résultat. □

**THEOREME 3.2.** Utilisant le lemme 3.1, on définit sur  $V \times V$ , la forme bilinéaire symétrique notée  $(, )_{\otimes}$  telle que :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (u, v) \in V \times V \\ (u, v)_{\otimes} = u(A)v(A) + u(B)v(B) + u(C)v(C) + u(D)v(D) \\ \quad + \int_{-a}^a \gamma_1(u)\gamma_1(v)dx + \int_{-a}^a \gamma_3(u)\gamma_3(v)dx \\ \quad + \int_{-b}^b \gamma_2(u)\gamma_2(v)dy + \int_{-b}^b \gamma_4(u)\gamma_4(v)dy \\ \quad + \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy \end{array} \right.$$

alors les assertions suivantes sont vraies.

- i)  $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$  est un produit scalaire sur  $V$ .  
Si l'on pose

$$(2.16) \quad \forall v \in V, \|v\|_{\mathfrak{H}} = ((v,v)_{\mathfrak{H}})^{1/2}$$

on obtient

- ii)  $\exists c_5, c_6 > 0, \forall v \in V \|v\|_{2,\Omega} \leq c_5 \|v\|_{\mathfrak{H}} \leq c_6 \|v\|$
- iii)  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$  est une norme équivalente à  $\|\cdot\|$  sur  $V$ .

Démonstration.

i) S'il existe  $v \in V$  tel que  $(v,v)_{\mathfrak{H}} = 0$  alors  $\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$  p.p. sur  $\Omega$  ainsi que  $\gamma_1(v) = \gamma_2(v) = \gamma_3(v) = \gamma_4(v) = 0$  et donc d'après le lemme 3.2  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$  et comme  $v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = 0$  on en déduit le résultat.

ii) Il est clair d'après l'inclusion  $V \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  et le lemme 3.1 qu'il existe  $c_6 > 0$  telle que pour tout  $v \in V \|v\|_{\mathfrak{H}} \leq c_6 \|v\|$ .

- Réciproquement : Supposons que quel que soit  $c > 0$ , il existe  $v \in V$  telle que

$$\|v\|_{\mathfrak{H}} < \frac{1}{c} \|v\|_{2,\Omega}$$

On en déduit qu'il existe  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset V$  telle que  $\|v_n\|_{2,\Omega} = 1$  et  $\|v_n\|_{\mathfrak{H}} < \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Mais puisque  $\|v_n\|_{2,\Omega} = 1$ , on peut extraire une sous-suite de  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  que l'on note toujours  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v_n\|_{2,\Omega} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|v_n\|_{\mathfrak{H}} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ et } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \\ \text{dans } H^1(\Omega), \text{ puisque l'injection } H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \text{ est compacte.} \end{array} \right.$$

Mais d'après le lemme 3.2,  $\|v_n\|_{\mathfrak{H}} \rightarrow 0$  entraîne que

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Donc d'après un théorème d'ARONSZAJN-SMITH cf. [3],  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Cauchy dans  $H^2(\Omega)$  et converge donc vers un élément  $w$  dans  $H^2(\Omega)$ .

En particulier  $\|v_n\|_{2,\Omega} = 1$  implique  $\|w\|_{2,\Omega} = 1$ , et de plus  $\|v_n\|_{\boxtimes} \rightarrow 0$  implique  $\frac{\partial^4 v_n}{\partial x^2 \partial y^2} \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  et donc  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \in L^2(\Omega)$  dans  $(\mathcal{D}(\Omega))'$ .

On en déduit que  $v_n \rightarrow w$  dans  $(V, \|\cdot\|_{\boxtimes})$  et d'après ce qui précède  $\|v_n\|_{\boxtimes} \rightarrow \|w\|_{\boxtimes}$ , donc  $\|w\|_{\boxtimes} = 0$ ; ceci est impossible car  $\|w\|_{2,\Omega} = 1$ .

iii) n'est qu'une conséquence immédiate de ii) et de (2.15). □

**THEOREME 3.3.** (Les notations sont celles du théorème 3.1). On a les résultats suivants :

- i)  $(V, \|\cdot\|_{\boxtimes})$  est un Hilbert, avec  $\|\cdot\|_{\boxtimes}$  définie dans le théorème 3.2.
- ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))_n^0$  est dense dans  $V_n^0$  pour la topologie induite par  $\|\cdot\|_{\boxtimes}$ .

*Démonstration.* Immédiate à partir des théorèmes 3.2 et 3.1. □

**LEMME 3.3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $\sigma_n(\beta)$  est définie par (2.1) on a :

$$(2.17) \quad \forall v \in V_n^0, (\sigma_n(\beta), v)_{\boxtimes} = 0$$

où  $V_n^0$  est défini dans le théorème 3.1 et  $(\cdot, \cdot)_{\boxtimes}$  défini dans le théorème 3.2.

*Démonstration.* Utilisant (2.15) on démontre de façon analogue que pour (2.5) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \eta \in (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))_n^0 \quad (\sigma_n(\beta), \eta)_{\boxtimes} = 0,$$

et il suffit alors de prolonger ce résultat, par densité, sur  $V_n^0$  en utilisant le théorème 3.3. □

**THEOREME 3.4.** Si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma_n(\beta)$  est défini par (2.1) alors  $\sigma_n(\beta)$  est la fonction spline dans  $V$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\boxtimes}$  relativement aux conditions d'interpolation sur  $\beta$  aux noeuds  $\{M_{i,j}\}_{\substack{j=0,\dots,\ell(n) \\ i=0,\dots,k(n)}}$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall i = 0, \dots, k(n), \quad \forall j = 0, \dots, \ell(n) \quad [\sigma_n(\beta)](M_{i,j}) = \beta_{i,j},$$

et

$$\|\sigma_n(\beta)\|_{\boxtimes} \leq \|v\|_{\boxtimes}$$

pour toute fonction  $v \in V$ , telle que  $v(M_{i,j}) = \beta_{i,j}$  pour  $i = 0, \dots, k(n)$  et  $j = 0, \dots, \ell(n)$ .

*Démonstration.* Du lemme 3.3 on déduit immédiatement que :

$$\|\sigma_n(\beta)\|_{\boxtimes} \leq \|v\|_{\boxtimes} \text{ pour tout } v \in V \text{ telle que } v(M_{i,j}) = \beta_{i,j}$$

pour  $i = 0, \dots, k(n)$  et  $j = 0, \dots, \ell(n)$ .

D'où le résultat d'après (2.15) et le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ M_{i,j} \right\}_{i=0, \dots, k(n)}^{j=0, \dots, \ell(n)} \supset \{A, B, C, D\} \quad \square$$

#### 4. - CONVERGENCE ET ETUDE DE L'ERREUR POUR L'APPROXIMATION PAR PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE DANS $\Omega$

On a le résultat de convergence suivant :

THEOREME 4.1. Soit  $f$  une fonction donnée appartenant à  $V \subset C^0(\bar{\Omega})$ . On pose :

$$(2.18) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \beta = \left\{ f(M_{i,j}) \right\}_{i=0, \dots, k(n)}^{j=0, \dots, \ell(n)} \in \mathbb{R}^{k(n)+\ell(n)+2}.$$

On suppose que :

$$(2.19) \quad \forall M \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \inf_{\substack{i=0, \dots, k(n) \\ j=0, \dots, \ell(n)}} |M - M_{i,j}| \right) = 0.$$

Alors si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma_n(\beta)$  est la fonction définie dans (2.1) relativement à  $\beta$  donné par (2.18) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\beta) = f \text{ dans } V \text{ pour la norme } \|\cdot\| \text{ ou } \|\cdot\|_{\boxtimes}.$$

*Démonstration.* On a d'après le théorème 3.4 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_n(\beta)\|_{\boxtimes} \leq \|f\|_{\boxtimes}$$

Donc la suite  $\{\sigma_n(\beta)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $(V, \|\cdot\|_{\boxtimes})$ . On peut donc d'après le théorème 3.3 extraire une sous-suite notée  $\{\sigma_{n_p}(\beta)\}_{n_p \in \mathbb{N}^*}$  telle que :

$$\lim_{n_p \rightarrow +\infty} \sigma_{n_p}(\beta) = v^* \in V \text{ dans } V\text{-faible } \boxtimes$$

Remarquant que pour tout  $M \in \overline{\Omega}$

$$v \in V \rightarrow v(M) \in \mathbb{R}$$

est linéaire continue pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$  de  $V$ , on obtient

$$\lim_{n_p \rightarrow +\infty} [\sigma_{n_p}(\beta)](M) = v^*(M) \text{ pour tout } M \in \overline{\Omega}.$$

D'autre part on a par construction

$$\forall i = 0, \dots, k(n_p), \forall j = 0, \dots, \ell(n_p), [\sigma_{n_p}(\beta)](M_{i,j}) = f(M_{i,j}),$$

et donc d'après (2.19) on obtient  $v^*(M) = f(M)$  pour tout  $M \in \overline{\Omega}$ , c'est-à-dire  $v^* = f$ .

Par conséquent pour la suite elle-même on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\beta) = f \text{ dans } V\text{-faible } \mathfrak{B},$$

comme d'autre part  $\|\sigma_n(\beta)\|_{\mathfrak{B}} \leq \|f\|_{\mathfrak{B}}$ , on en déduit le résultat en utilisant le théorème 3.2. iii). □

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur d'approximation, il résulte de travaux de différents auteurs cf. P.M. PRENTER [14], M.H. SCHULTZ [15], L. SCHUMAKER [16] etc..., que lorsque la fonction  $f \in H^4(\Omega)$  on a, si la suite de triangulation  $\mathcal{T}_n$  est régulière (au sens de Ciarlet-Raviart [7]),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_n(\beta) - f\|_{\ell, \Omega} = O[h_n^{4-\ell}], \ell = 0, \dots, 4,$$

où  $h_n$  désigne le maximum des diamètres des rectangles de la triangulation  $\mathcal{T}_n$ . Cependant lorsque  $f$  appartient seulement à  $V$ , on peut montrer en utilisant la technique du rectangle de référence, cf. ARCANGELI [2], que l'on a, si la suite  $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est régulière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_n(\beta) - f\|_{\ell, \Omega} = O[h_n^{2-\ell}] \quad \ell = 0, 1, 2 \\ \left| \frac{\partial^4 \sigma_n(\beta)}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{0, \Omega} = O[1] \end{array} \right.$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## REFERENCES

- [1] AHLBERG - NILSON - WALSH. «*The theory of splines and their applications*». Maths in Science and Engineering, vol 38, Academic Press, 1967.
- [2] R. ARCANGELI. Thèse de Doctorat d'Etat, Toulouse 1974.
- [3] N. ARONSZAJN, K.T. SMITH. «*Functional spaces and functional completion*». Ann. Inst. Fourier, 6 (1956), 125-185.
- [4] M. ATTEIA. «*Fonctions splines et éléments finis*». R.A.I.R.O. Août 1975, R-2, p. 13-40.
- [5] C. de BOOR. «*A practical Guide to Splines*». Applied Mathematical Sciences, vol. 27 Springer Verlag, 1978.
- [6] P.G. CIARLET. «*The finite element method for elliptic problems*». Studies in Mathematics and its applications, North-Holland 1979.
- [7] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART. «*General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications in finite element methods*». Arch. Rational Mech. Anal. 46, 177-199 (1972).
- [8] W. DAHMEN - R. de VORE et K. SCHERER. «*Multi-dimensional Spline approximation*». S.I.A.M. Numerical Analysis, juin 1980, vol. 17, Num. 3, pp. 380-402.
- [9] C.F. DUCATEAU. Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, 1971.
- [10] T.N.E. GREVILLE. «*Theory and applications of spline functions*». Academic Press, 1969.
- [11] P.J. LAURENT. «*Approximation et Optimisation*». Hermann 1972.
- [12] J.L. LIONS - E. MAGENES. «*Problèmes aux limites non homogènes et applications*». Vol. 1, Dunod, 1968.
- [13] J. NECAS. «*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*». Masson 1967.
- [14] P.M. PRENTER. «*Splines and variational methods*». A volume in Pure and Applied Mathematics, Wiley-Intersciences, 1975.
- [15] M.H. SCHULTZ. «*Spline Analysis*». Prentice Hall, 1973.
- [16] L. SCHUMAKER. «*Spline functions : Basis theory*». Wiley-Interscience, A volume in Pure and Applied Mathematics 1981.

(Manuscrit reçu le 1er septembre 1983)