ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

XUE PING WANG

Étude semi-classique d'observables quantiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 2 (1985), p. 101-135
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_2_101_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 101 à 135

ETUDE SEMI-CLASSIQUE D'OBSERVABLES QUANTIQUES

Wang Xue Ping (1)

(1) Institut de Mathématiques et d'informatique, Université de Nantes, 44072 Nantes Cédex.

Résumé : On étudie ici la liaison entre la solution de l'équation de Schrödinger et celle du système hamiltonien correspondant. On établit d'abord un résultat sur la régularité uniforme en $h \in]0,1]$ dans les espaces de Sobolev à poids de la solution de l'équation de Schrödinger associée à un opérateur h-pseudo-différentiel d'ordre 2. Ce résultat permet de retrouver la solution du système hamiltonien à partir de celle de l'équation de Schrödinger correspondante, ainsi justifier la correspondance entre l'évolution quantique et l'évolution classique pour une large classe d'observables non-bornées.

Summary : We are interested in the relationship between the solution of Schrödinger equation and that of the corresponding hamiltonian system. We establish first a result on the regularity uniform in $h \in]0,1]$ in weighted Sobolev spaces for the solution of the Schrödinger equation associated to a second order h-pseudo-differential operator. This result enables us to recover the solution of the hamiltonian system from that of the corresponding Schrödinger equation in the limit $h \to 0$, and to justify the correspondence between quantum evolution and classical evolution for non-bounded observables.

1. - INTRODUCTION

Supposons que $a(x,p)$ soit un symbole de poids tempéré, c'est-à-dire $a(x,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ à valeurs réelles tel qu'il existe $N_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{N_0}, \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

On considère l'opérateur pseudo-différentiel associé à symbole a par la formule de Weyl :

$$(1.1) \quad (a^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)f)(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \exp(i(x-y)\,.\,p)\, a(h^{1/2}(x+y)/2,\, h^{1/2}p) f(y)\,dy\,dp$$

où $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et $h > 0$ est un petit paramètre. Dans la suite, on suppose toujours que $a^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)$ admet un réalisation auto-adjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Le problème en considération provient d'un théorème classique d'Ehrenfest qui dit la chose suivante : Soient $A(h)$ l'opérateur associé au symbole $a(x,p) = |p|^2/2 + V(x)$ et $U_h(t) = \exp(-ih^{-1}tA(h))$. On pose : $\varphi_h(t) = U_h(t)\varphi$, $\varphi \in L^2$. Supposons que $x_j\, \varphi_h(t)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_h(t)$, $\frac{\partial V}{\partial x_j} \varphi_h(t)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors on a :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} &< h^{1/2}x_j >_{\varphi_h(t)} = < h^{1/2}D_j >_{\varphi_h(t)} \\ \frac{d}{dt} &< h^{1/2}D_j >_{\varphi_h(t)} = -< \frac{\partial}{\partial x_j} V(h^{1/2}x) >_{\varphi_h(t)} \end{aligned} \right.$$

où on a noté pour un opérateur L : $< L >_{\varphi_h(t)} = (\varphi_h(t), L\varphi_h(t)) = (\varphi, U_h(t)^* L\, U_h(t)\varphi)$, et $(\,.\,,\,.\,)$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ces formules sont formellement analogues au système hamiltonien classique associé à a. Il fournit une illustration de la correspondance entre mécanique quantique et mécanique classique. Ce n'est qu'un demi siècle après que Hepp [8] a établi que les formules d'Ehrenfest sont compatibles à la fois en mécanique quantique et en mécanique classique.

Depuis, de nombreuses généralisations sont apparues (voir Hagedorn [6], Simon [18] et Hogreve-Potthoff-Schrader [9], Schader-Taylor ([17]) qui traitent aussi un problème analogue).

L'objet de ce travail est d'étudier l'approximation semi-classique d'opérateurs du type :

$$(1.3) \qquad F(t,h) = W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t)^*\, B\, U_h(t)\, W_h(x_0,p_0)$$

où $W_h(x_0,p_0) = \exp\{ih^{-1/2}(x.p_0 - x_0.D)\}$, $U_h(t)$ est le groupe unitaire engendré par un opérateur pseudo-différentiel : $A(h) = a^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)$, B est aussi un opérateur pseudo-différentiel :

$B = b^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$. Rappelons que dans les travaux cités ci-dessus, on traite le cas où $A(h)$ est un opérateur de Schrödinger et B un opérateur du type : $\exp\left\{h^{1/2}i(r.x+s.D)\right\}$ avec $r,s \in \mathbb{R}^n$, tandis que dans ce travail B peut être non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, en ajoutant des conditions convenables sur $A(h)$. Plus précisément, on démontre dans la section 3 les résultats suivants :

i) Si on suppose que a est un symbole de poids tempéré et que b est un symbole de poids borné et si la solution du problème :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \partial_p a(x(t),p(t) \quad , \qquad x(0) = x_0$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\partial_x a(x(t),p(t)) \ , \qquad p(0) = p_0$$

existe pour $|t| < T$, $T > 0$, alors on a :

$$\lim_{h\to 0} \quad F(t,h) = b(x(t),p(t))$$ pour la convergence forte des opérateurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $|t| < T$;

ii) Si on suppose que a vérifie : $|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}$, $|\alpha| + |\beta| \geqslant 2$, alors pour tout b, symbole de poids tempéré quelconque, on a :

$$\lim_{h\to 0} \quad F(t,h)\varphi = b(x(t),p(t))\varphi \quad , \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Notons que si on prend : $b = \exp i(r.\ x + s\ .\ p)$, alors on retrouve des résultats bien connus (voir Hepp [8] pour le cas où $n = 1$). Si on prend $b = x_j$ ou p_j, $j = 1,\dots,n$ dans ii), alors on obtient les solutions du système hamiltonien classique pour a. En particulier si on prend $a = 1/2\ |p|^2 + V(x)$ avec V vérifiant : $|\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha \quad \forall\ |\alpha| \geqslant 2$, alors ii) et (1.2) entraînent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{d}{dt}\left(< h^{1/2}x_j >_{\varphi_h(t)}\right) = p_j(t)\ \|\varphi\|^2$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{d}{dt}\left(< h^{1/2}D_j >_{\varphi_h(t)}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} V(x(t))\ \|\varphi\|^2$$

pour $\varphi \in \mathscr{S}$ et $t \in \mathbb{R}$. Cela montre que la différence $< \frac{\partial V}{\partial x_j}(h^{1/2}x) >_{\varphi_h(t)} - \frac{\partial V}{\partial x_j}\left(< h^{1/2}x >_{\varphi_h(t)}\right)$ est négligeable, lorsque h tend vers 0, ce qui est conforme au principe de correspondance.

La différence essentielle entre notre méthode et celles utilisées auparavant (voir [8], [9]) est que nous établissons d'abord certains résultats sur la régularité de la solution de l'équation de Schrödinger et cela nous permet de justifier facilement une formule de Duhamel (voir (3.21)) ;

la formule analogue dans [8] étant établie par un calcul explicite de l'action de certains opérateurs sur les fonctions de Hermite (il en est de même dans [9]). Notons aussi qu'un propriété caractéristique de la quantification de Weyl démontrée dans Hörmander [10] est essentielle pour ce travail, car elle nous permet de traîter des opérateurs pseudo-différentiels quelconques.

Maintenant on décrit brièvement la suite de ce travail. Dans la section 2, on étudie la régularité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger. On montre que sous les conditions de ii) pour a, $U_h(t)$ est un isomorphisme topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ce résultat dans le cas où $a(x,p) = \frac{|p|^2}{2} + V(x,t)$ a été démontré dans Fujiwara [5] . Mais dans notre cas, la dépendance en h est importante et on doit la suivre à chaque étape. Dans la section 3, on montre les résultats i) et ii). On considère aussi la limite classique pour une autre famille d'opérateurs $\widetilde{F}(t,h)$ obtenue en modifiant la définition de F(t,h). Hepp ([8]) a aussi donné un résultat dans cette direction mais sa formulation finale ((2.1) de [8]) n'est pas exacte sauf si $\widetilde{a}(t)$ est indépendant de t (voir le théorème 3.8). Une formulation correcte de ce résultat de Hepp est donnée dans Thirring [19] . On considère aussi les hamiltoniens dépendant du temps et un développement complet de l'opérateur F(t,h) en puissance de $h^{1/2}$ est obtenu avec les estimations du reste dans les espaces de Sobolev à poids.

Ce travail a été présenté dans [21] . Il constitue une partie de ma thèse préparée sous la direction du Professeur Didier Robert. Ici l'auteur voudrait exprimer ses gratitudes envers lui pour de nombreuses discussions.

2. - REGULARITE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DE SCHRODINGER

2.1. - Solution du système Hamiltonien classique

Dans cette section, on considère une famille de symboles dépendants du temps, $a(t)$, $t \in]-T,T[$. On fera les hypothèses suivantes sur $a(t)$:

(2.1) $a(x,p,t)$ est à valeurs réelles et pour tous multi-indices α, β, $\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)$ est continue en $t \in]-T,T[$;

(2.2) Pour tout $0 < T_1 < T$ et pour tous multi-indices α, β tels que $|\alpha| + |\beta| \geqslant 2$, il existe une constante $C_{\alpha\beta,T_1}$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)| \leqslant C_{\alpha\beta,T_1} \qquad t \in [-T_1,T_1],\ (x,p) \in \mathrm{IR}^{2n}$$

(2.3) $\mathrm{op}^W a(t)$, défini sur $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, se prolonge en un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$ que l'on note $A(t)$. Ici on a noté $\mathrm{op}^W a$ l'opérateur associé au symbole a par la formule (1.1) avec $h = 1$.

Pour k entier $\geqslant 0$, on introduit les espaces $B^k(\mathrm{IR}^n)$ par

$$B^k(\mathrm{IR}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathrm{IR}^n) \,;\, x^\alpha D^\beta f \in L^2(\mathrm{IR}^n),\ |\alpha| + |\beta| \leqslant k \right\}$$

On munit $B^k(\mathrm{IR}^n)$ d'une norme naturelle, notée par $\|\ .\ \|_k$. En utilisant la définition de $A(t)\varphi$ comme intégrale oscillante, il est facile de voir que pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, l'application $t \to A(t)\varphi$ de $]-T,T[$ dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$ est fortement continue dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$. Par un argument de densité, utilisant la condition (2.2), on voit que cette propriété est encore vraie pour tout $\varphi \in B^2(\mathrm{IR}^n)$.

On va étudier la régularité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger :

$$(2.4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} i \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi_s(t) = A(t)\, \varphi_s(t) \\[2ex] \varphi_s(s) = \varphi \end{array} \right.$$

avec $s,t \in]-T,T[$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$. Dans la suite on appelle solution du problème (2.4) toute application absolument continue : $t \to \varphi_s(t)$ de $]-T,T[$ dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$ telle que $\varphi_s(t)$ appartienne à $D(A(t))$ pour tout t. Les résultats obtenus dans cette section sont déjà connus pour $a(x,p,t) = |p|^2 + V(x,t)$ (voir Fujiwara [5]).

On commence par étudier la solution du système hamiltonien

$$
(2.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, x(t,s\,;y,g) = \partial_p\, a(x(t,s\,;y,g),\, p(t,s\,;y,g),t) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\, p(t,s\,;y,g) = -\,\partial_x\, a(x(t,s\,;y,g),\, p(t,s\,;y,g),t) \end{cases}
$$

avec les données initiales :

$$
(2.6)\qquad x(s,s\,;y,g) = y, \qquad p(s,s\,;y,g) = g, \qquad (y,g) \in \mathbb{R}^{2n}.
$$

Par la méthode des approximations successives, on peut montrer que la solution dy système hamiltonien (2.5), (2.6) existe pour $|t-s|$ assez petit, disons $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$, $|t|, |s| \leqslant T_1$. Les conditions sur $a(x,p,t)$ entraînent que $x(t,s\,;y,g)$, $p(t,s\,;y,g)$ sont de classe C^1 en t,s et C^∞ en (y,g). Dans la suite, on notera : $x(t) = x(t,s\,;y,g)$, $p(t) = p(t,s\,;y,g)$. De (2.5) et (2.6), il vient :

$$
(2.7)\qquad \begin{cases} x(t) - y = \displaystyle\int_s^t \partial_p\, a(x(\tau),\, p(\tau),\tau)d\tau \\[2ex] p(t) - g = -\displaystyle\int_s^t \partial_x\, a(x(\tau),\, p(\tau),\tau)d\tau \end{cases}
$$

LEMME 2.1. *Pour* $|t-s| \leqslant \delta(T_1)$, $|t|, |s| \leqslant T_1$, *on a les estimations suivantes :*

$$
(2.8)\qquad \begin{cases} |x(t)| \leqslant C(1 + |y| + |g|) \exp\{C\,|t-s|\} \\[2ex] |p(t)| \leqslant C(1 + |y| + |g|) \exp\{C\,|t-s|\} \end{cases}, \quad (y,g) \in \mathbb{R}^{2n}
$$

Pour $|\alpha| + |\beta| \geqslant 1$, *on a :*

$$
(2.9)\qquad \begin{cases} |\partial_y^\alpha \partial_g^\beta (x(t)-y)| \leqslant C_{\alpha\beta}\, |t-s| \exp\{C_{\alpha\beta}\,|t-s|\} \\[2ex] |\partial_y^\alpha \partial_g^\beta (p(t)-g)| \leqslant C_{\alpha\beta}\, |t-s| \exp\{C_{\alpha\beta}\,|t-s|\} \end{cases}
$$

Pour prouver le lemme 2.1, il suffit d'utiliser (2.7) et l'inégalité de Gronwall.

COROLLAIRE 2.2. *Il existe* $0 < \delta_1(T_1) \leqslant \delta(T_1)$ *tel que pour tout* $|t-s| \leqslant \delta_1(T_1)$ *et pour tout*

$g \in \mathbb{R}^n$, *l'application* $y \to x(t,s\,;y,g)$ *est un* C^∞*-différomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

On renvoie à Chazarain [3] pour la démonstration de ce corollaire.

Posons : $\Delta(T_1) = \{(t,s)\ ;\ |t| \leqslant T_1\ ,\ \ |s| \leqslant T_1\ ,\ \ |t-s| \leqslant \delta_1(T_1)\}$. Pour (t,s) appartenant à $\Delta(T_1)$, introduisons les opérateurs pseudo-différentiels :

(2.10) $$X_j(t,s) = \mathrm{op}^w x_j(t,s),\quad P_j(t,s) = \mathrm{op}^w p_j(t,s),\qquad j = 1,\dots,n.$$

Alors pour $t = s$ la condition (2.6) donne :

(2.11) $$X_j(t,t)\varphi = x_j\varphi,\quad P_j(t,t) = D_j\varphi,\qquad \text{pour } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 2.3. *Pour* $(t,s) \in \Delta(T_1)$, *soit* $C(t,s)$ *l'un des opérateurs* $X_j(t,s)$, $P_j(t,s)$, $j = 1,\dots,n$. *Alors pour tout entier* $k \geqslant 0$, *il existe une constante* C_k *indépendante de* t,s *telle que l'on ait :*

(2.12) $$\| [X_j, C(t,s)]\varphi \|_k \leqslant C_k \| \varphi \|_k\ ,\qquad \| [D_j, C(t,s)]\varphi \|_k \leqslant C_k \| \varphi \|_k$$

(2.13) $$\| C(t,s)\varphi \|_k \leqslant C_k \| \varphi \|_{k+1}\ ,\qquad \textit{pour } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. On montre d'abord (2.12) et (2.13) pour $k = 0$. Si on désigne par $C(t,s\,;x,p)$ le symbole de $C(t,s)$, le lemme 2.1 donne que $\partial_x^\alpha \partial_p^\beta C(t,s\,;x,p)$ est de poids borné pour $|\alpha| + |\beta| = 1$. Comme $i[X_j, C(t,s)]$, $i[D_j, C(t,s)]$ admettent comme symboles $-\partial_{p_j} C(t,s\,;x,p)$ et $\partial_{x_j} C(t,s\,;x,p)$ respectivement, (2.12) vient de la continuité dans L^2 des opérateurs pseudo-différentiels, (voir Caldéron-Vaillancourt [2]), pour $k = 0$.

Pour prouver (2.13) avec $k = 0$, il suffit de remarquer que d'après le lemme 2.1, on a :

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta C(t,s\,;x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)$$

Pour $k \geqslant 1$ quelconque, on peut utiliser une récurrence et l'estimation (2.12) pour $k = 0$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2.4. $X_j(t,s)$, $P_j(t,s)$ *se prolongent en des opérateurs bornés de* $B^k(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $k \geqslant 1$. *Pour* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $X_j(t,s)\varphi$ *et* $P_j(t,s)\varphi$ *sont de classe* C^1 *dans* $B^k(\mathbb{R}^n)$ *par rapport à* $(t,s) \in \Delta(T_1)$.

Preuve. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $B^k(\mathbb{R}^n)$, la première affirmation vient directement de (2.13). Comme les symboles de $X_j(t,s)$, $P_j(t,s)$ sont C^1 en t,s, par la technique des intégrales oscillantes, la deuxième affirmation se justifie facilement.

C.Q.F.D.

2.2. - Régularité de la solution de l'équation de Schrödinger

Avant d'étudier la régularité de la solution du problème (2.4), on rappelle un résultat sur l'existence de la solution de ce problème.

THEOREME 2.5. *Sous les conditions (2.1) et (2.2), la solution du problème (2.4) existe pour* $(t,s) \in \Delta(T_1)$. *Si on désigne par* $U(t,s)$ *l'application* $U(t,s) : \varphi \to \varphi_s(t)$, *alors* $U(t,s)$ *se prolonge en une famille d'opérateurs uniformément bornés de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et de* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *pour* $(t,s) \in \Delta(T_1)$ *et on a :*

$$U(t,\theta)\, U(\theta,s) = U(t,s) \qquad (t,\theta),\ (\theta,s) \in \Delta(T_1). \tag{2.14}$$

Si $A(t)$ *vérifie de plus la condition (2.3), alors* $U(t,s)$ *est un opérateur unitaire dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour la démonstration de ce résultat, on renvoie à Kitada et Kumano-go [12].

Remarque 2.6. Dans [12], Kitada et Kumanogo ont considéré la quantification non sysmétrique, c'est-à-dire au lieu d'utiliser la formule (1.1) pour définir un opérateur pseudo-différentiels $A(x,D)$ à partir du symbole a, ils ont utilisé la formule usuelle :

$$(A(x,D)f)(x) = (2\pi)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot p}\, a(x,p) f(y)\, dy\, dp$$

Dans notre cas, il est facile de voir que si $a(t)$ satisfait aux (2.1) et (2.2), alors $a^w(x,D,t)$ admet un symbole usuel qui satisfait au (5.3) de [12] (voir aussi (5.8) de [12]).

Remarque 2.7. Le théorème 2.5 a été démontré pour $|t| \leqslant T_0$, $|s| \leqslant T_0$ avec T_0 assez petit dans [12]. Etant donné le corollaire 2.2, cette restriction n'est pas nécessaire.

Notre premier résultat sur la régularité de la solution est le théorème suivant :

THEOREME 2.8. *Pour tout entier* $N \geqslant 0$, *il existe une constante* C_N *telle que pour* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et pour* t,s *tels que* (t,s) *appartient à* $\Delta(T_1)$, *on a alors* $U(t,s)\varphi \in B^N(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\| U(t,s)\varphi \|_N \leqslant C_N \| \varphi \|_N \tag{2.15}$$

uniformément par rapport à $(t,s) \in \Delta(T_1)$.

On commence par établir des lemmes :

LEMME 2.9. *Pour* $\varphi \in \mathscr{S}$, *on a :*

$$(2.16) \qquad \frac{\partial}{\partial x} X_j(t,s)\varphi = -(\mathrm{op}^W \{a(.,.,s), x_j(t,s;.,.)\})\varphi$$

$$(2.17) \qquad \frac{\partial}{\partial t} X_j(t,s)\varphi = (\mathrm{op}^W(\partial_{p_j} a(x(t,s;.,.), p(t,s;.,.),t))\varphi.$$

De même, pour $P_j(t,s)$, *on a :*

$$(2.18) \qquad \frac{\partial}{\partial s} P_j(t,s)\varphi = -(\mathrm{op}^W \{a(.,.,s), p_j(t,s;.,.)\})\varphi$$

$$(2.19) \qquad \frac{\partial}{\partial t} P_j(t,s)\varphi = -(\mathrm{op}^W \partial_{x_j} a(x(t,s;.,.), p(t,s;.,.),t))\varphi$$

Les égalités (2.16) - (1.19) *ont lieu dans* $B^k(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $k \geqslant 0$. $\{.,.\}$ *désigne le crochet de Poisson :* $\{C,d\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial C}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial d}{\partial x_j} - \frac{\partial C}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial d}{\partial p_j}\right)$

Preuve. Par la définition des opérateurs $X_j(t,s)$, $P_j(t,s)$ (voir (2.10)), (2.17) et (2.19) sont immédiants. On démontre (2.16) et (2.18) se déduit de la même manière.

En revenant aux intégrales oscillantes, on a facilement :

$$(2.20) \qquad \frac{\partial}{\partial s} X_j(t,s)\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial s} x_j\right)^W (t,s;x,D)\varphi, \qquad \text{pour } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Donc il suffit de vérifier :

$$(2.21) \qquad \frac{\partial}{\partial s} x_j(t,s) = -\{a(s), x_j(t,s)\}$$

On note ϕ_s^t la solution $(x(t,s), p(t,s))$ du problème (2.5) et (2.6). Comme

$$(2.22) \qquad \phi_s^t \circ \phi_t^s = I \qquad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}$$

$$(2.23) \qquad \frac{\partial b}{\partial t} \circ \phi_s^t = \{a(t), b\} \circ \phi_s^t, \qquad \text{pour } b \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

on en déduit :

$$(2.24) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial s} \circ \phi_s^t &= -\left(\frac{\partial}{\partial r}(b \circ \phi_s^t \circ \phi_t^r)\Big|_{r=s}\right) \circ \phi_s^t \\ &= -\{a(s),\ b \circ \phi_s^t\} \circ \phi_t^s \circ \phi_s^t \\ &= -\{a(s),\ b \circ \phi_s^t\} \end{aligned}$$

En particulier, si on prend $b = x_j$, on obtient (2.21). (2.16) provient de (2.20) et (2.23). D'après le corollaire 2.4, cela finit la démonstration.

C.Q.F.D.

LEMME 2.10. *Pour tout* $k \geqslant 0$, *il existe* C_k *tel que :*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} X_j(t,s)\varphi + i[A(s), X_j(t,s)]\varphi \right\|_k \leqslant C_k \, \|\varphi\|_k \qquad (t,s) \in \Delta(T_1) \tag{2.25}$$

$$\left\| \frac{\partial P_j(t,s)}{\partial s} \varphi + i[A(s), P_j(t,s)]\varphi \right\|_k \leqslant C_k \, \|\varphi\|_k \qquad \textit{pour } \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n). \tag{2.26}$$

Preuve. D'après les résultats sur le calcul symbolique (voir L. Hörmander [10]). $i[A(s),X_j(t,s)]$ admet un symbole de la forme $\{a(s), x_j(t,s)\} + r(t,s)$. Par hypothèse (2.2) sur $a(t)$ et le lemme 2.1, $r(t,s)$ satisfait à l'estimation.

$$|\partial_x^\alpha \partial_g^\beta r(t,s)| \leqslant C_{\alpha\beta} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{IN}^n \tag{2.27}$$

Le lemme 9 montre que $\frac{\partial}{\partial s} X_j(t,s) + i[A(s), X_j(t,s)]$ est le symbole $r(t,s)$. Donc la continuité dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$ pour des opérateurs pseudo-différentiels entraîne (2.25) pour $k = 0$. En procédant comme la démonstration de la proposition 2.3, on peut montrer (2.25) pour tout entier $k \geqslant 0$. (2.26) peut être démontré de la même manière.

C.Q.F.D.

Introduisons les opérateurs $\widetilde{X}_j(t,s)$, $\widetilde{P}_j(t,s)$ par :

$$\widetilde{X}_j(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} X_j(t,s) + i[A(s), X_j(t,s)] \tag{2.28}$$

$$\widetilde{P}_j(t,s) = \frac{\partial}{\partial s} P_j(t,s) + i[A(s), X_j(t,s)] \tag{2.29}$$

Le lemme 2.10 affirme que $\widetilde{X}_j(t,s)$, $\widetilde{P}_j(t,s)$ se prolongent en des opérateurs bornés dans $B^k(\mathrm{IR}^n)$ pour tout $k \geqslant 0$.

LEMME 2.11. *Pour* $\varphi \in \mathscr{S}$, *on a dans* $L^2(\mathrm{IR}^n)$:

$$(P_j(t,\tau)\, U(\tau,s) - U(\tau,s)\, P_j(t,s))\varphi = \int_s^\tau U(\tau,\sigma)\, \widetilde{P}_j(t,\sigma)\, U(\sigma,s)\varphi \, d\sigma \tag{2.30}$$

$$(X_j(t,\tau)\, U(\tau,s) - U(\tau,s)\, X_j(t,s))\varphi = \int_s^\tau U(\hat{\tau},\sigma)\, \widetilde{X}_j(t,\sigma)\, U(\sigma,s)\varphi \, d\sigma \tag{2.31}$$

Preuve. Par le théorème 2.5, les premiers membres de (2.30) et (2.31) sont bien définis, puisque $U(t,s)\varphi \in B^2(\mathrm{IR}^n)$ et que $X_j(t,\tau)$, $P_j(t,\tau)$ sont continues de $B^2(\mathrm{IR}^n)$ dans $B^1(\mathrm{IR}^n)$.

Pour $\Psi \in C_0^\infty(\mathrm{IR}^n)$, $(U(\tau,r)\, P_j(t,r)\, U(r,s)\varphi,\Psi)$ est C^1 en r, donc on a la formule

$$([P_j(t,\tau)\, U(\tau,s) - U(\tau,s)\, P_j(t,s)]\varphi,\Psi)$$
$$= \int_s^\tau \frac{d}{dr}(U(\tau,r)\, P_j(t,r)\, U(r,s)\varphi,\Psi)dr$$
$$= \int_s^\tau (U(\tau,r)\quad i[A(r), P_j(t,r)] + \frac{\partial}{\partial r} P_j(t,r)\quad U(r,s)\varphi,\Psi)dr$$
$$= \int_s^\tau (U(\tau,r)\, \widetilde{P}_j(t,r)\, U(r,s)\varphi,\Psi)dr$$

(. , .) désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$. D'où (2.30). De même, on peut montrer (2.31).

C.Q.F.D.

Maintenant, on peut montrer le théorème 2.8 :

Preuve du Théorème 2.8. Pour N, $0 \leqslant N \leqslant 2$, (2.15) est déjà montré dans le théorème 2.5. Supposons que l'on ait déjà montré (2.15) pour N, $0 \leqslant N \leqslant k-1$, on va le montrer pour $N = k$. Prenons $t = \tau$, (2.30) et (2.31) deviennent :

(2.32) $$D_j\, U(\tau,s)\varphi = U(\tau,s)\, P_j(\tau,s)\varphi + \int_s^\tau U(\tau,\sigma)\, \widetilde{P}_j(\tau,\sigma)\, U(\sigma,s)\varphi\, d\sigma$$

(2.33) $$X_j\, U(\tau,s)\varphi = U(\tau,s)\, X_j(t,s)\varphi + \int_s^\tau U(\tau,\sigma)\, \widetilde{X}_j(\tau,\sigma) U(\sigma,s)\varphi\, d\sigma$$

Par le lemme 2.10 et l'hypothèse de récurrence, on déduit de (2.32), (2.33) que $D_j\, U(t,s)\varphi$, $X_j\, U(t,s)\varphi$ sont dans $B^{k-1}(\mathrm{IR}^n)$ et vérifient :

(2.34) $$\| D_j\, U(\tau,s)\varphi \|_{k-1} \leqslant C_{k-1}\, \| P_j(t,s)\varphi \|_{k-1} + C'_{k-1}\, \| \varphi \|_{k-1}$$

(2.35) $$\| X_j\, U(\tau,s)\varphi \|_{k-1} \leqslant C_{k-1}\, \| X_j(t,s)\varphi \|_{k-1} + C'_{k-1}\, \|\varphi \|_{k-1}$$

Avec le lemme 2.9, (2.34) et (2.35) impliquent $U(\tau,s)\varphi \in B^k(\mathrm{IR}^n)$ vérifiant :

$$\| U(t,s)\varphi \|_k \leqslant C_k\, \| \varphi \|_k$$

Cela finit la démonstration du théorème.

C.Q.F.D.

On remarque que par (2.14) on peut définir $U(t,s)$ pour tous t,s avec $|t|$, $|s| \leqslant T_1$.

THEOREME 2.12. *Si le symbole de* $A(t)$ *vérifie les conditions* (2.1) *et* (2.2), *alors pour* $|t|$, $|s| \leqslant T_1$, $U(t,s)$ *défini de la manière ci-dessus est une application continue de* $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ *dans* $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$. *Si on suppose de plus que* $A(t)$ *vérifie la condition* (2.3), *alors* $U(t,s)$ *est un isomorphisme linéaire topologique de* $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ *sur* $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$.

Preuve. Par le théorème 2.8 et une inégalité de Sobolev, $U(t,s)\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ lorsque $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, au moins pour $|t-s|$ assez petit : $|t-s| \leqslant \delta_1(T_1)$. De plus l'application $U(t,s) : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est uniformément continue. Pour t,s quelconques, $|t|$, $|s| \leqslant T_1$, on suppose $t > s$ et

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell = t$$

de sorte que $|t_j - t_{j-1}| \leqslant \delta_1(T_1)$, $j = 1,2,\ldots,\ell$. D'après le théorème 2.5, on a :

$$U(t,s) = U(t,t_{\ell-1})\, U(t_{\ell-1},t_{\ell-2}) \ldots U(t_1,s)$$

Donc $U(t,s)$ est continu de $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$.

Si $A(t)$ vérifie la condition (2.3), $U(t,s)$ est un opérateur unitaire dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$. Comme $U(t,s)^{-1} = U(s,t)$ est continu de $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, $U(t,s)$ est un isomorphisme topologique linéaire de $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2.13. *Sous les conditions* (2.1) *et* (2.2), *supposons que* $A(t)$ *soit indépendant de* t : $A(t) = A$. *Alors* A, *défini sur* $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, *est un opérateur essentiellement auto-adjoint.*

Pour les détails de démonstration, on renvoie à D. Robert [15] . Notons qu'en particulier, a étant à valeurs réelles, A est symétrique sur $\mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$.

2.3. - Continuité Uniforme en h

Dans cette section, au lieu de considérer l'opérateur $A(t) = \mathrm{op}^W a(t)$ on va considérer l'opérateur $A_h(t) = a^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)$ pour $0 < h < h_0$ et l'équation de Schrödinger correspondante :

$$(2.36) \qquad \begin{cases} ih \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi_h(t,s) = A_h(t)\varphi_h(t,s) \\ \\ \varphi_h(s,s) = \varphi \end{cases} \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$$

Soit $U_h(t,s) : \varphi \to \varphi_h(t,s)$. Pour notre besoin ultérieur, on établit dans cette section la continuité de $U_h(t,s)$ uniformément par rapport à h.

Définition 2.14. On désigne par $B^k(h)$ l'espace

$$B^k(h) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \; ; (h^{1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D)^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^n), \; |\alpha| + |\beta| \leqslant k \right\} \tag{2.37}$$

muni de la norme : $\| f \|_{k,h} = \Big\{ \sum_{|\alpha| + |\beta| \leqslant k} \| (h^{1/2}x)^\alpha (h^{1/2}D)^\beta f \|^2 \Big\}^{1/2}$ pour $f \in B^k(h)$.

Définition 2.15. On dira qu'un opérateur B_h est uniformément continu de $B^k(h)$ dans $B^m(h)$ s'il existe une constante C_k telle que :

$$\| B_h f \|_{m,h} \leqslant C_k \| f \|_{k,h} \qquad \text{pour } f \in B^k(h) \text{ et } 0 < h \leqslant h_0$$

THEOREME 2.16. *Soit* $A_h(t) = a^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)$ *avec* $a(t)$ *vérifiant les conditions* (2.1), (2.2). *Alors* $U_h(t,s)$ *défini par* (2.36) *se prolonge en un opérateur uniformément continu de* $B^k(h)$ *dans* $B^k(h)$ *pour tout entier* $k \geqslant 0$ *et il existe une constante* C_k *indépendante de* h *et* $|t|$, $|s| \leqslant T_1$ *telle que :*

$$\| U_h(t,s) f \|_{k,h} \leqslant C_k \| f \|_{k,h} \qquad \textit{pour } f \in B^k(h) \tag{2.38}$$

La démonstration du théorème 2.16 suit la même démarche que pour le théorème 2.8, donc on donne seulement une esquisse.

Définisson les opérateurs $X_j^h(t,s)$, $P_j^h(t,s)$, $j = 1,2,\dots,n$, par :

$$X_j^h(t,s) = x_j^W(t,s \, ; h^{1/2}x, h^{1/2}D) \tag{2.39}$$

$$P_j^h(t,s) = p_j^W(t,s \, ; h^{1/2}x, h^{1/2}D), \qquad \text{pour } (t,s) \in \Delta(T_1) \tag{2.40}$$

avec $x_j(t,s \, ; \, . \, , \, .)$, $p_j(t,s \, ; \, . \, , \, .)$ satisfaisant au problème (2.5), (2.6). Parallèlement aux lemmes 2.9, 2.10, on a ici :

LEMME 2.17. *Pour tout entier* $k \geqslant 1$, $X_j^h(t,s)$, $P_j^h(t,s)$ *se prolongent en des opérateurs uniformément continus de* $B^k(h)$ *dans* $B^{k-1}(h)$. *Pour tout entier* $k \geqslant 0$, *il existe une constante* C_k *telle que pour tous* $(t,s) \in \Delta(T_1)$, *on a :*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} X_j^h(t,s)\varphi + \frac{i}{h} [A_h(s), X_j^h(t,s)]\varphi \right\|_{k,h} \leqslant C_k \| \varphi \|_{k,h} \tag{2.41}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} P_j^h(t,s)\varphi + \frac{i}{h} [A_h(s), P_j^h(t,s)]\varphi \right\|_{k,h} \leqslant C_k \| \varphi \|_{k,h} \tag{2.42}$$

Pour montrer le lemme 2.17, il suffit d'utiliser les mêmes arguments que dans la démonstration du lemme 4.10 et le lemme suivant :

LEMME 2.18. *Soit* b *un symbole de poids tempéré vérifiant pour un certain entier* $N \geqslant 0$ *et tous* α, β :

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^N \tag{2.43}$$

Alors $B(h) = (op^W b)(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$ *défini sur* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *se prolonge en un opérateur uniformément continu de* $B^{k+N}(h)$ *dans* $B^k(h)$, *pour tout* k *entier* $\geqslant 0$.

Preuve. Considérons l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole $C(x,p) = (1+|x|^2+|p|^2)^{1/2}$

$$C(h) = C^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$$

On va montrer que pour tous entiers $m, \ell \geqslant 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\|f\|_{\ell+m,h} \leqslant \|(C(h))^\ell f\|_{m,h} \leqslant C\|f\|_{\ell+m,h} \qquad \text{pour } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \qquad h \in [0,h_0] \tag{2.44}$$

Pour $\ell = 0$, (2.44) est trivial. Supposons que (2.44) soit montré pour $\ell = k \geqslant 0$ et tout m, on va le montrer pour $\ell = k+1$. Par l'hypothèse de récurrence, on a, en remplaçant f par C(h)f,

$$C_{k,m}^{-1}\|C(h)f\|_{k+m,h} \leqslant \|(C(h))^{k+1} f\|_{m,h} \leqslant C_{k,m}\|C(h)f\|_{k+m,h} \tag{2.45}$$

Donc il suffit de montrer

$$C_s^{-1}\|f\|_{s+1,h} \leqslant \|C(h)f\|_{s,h} \leqslant C_s\|f\|_{s+1,h} \quad \text{pour tout entier } s \geqslant 0. \tag{2.46}$$

Pour $s = 0$, écrivons : $(1+|x|^2+|p|^2)^{1/2} = 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x,p) + p_j g_j(x,p)$ avec f_j, g_j des fonctions de poids borné. (2.46) est une conséquence immédiate de la continuité dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et du théorème de composition pour des opérateurs pseudo-différentiels. Pour le cas général, il suffit d'utiliser les commutateurs $[h^{1/2}x_j, C(h)]$, $[h^{1/2}D_j, C(h)]$ et une récurrence sur $s \geqslant 0$. Par conséquent, (2.44) est vérifié.

D'après (2.44), pour achever la démonstration de lemme, il suffit de montrer

$$\|C(h))^k B(h)f\| \leqslant C_k \|(C(h))^{k+N} f\| \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \tag{2.47}$$

Comme $(1+|h^{1/2}x|^2+|h^{1/2}p|^2)^{1/2} \geqslant 1$, d'après les résultats de D. Robert [15], C(h) est inversible dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour h assez petit. Donc (2.47) est équivalent à

(2.48) $$\| C(h))^k\, B(h)\, (C(h))^{-(N+k)} f \| \leqslant C_k \| f \|$$

D'après (2.43), utilisant l'approximation de $(C(h))^{-1}$ par des opérateurs pseudo-différentiels, on peut déduire que $C(h)^k\, B(h)\, (C(h))^{-(N+k)}$ est un opérateur uniformément borné dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$. Donc (2.48) est démontré, ainsi que le lemme.

C.Q.F.D.

Par les lemmes 2.17 et 2.18, on établit facilement les relations suivantes :

(2.49) $$(P_j^h(t,\tau)\, U_h(\tau,s) - U_h(\tau,s)\, P_j^h(t,s))\varphi = \int_s^\tau U_h(\tau,\sigma)\, \widetilde{P}_j^h(t,\sigma)\, U_h(\sigma,s)\; d\sigma$$

(2.50) $$(X_j^h(t,\tau)\, U_h(\tau,s) - U_h(\tau,s)\, X_j^h(t,s)\, \varphi = \int_s^\tau U_h(\tau,\sigma)\, \widetilde{X}_j^h(t,\sigma)\, U_n(\sigma,s)\varphi\, d\sigma \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$$

avec $\widetilde{P}_j^h(t,s)$, $\widetilde{X}_j^h(t,s)$ uniformément continus de $B^k(h)$ dans $B^k(h)$, $k \geqslant 0$. Comme

(2.51) $$X_j^h(t,t) = h^{1/2}\, x_j \qquad\qquad P_j^h(t,t) = h^{1/2} D_j\,,$$

(2.38) vient de (2.49), (2.50) et (2.51) en utilisant une récurrence en k.

3. - APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE AUTOUR DES TRAJECTOIRES CLASSIQUES

3.1. - Une caractérisation de la quantification de Weyl

L.Hörmander [10] a montré que la quantification de Weyl donnée par la formule (1.1) de la section 1 est la seule qui ait la propriété suivante :

(3.1) Si $L(.\,,\,.)$ est une forme réelle linéaire sur IR^{2n}, $C(x,p) = e^{i\, L(x,p)}$, alors $e^{i\, L(x,D)}$ défini par la théorie spectrale est un opérateur pseudo-différentiel, de symbole de Weyl $C(x,p)$.

Pour $(x_0,p_0) \in \mathrm{IR}^{2n}$, $h \in [0,h_0]$, posons

(3.2) $$W_h(x_0,p_0) = \exp\,[ih^{-1/2}(p_0\,.\,x - x_0\,.\,D)]$$

Alors d'après (3.1), $W_h(x_0,p_0)$ a pour symbole $\exp\left\{ih^{-1/2}(p_0\,.\,x - x_0\,.\,p)\right\}$.

LEMME 3.1. *Soit* b *un xymbole de poids tempéré. On a :*

(3.3) $$W_h(x_0,p_0)b^W(x,D)\,W_h(x_0,p_0)^* f = b^W(x-h^{-1/2}x_0,\ D-h^{-1/2}p_0)f$$

pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$.

Preuve. Comme $W_h(x_0,p_0)$ a symbole exp $\{ih^{-1/2}(x\,.\,p_0 - x_0\,.\,p)\}$, un calcul direct donne le résultat.

C.Q.F.D.

Supposons maintenant que $a \in C^\infty(\mathrm{IR}^{2n})$ soit un symbole de poids tempéré, c'est-à-dire qu'il existe N_0 réel tel que pour tous α, β, on ait :

(3.4) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|^2+|p|^2)^{N_0/2}$$

Soit $T > 0$. Supposons que la solution du système hamiltonien classique

(3.5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t,x_0,p_0) = \partial_p\, a(x(t,x_0,p_0),\, p(t,x_0,p_0)) \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial t}(t,x_0,p_0) = -\,\partial_x\, a(x(t,x_0,p_0),\, p(t,x_0,p_0)) \end{cases}$$

avec donnée initiale

(3.6) $$x(0,x_0,p_0) = x_0\,,\quad p(0,x_0,p_0) = p_0$$

existe pour $|t| < T$. Supposons aussi que a soit à valeur réelle et que $A(h) = a^W(h^{1/2}x,\ h^{1/2}D)$ admette une extension auto-adjointe dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$ pour tout $h \in\,]0,h_0]$.

On développe le symbole a autour de la solution du problème (3.5), (3.6), notée par $\{x(t),\ p(t)\}$.

(3.7) $$\begin{cases} a(x,p) = a_0(t) + a_1(x,p,t) + a_2(x,p,t) + r_3(x,p,t) \\[1ex] a_0(t) = a(x(t),p(t)) \\[1ex] a_j(x,p,t) = \displaystyle\sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t),p(t))\,(x-x(t))^\alpha\,(p-p(t))^\beta,\quad j=1,2. \\[1ex] r_3(x,p,t) = \displaystyle\sum_{|\alpha|+|\beta|=3} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,(x-x(t))^\alpha\,.\,(p-p(t))^\beta \int_0^1 (1-\sigma)^3\,\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t)+\sigma(x-x(t)), \\ \qquad\qquad p(t)+\sigma(p-p(t))d\sigma \end{cases}$$

A (3.7) correspond la décomposition suivante de A(h) :

$$\text{(3.8)} \qquad A(h) = A_0(t) + A_1^h(t) + A_2^h(t) + R_3^h(t)$$

Comme $\int_0^t a_1(\tau,p,s)ds$ est une forme réelle linéaire sur IR^{2n}, l'opérateur

$$U_1^h(t) = \exp\ -ih^{-1} \int_0^t A_1^h(s)ds$$

défini par la théorie spectrale est un opérateur pseudo-différentiel.

LEMME 3.2. *Soit* b *un symbole de poids tempéré. Pour tout* $f \in \mathcal{S}(IR^n)$, *on a :*

$$\text{(3.9)} \qquad U_1^h(t)\, b^W(x-h^{-1/2}x_0\,,\, D-h^{-1/2}p_0)\, U_1^h(t)^* f = b^W(x-h^{-1/2}\, x(t),\, D-h^{-1/2}p(t))\, f$$

Preuve. Comme on a déjà remarqué, $U_1^h(t)$ est un opérateur pseudo-différentiel. Calculant explicitement son symbole, on obtient :

$$\text{(3.10)} \quad \exp\left\{-ih^{-1}\int_0^t a_1(h^{1/2}x,\, h^{1/2}p,s)ds\right\} = \exp\, ih^{-1/2}\left\{-(x(t)-x_0)\,.\, p + (p(t)-p_0).x+g(t,h)\right\}$$

où g(t,h) est une fonction indépendante de (x,p). En appliquant le lemme 3.1, on obtient (3.9).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.3. *Pour tout symbole de poids tempéré* b, *on a*

$$\text{(3.11)} \quad U_1^h(t)\, W_h(x_0,p_0)\,.\, b^W(x,D)W_h(x_0,p_0)^*\, U_1^h(t)^* f\ = b^W(x-h^{-1/2}\, x(t),D-h^{-1/2}\, p(t))f$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(IR^n)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer successivement (3.3) et (3.9)

C.Q.F.D.

De (3.11), il vient :

$$\text{(3.12)} \quad U_1^h(t)W_h(x_0,p_0)\,.\, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, W_h(x_0,p_0)^*\, U_1^h(t)^* f = b^W(h^{1/2}x-x(t),h^{1/2}D-p(t))f$$

Cela signifie que la conjugaison de $b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)$ par l'opérateur unitaire $U_1^h(t)\, W_h(x_0,p_0)$ est équivalent à une translation le long des trajectoires classiques de (3.5) et (3.6).

3.2. - Asymptotique semi-classique autour des trajectoires classiques

Soit a un symbole vérifiant les conditions du § 3.1. Alors, la solution de l'équation de Schrödinger :

$$(3.13) \qquad ih \frac{\partial}{\partial t} \varphi_h(t) = A(h)\, \varphi_h(t) \quad , \quad \varphi_h(0) = \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n) \quad , \quad t \in \mathrm{IR}$$

existe. De plus l'application $U_h(t) : \varphi \to \varphi_h(t)$ se prolonge en un groupe unitaire dans $L^2(\mathrm{IR}^n)$.

THEOREME 3.4. *Soit* a *vérifiant les conditions précédentes. Soit* b *un symbole de poids borné. On note* B(h) *l'extension continue dans* $L^2(\mathrm{IR}^n)$ *de l'opérateur pseudo-différentiel* $b^W(h^{1/2}x, h^{1/2}p)$. *Notons* (x(t), p(t)) *la solution du problème (3.5), (3.6). Alors*

$$(3.14) \qquad s-\lim_{h\to 0} \; W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t)^*\, B(h)\, U_h(t)\, W_h(x_0,p_0) = b(x(t), p(t))$$

uniformément par rapport à t *sur tout compact de* $]-T,T[$ *(ici on a désigné par* s–lim *la limite forte dans* $L^2(\mathrm{IR}^n)$).

Ici on conserve les notations du § 2.3. On établit d'abord des lemmes.

LEMME 3.5. *Soit* C *un symbole de poids tempéré vérifiant :*

$$(3.15) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_p^\beta C(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)^{N_0}$$

pour un certain entier $N_0 \geqslant 0$. *Alors pour* $f \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, *on a*

$$(3.16) \quad \| C^W(h^{1/2}s, h^{1/2}D)\varphi - C(0,0)\varphi \|_{k,h} \leqslant C_k\, h^{1/2} \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \| X^\alpha D^\beta \varphi \|_{k+N_0,h}$$

avec C_k *indépendant de* $h \in]0,h_0]$.

Preuve. Quitte à remplacer C(x,p) par C(x,p) − C(0,0), on peut supposer C(0,0) = 0. Donc on peut écrire C(x,p) sous la forme :

$$C(x,p) = \sum_{j=1}^{n} \{ x_j\, C_j^1(x,p) + p_j\, C_j^2(x,p) \}$$

D'après (3.15), C_j^k vérifie l'estimation

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta C_j^k(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |x| + |p|)^{N_0}$$

avec une nouvelle constante $C_{\alpha\beta}$. D'où vient :

$$(3.17)\quad C^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)f=\frac{h^{1/2}}{2}\sum_{j=1}^{n}\{X_j\,C_j^{1W}(h^{1/2}x,h^{1/2}D)+C_j^{1W}(h^{1/2}x,h^{1/2}D)X_j\}f$$

$$+\sum_{j=1}^{n} h^{1/2}/2\,\{D_j\,C_j^{2W}(h^{1/2}x,h^{1/2}D)+C_j^{2W}(h^{1/2}x,h^{1/2}D)D_j\}f$$

Appliquant le lemme 2.18, on déduit (3.16) de (3.17).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.6. *Soit* B(h) *vérifiant les conditions du théorème 2.1. Alors*

$$(3.18)\qquad s-\lim_{h\to 0} B(h)=b(0,0)\qquad \textit{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

Preuve. D'après (3.16), on a $\lim_{h\to 0} B(h)\varphi = b(0,0)\varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et que B(h) est uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par rapport à h, cela entraîne que

$$\lim_{h\to 0} B(h)\varphi=b(0,0)\varphi\qquad \forall\,\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.7. *Définissons l'opérateur* $V_h(t,s)$ *par :*

$$(3.19)\quad V_h(t,s)=W_h(x_0,p_0)^*\,U_1^h(t)^*\,U_h(t-s)\,U_1^h(s)\,W_h(x_0,p_0)\exp\left\{ih^{-1}\int_s^t a_0(\sigma)d\sigma\right\}$$

Désignons par $\widetilde{A}(t)$ *l'opérateur pseudo-différentiel, de symbole* $a_2(x+x(t),p+p(t),t)$ *et par* $U(t,s)=\exp -i\int_s^t \widetilde{A}(r)dr$ *le propagateur de l'équation de Schrödinger associées à* $\widetilde{A}(t)$, *donné par le théorème 2.5. Alors, pour* $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *on a :*

$$(3.20)\qquad \lim_{h\to 0} V_h(t,0)\varphi=U(t,0)\varphi\qquad \textit{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

La limite est uniforme en t *dans tout compact de* $]-T,T[$.

Preuve. Etant donné $E\subset\,]-T,T[$ compact, on choisit $T_1<T$ tel que $E\subset[-T_1,T_1]$. Il est évident que le symbole de A(t) vérifie les conditions du théorème 2.8 pour $t\in[-T_1,T_1]$. Donc pour $\varphi\in\mathscr{S}$, $U(t,s)\varphi\in\mathscr{S}$ et $V_h(t,s)\,U(s,r)\varphi$ est continûment différentiable dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par rapport à s. On a ainsi la formule :

$$V_h(t,0)\varphi - U(t,0)\varphi = -\int_0^t \frac{d}{ds}(V_h(t,s)\,U(s,0)\varphi)ds \tag{3.21}$$

Calculant $\frac{d}{ds}\{V_h(t,s)\,U(s,0)\varphi\}$, on obtient :

$$\frac{d}{ds}\{V_h(t,s)\,U(s,0)\varphi\} = i\,V_h(t,s)\,\{W_h(x_0,p_0)^*\,U_1^h(s)^*\,[A(h)/h - A_0^h(s)/h - A_1^h(s)/h]\,. \tag{3.22}$$

$$.\;U_1^h(s)\,W_h(x_0,p_0) - \widetilde{A}(s)\}\,U(s,0)\varphi$$

D'après (3.12), on a :

$$W_h(x_0,p_0)^*\,U_1^h(s)^*\,[A(h)/h - A_0(s)/h - A_1^h(s)/h]\,U_1^h(s)\,W_h(x_0,p_0) - \widetilde{A}(s) = R_h(s) \tag{3.23}$$

où $R_h(s)$ est un opérateur pseudo-différentiel, de symbole :

$$h^{1/2} \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,x^\alpha p^\beta \int_0^1 (1-\sigma)^3\,\partial_x^\alpha \partial_p^\beta\, a(x(s)+h^{1/2}x\sigma, p(s)+h^{1/2}p\sigma)d\sigma$$

Donc pour h assez petit, on a une majoration uniforme par rapport à $s \in [-T_1, T_1]$:

$$\| R_h(s)\,U(s,0)\varphi \| \leqslant h^{1/2}\,C(\varphi) \tag{3.24}$$

Reportant (3.22), (3.23) dans (3.21), utilisant (3.24), il vient :

$$\| V_h(t,0)\varphi - U(t,0)\varphi \| \leqslant C\,h^{1/2}\,C(\varphi) \qquad |t| \leqslant T_1$$

Cela montre (3.20).

C.Q.F.D.

Revenons à la démonstration du théorème 3.4 :

Preuve. Par le corollaire 3.3, on peut réécrire le premier membre de (3.14) :

$$W_h(x_0,p_0)^*\,U_h(t)^*B(h)U_h(t)W_h(x_0,p_0) = V_h(t,0)^*b^W(h^{1/2}x+x(t), h^{1/2}D+p(t))\,V_h(t,0) \tag{3.25}$$

avec $V_h(t,s)$ défini par (3.19). Par le corollaire 3.3, $b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))$ converge fortement vers $b(x(t),p(t))$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la convergence est uniforme par rapport à t, $|t| \leqslant T_1$. (3.20) entraîne que :

$$s-\lim_{s\to 0} V_h(t,0) = U(t,0) \qquad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n) \tag{3.26}$$

uniformément pour t dans tout compact de $]-T,T[$. D'où (3.14).

C.Q.F.D.

Soient $(x(s),p(s))$ la solution du problème (3.5) et (3.6) et $a_2(s)$ la forme quadratique associée à a autour de $(x(s),p(s))$:

$$\tilde{a}_2(y,q,s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\, y^\alpha q^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(s),p(s)) \tag{3.27}$$

On désigne par $(y(s,t;x,p),\, q(s,t;x,p))$ la solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t;x,p) = -\partial_q \tilde{a}_2(y(s,t;x,p)\,,\, q(s,t;x,p),s) \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial s}(s,t;x,p) = \partial_y \tilde{a}_2(y(s,t;x,p)\,,\, q(s,t,x,p),s) \end{array}\right. \tag{3.28}$$

avec les conditions initiales :

$$y(t,t;x,p) = x \quad , \quad q(t,t;x,p) = p \tag{3.29}$$

Enfin on pose : $y(t,x,p) = y(o,t;x,p)$, $q(t,x,p) = q(o,t;x,p)$.

THEOREME 3.8. *Sous les conditions du théorème 3.4, on a :*

$$\begin{aligned} \text{s}-\lim_{h\to 0}\; & W_h(x_0,p_0)^*\, U_1^h(t)^*\, U_h(t) b^W(x-h^{1/2}x_0, D-h^{1/2}p_0) U_h(t)^* U^h(t) W_h(x_0,p_0) \\ & = b^W(y(t,x,D),\; q(t,x,D)) \quad , \quad \text{dans } L^2(\mathrm{IR}^n) \end{aligned} \tag{3.30}$$

la limite étant uniforme par rapport à t *dans tout compact de* $]-T,T[$.

Preuve. On introduit le propagateur unitaire $\overline{V}_h(s,t)$ défini par :

$$\overline{V}_h(s,t) = W_h(x_0,p_0)^*\, U_1^h(t)^*\, U_h(t-s) U_1^h(s)\,.\, W_h(x_0,p_0)\,.\, U_0^h(s,t)$$

où $U_1^h(t) = \exp\left\{-ih^{-1}\int_0^t A_1^h(s)ds\right\}$, $A_1^h(t)$ étant défini par (3.7) et (3.8) et $U_0^h(t,s) = \exp\left\{-ih^{-1}\int_s^t a_0(\sigma)d\sigma\right\}$. D'après le corollaire 3.3, on a :

$$\begin{aligned} & W_h(x_0,p_0)^* U_1^h(t)^* U_h(t) b^W(x-h^{-1/2}x_0, D-h^{-1/2}p_0) U_h(t)^* U_1^h(t) W_h(x_0,p_0) = \\ & = \overline{V}_h(0,t) b^W(x,D) \overline{V}_h(0,t)^*. \end{aligned}$$

Si on pose $U(t,s) = \exp\left\{ i\int_s^t \tilde{A}(r)dr\right\}$, on peut montrer comme dans la proposition 3.7 que :

$$s-\lim_{h\to 0} \bar{V}_h(0,t) = U(t,0) \qquad \text{dans } L^2(IR^n)$$

Pour voir cela, il suffit de remarquer que pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a :

$$(\bar{V}_h(0,t) - U(t,0))\varphi = -\int_0^t \frac{d}{ds} (\bar{V}_h(s,t)U(s,0)\varphi)ds$$

$$(3.31) \quad = i\int_0^t \bar{V}_h(s,t)\left\{ W_h(x_0,p_0)^* U_1^h(s)^* \left[\frac{A(h)}{h} - A_0(s)/h - A_1^h(s)/h\right] U_1^h(s) W_h(x_0,p_0) - \widetilde{A}(s) \right\} U(s,0)\varphi\, ds$$

De (3.31), on déduit comme dans la proposition 3.7) que :

$$\| \bar{V}_h(0,t) - U(t,0)\varphi \| \leqslant C\, h^{1/2}.$$

Donc on a prouvé que :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} s-\lim_{h\to 0}\ & W_h(x_0,p_0)^* U_1^h(t)^* U_h(t) b^W(x-h^{1/2}x_0, D-h^{1/2}p_0) U_h(t)^* U_1^h(t) W_h(x_0,p_0) \\ &= U(t,0)\, b^W(x,D) U(t,0)^* \qquad \text{dans } L^2(IR^n) \end{aligned}$$

La conclusion du théorème 3.8 vient alors du résultat suivant :

PROPOSITION 3.9. *Pour tout symbole de poids tempéré* b, $U(t,0)\ b^W(x,D)\ U(t,0)^*$ *est un opérateur pseudo-différentiel, de symbole* $b(y(t,x,p)\ ;\ q(t,x,p))$ *avec* $y(t,x,p)$ *et* $q(t,x,p)$ *définis avant le théorème 3.8.*

Preuve. Remarquons d'abord que d'après le théorème 2.8, $U(t,0)\ b^W(x,D)\ U(t,0)^*$ est une application continue de $\mathcal{S}(IR^n)$ dans $\mathcal{S}(IR^n)$. Posons :

$$F(t) = U(t,0) b^W(x,D) U(t,0)^*$$

Alors F(t) vérifie l'équation de Heisenberg :

$$(3.33) \quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dt}(t) = i\,[\widetilde{A}(t), F(t)] \\[2ex] F(0) = b^W(x,D) \end{cases}$$

ici (3.33) s'interprète au sens des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}(IR^n)$ dans $\mathcal{S}(IR^n)$. $\widetilde{A}(t)$ étant auto-adjoint dans $L^2(IR^n)$, la solution de (3.33) est unique. On cherche une solution :

$t \to F(t)$ pour (3.33) à valeurs opérateurs pseudo-différentiels. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 3.10. *Avec les notations précédentes, le problème :*

$$(3.34) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,p,t) = \{\widetilde{a}_2(x,p,t), f(x,p,t)\} \\ \\ f(x,p,0) = b(x,p) \end{cases}$$

admet une seule solution $f(x,p,t) = b(y(t,x,p), q(t,x,p))$.

Preuve. Désignons par $\widetilde{\phi}_s$ le flot hamiltonien défini par (3.28), (3.29). Soit $f(x,p,t)$ solution de (3.34) avec $b \equiv 0$. Alors $f(\phi_0^t, t)$ vérifie

$$(3.35) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\widetilde{\phi}_0^t, t) &= \{-\widetilde{a}_2(\widetilde{\phi}_0^t, t), f(\widetilde{\phi}_0^t, t)\} + \frac{\partial f}{\partial t}(\widetilde{\phi}_0^t, t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Utilisant la condition initiale, il vient : $f(\widetilde{\phi}_0^t, t) = 0$. Comme $\widetilde{\phi}_0^t \circ \widetilde{\phi}_t^0(x,p) = (x,p)$, cela entraîne $f(x,p,t) = 0$, $\forall (x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in]-T,T[$. Donc l'unicité de la solution de (3.34) est démontrée. Par l'inégalité (2.24), on a pour $f(x,p,t) = b \circ \widetilde{\phi}_t^0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,p,t) = \{\widetilde{a}_2(x,p,t), b \circ \widetilde{\phi}_t^0\}$$

La condition (3.29) entraîne $f(x,p,0) = b(x,p)$. Cela finit la démonstration.

C.Q.F.D.

Revenons à la démonstration de la proposition 3.9 :

Comme $i\,[\widetilde{A}(t), F(t)]$ admet pour symbole $\{\widetilde{a}_2(t), f(t)\}$, lorsque $F(t)$ a pour symbole $f(t)$, d'après le lemme 3.10, l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole $b(y(t,x,p), q(t,x,p))$ vérifie évidemment (3.33). Donc l'unicité du problème (3.33) entraîne que :

$$(3.36) \qquad U(t,0) b^W(x,D) U(t,0)^* = b^W(y(t,x,D), q(t,x,D))$$

La proposition 3.9 est démontrée.

C.Q.F.D.

Ajoutons maintenant une restriction sur la croissance du symbole a :

(3.37) $$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p)| \leqslant C_{\alpha\beta} \qquad \text{pour } |\alpha|+|\beta| \geqslant 2 \text{ et } (x,p)\in \mathbb{R}^{2n}.$$

Alors par le théorème 2.12, $U_h(t)$ est une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Donc pour tout symbole de poids tempéré b, $U_h(t)^* b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)U_h(t)$ est bien défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En particulier, la solution du problème (2.5) et (2.6) existe pourt tout t. Si on note $A(h) = a^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)$, alors A(h) est essentiellement auto-adjoint et par abus de notation, on note encore par A(h) son extension auto-adjointe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

THEOREME 3.11. *Pour tout symbole* b *de poids tempéré, et pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on a :*

(3.38) $$\lim_{h\to 0} W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t)^*\, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, U_h(t)\, W_h(x_0,p_0)\varphi = b(x(t),p(t))\varphi$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

La limite est uniforme par rapport à t *dans tout compact de* R.

Preuve. Comme dans le théorème 3.4, on peut encore écrire :

(3.39) $$\begin{aligned} &W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t)^*\, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, U_h(t)\, W_h(x_0,p_0)\varphi \\ &= V_h(t,0)^*\, b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))\, V_h(t,0)\varphi \end{aligned}$$

avec $V_h(t,0)$ défini par (3.19). Comme a satisfait à la condition (3.37), on voit que (3.21) est encore valide avec $R_h(s)$ vérifiant :

(3.40) $$\| R_h(s)\, U(s,0)\varphi \|_{k,h} \leqslant h^{1/2} C_k \sum_{|\alpha|\leqslant 3} \| X^\alpha D^\beta \varphi \|_{k,h}$$

uniformément par rapport à s sur tout compact de IR.

Notons par $f(x,s.h) = h^{1/2}\, R_h(s)\, U(s,0)\varphi$. De (3.40), il vient que pour tout T_1, $\{f(.,s,h)\}_{\substack{|s|\leqslant T_1 \\ 0<h\leqslant h_0}}$ est un ensemble borné dans $B^k(h)$ pour tout $k \geqslant 0$. D'où on déduit que $\{U_h^1(s)\, W_h(x_0,p_0)\, f(.,s,h)\}$ est un ensemble borné dans $B^k(h)$, car, pour $g\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} &U_h^1(s)\, W_h(x_0,p_0)g \\ &= \exp\left\{-ih^{-1/2}\left[-x.p(s) + \frac{h^{-1/2}}{2}\, p(s).x(s) - \frac{h^{-1/2}}{2}\, x(s).p_0 + \frac{h^{-1/2}}{2}\, x_0.p_0\right]\right\} g(x-h^{-1/2}x(s)) \end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème 2.16 montre que pour $|s| \leqslant T_1$, $0 < h \leqslant h_0$, $\{U_h(t-s)\, U_s^1(s)\, W_h(x_0,p_0)\, f(.,s,h)\}$ est un ensemble borné dans $B^k(h)$, pour tout $k \geqslant 0$.

D'après le lemme 2.18 et (3.21), on a :

$$
\begin{aligned}
&\| b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)(V_h(t,0)-U(t,0))\varphi \| \leqslant h^{1/2}\, C \int_0^t \| V_h(t,s)\, f(.,s,h) \|_{N,h}\, ds \\
&\leqslant h^{1/2}\, C' \int_0^t \| U_h(t-s)\, U_h^1(s)\, W_h(x_0,p_0)\, f(.,s,h) \|_{N,h}\, ds \leqslant h^{1/2}\, C''
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Cette estimation est uniforme pour t dans tout compact de IR. On peut donc estimer :

$$
\begin{aligned}
&\| V_h^*(t,0)\, b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))\, V_h(t,0)\varphi - U(t,0)^*\, b(x(t),p(t)\, U(t,0)\varphi \| \\
&\leqslant \| V_h^*(t,0)\, b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))\, (V_h(t,0)-U(t,0))\varphi \| \\
&+ \| \{b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t)) - b(x(t),p(t))\}\, U(t,0)\varphi \| \\
&+ \| (V_h^*(t,0) - U_h(t,0)^*)\, b(x(t),p(t))\, U(t,0)\varphi \|
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

En appliquant le lemme 3.5, la proposition 3.7 et (3.41), on déduit de (3.42) que :

$$
\| V_h(t,0)^*\, b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))\, V_h(t,0)\varphi - b(x(t),p(t))\varphi \| \leqslant h^{1/2}\, C(\varphi). \tag{3.43}
$$

(3.38) découle de (3.39) et (3.43).

C.Q.F.D.

3.3. - Développement semi-classique

On se place dans les conditions du théorème 3.11. Supposons que b vérifie

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{il existe } N_0 \text{ tel que :} \\
|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{N_0}, \qquad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n
\end{array}
\right. \tag{3.44}
$$

Dans la suite, on va donner un développement semi-classique de «l'état» :

$$
W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t)^*\, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, U_h(t)\, W_h(x_0,p_0)\varphi, \qquad \text{où } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.45}
$$

en puissance de $h^{1/2}$ dans un sens à préciser. Comme on l'a déjà vu, (3.45) s'écrit :

$$W_h(x_0,p_0)^* \, U_h(t)^* \, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D) \, U_h(t) \, W_h(x_0,p_0)\varphi$$

(3.46)

$$= V_h(t,0)^* \, b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t)) \, V_h(t,0)\varphi$$

Pour $N \geqslant 0$ entier quelconque, on développe les symboles $a(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}p+p(t))$, $b(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))$ autour des trajectoires $x(t)$, $p(t)$ données par (3.5), (3.6) pour $t \in \mathbb{R}$.

$$a(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}p+p(t)) = \sum_{j=0}^{N} h^{j/2} \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} x^\alpha p^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t),p(t))$$

(3.47)

$$+ h^{(N+1)} \sum_{|\alpha|+|\beta|=N+1} x^\alpha p^\beta r_{\alpha\beta}^{(1)}(h^{1/2}x,h^{1/2}p,t)$$

$$b(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}p+p(t)) = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j/2} \sum_{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} x^\alpha p^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t),p(t))$$

(3.48)

$$+ h^{N/2} \sum_{|\alpha|+|\beta|=N} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} x^\alpha p^\beta r_{\alpha\beta}^{(2)}(h^{1/2}x,h^{1/2}p,t)$$

Par l'hypothèse (2.37) lorsque $N \geqslant 1$, $|\alpha|+|\beta|=N+1$, les $r_{\alpha\beta}^{(1)}$ sont des symboles de poids borné. On écrit les opérateurs $a^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))$ et $b^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t))$ sous la forme :

$$a^W(h^{1/2}x+x(t),h^{1/2}D+p(t)) = \sum_{j=0}^{N} h^{j/2} A_j(t) + h^{(N+1)/2} R_N^1(h,t) \tag{3.49}$$

$$b^W(h^{1/2}x,x(t),h^{1/2}D+p(t)) = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j/2} B_j(t) + h^{N/2} R_N^2(h,t) \tag{3.50}$$

D'après le lemme 2.18 et (3.47), pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\| R_N^1(h,t)\varphi \|_{k,h} \leqslant C_k \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N+1} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|_{k,h} \tag{3.51}$$

où C_k est une constante indépendante de t dans tout compact de $\mathbb{R}$. Comme la proposition 3.7, on établit finalement :

$$(V_h(t,s) - U(t,s))\varphi = -i \int_s^t V_h(t,\tau_1) \left\{ \sum_{j=3}^{N} h^{j/2-1} A_j(\tau_1) + h^{(N-1)/2} R_N^1(h,\tau_1) \right\} U(\tau_1,s)\varphi \, d\tau_1 \tag{3.52}$$

pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, avec U(t,s) défini dans la proposition 3.7. Indiquons que le deuxième membre de (3.52) se comporte comme $h^{1/2}$ lorsque $h \to 0$. Par une itération, on déduit de (3.52) un développement de $V_h(t,s)$:

$$V_h(t,s)\varphi = U(t,s)\varphi + \sum_{j=1}^{N-2} (-i)^j \int_s^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{j-1}}^t U(t,\tau_j) \left\{ \sum_{\ell=3}^{N} h^{\ell/2-1} A_\ell(\tau_j) + h^{(N-1)/2} R_N^1(h,\tau_j) \right\}$$

$$. U(\tau_j,\tau_{j-1}) \left\{ \sum_{\ell=3}^{N} h^{\ell/2-1} A_\ell(\tau_{j-1}) + h^{(N-1)/2} R_N^1(h,\tau_{j-1}) \right\} U(\tau_{j-1},\tau_{j-2}) \dots U(\tau_j,s)\varphi \, d\tau_j \dots d\tau_1$$

(3.53)

$$+ (-i)^{N-1} \int_s^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{N-2}}^t V_h(t,\tau_{N-1}) \left\{ \sum_{\ell=3}^{N} h^{\ell/2-1} A_\ell(\tau_{N-1}) + h^{(N-1)/2} R_N^1(h,\tau_{N-1}) \right\}$$

$$U(\tau_{N-1},\tau_{N-2}) \dots U(\tau_1,s)\varphi \, d\tau_{N-1} \, d\tau_{N-2} \dots d\tau_1 .$$

Examinant (3.53) terme par terme, on trouve :

$$\int_s^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{j-1}}^t U(t,\tau_j) \left\{ \sum_{\ell=3}^{N} h^{\ell/2-1} A_\ell(\tau_j) + h^{(N-1)/2} R_N^1(h,\tau_j) \right\} U(\tau_j,\tau_{j-1}) \dots$$

$$U(\tau_1,s)\varphi) d\tau_j d\tau_{j-1} \dots d\tau_1 = \sum_{k=j}^{N-2} h^{k/2} \Bigg\{ \sum_{\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_j=k} \int_s^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{j-1}}^t$$

(3.54)

$$U(t,\tau_j) A_{\ell_1+2}(\tau_j) U(\tau_j,\tau_{j-1}) A_{\ell_2+2}(\tau_{j-1}) \dots A_{\ell_j+2}(\tau_1) U(\tau_1,s)\varphi d\tau_j \dots d\tau_1 \Bigg\}$$

$$+ h^{(N-1)/2} R_{N,j}^1(h,t,s)\varphi$$

Pour $R_{N,j}^1(h,t,s)$, on a le lemme suivant :

LEMME 3.12. *Pour tout entier* $m \geqslant 0$, *il existe une constante* C_m *indépendante de* t,s *dans tout compact de* IR, *et* $h \in]0,h_0]$ *telle que :*

$$(3.55) \qquad \| R_{N,j}^1(h,t,s)f \|_{m,h} \leqslant C_m \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant j(N+1)} \| x^\alpha D^\beta f \|_{m,h} \quad , \quad j = 1,\dots,N-2.$$

Preuve. On remarque d'abord que $U(t,\tau)$ est continu de $B^m(h)$ dans $B^m(h)$ et par (3.47) les $A_j(\tau)$ sont continus de $B^{j+k}(\mathrm{IR}^n)$ dans $B^k(\mathrm{IR}^n)$. Donc dans $B^m(h)$, on a

$$(3.56) \qquad \| A_j(\tau)f \|_{m,h} \leqslant C_m \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant j} \| x^\alpha D^\beta f \|_{m,h}$$

Puisque $R^1_{N,j}(h,t,s)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$U(t,\tau_j)A_{j_1+2}(\tau_j)\, U(\tau_j,\tau_{j-1})\, R^1_N(h,\tau_{j-1}) \dots U(\tau_1,s)$$

(3.55) provient de (3.51) et (3.56).

C.Q.F.D.

Si on désigne par $h^{(N-1)/2}\, R^1_{N,N-1}(h,t,s)$ le dernier terme du deuxième membre de (3.53), (355) est encore vrai pour $j = N-1$, car $V_h(t,\tau_{N-1})$ est uniformément continu de $B^m(h)$ dans $B^m(h)$.

De (3.53), (3.54), il vient :

$$\text{(3.57)}\quad V_h(t,s)\varphi = U(t,s)\varphi + \sum_{j=1}^{N-2} (-i)^j \sum_{k=j}^{N-2} h^{k/2}\, C_{k,j}(t,s)\varphi + \sum_{j=1}^{N-1} h^{(N-1)/2}\, R^1_{N,j}(h,t,s)\varphi$$

avec

$$\text{(3.58)}\quad C_{k,j}(t,s) = \sum \int_s^t \int_{\tau_1}^t \dots \int_{\tau_{j-1}}^t U(t,\tau_j)A_{\ell_1+2}(\tau_j)U(\tau_j,\tau_{j-1})\dots A_{\ell_j+2}(\tau_1)U(\tau_1,s)\,d\tau_j\dots d\tau_1$$

où la somme est prise sur tous les multi-indices $(\ell_1,\dots,\ell_j)$ de l'ensemble $(1,2,3,\dots,j)$ avec $\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_j = k$.

LEMME 3.13. *Pour* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $V_h(t,0)\varphi$ *admet un développement semi-classique :*

$$\text{(3.59)}\qquad V_h(t,0)\varphi = \sum_{j=0}^{N-2} h^{j/2}\, D_j(t)\varphi + h^{(N-1)/2}\, R_N(h,t)\varphi$$

avec $D_0(t) = U(t,0)$

$$\text{(3.60)}\qquad D_j(t) = \sum_{k=1}^{j} (-i)^k\, C_{j,k}(t,0) \qquad j = 1,2,\dots,N\text{-}2.$$

$$R_N(h,t) = \sum_{j=1}^{N-1} R^1_{N,j}(h,t,0)$$

vérifiant les estimations :

$$\text{(3.61)}\qquad \| D_j(t)\varphi \|_m \leqslant C_{j,m}\, \| \varphi \|_{m+3j} \qquad j = 0,1,\dots,N\text{-}2$$

$$\text{(3.62)}\qquad \| R_N(h,t)\varphi \|_{m,h} \leqslant C_m \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant N^2-1} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|_{m,h}$$

ici les estimations sont uniformes lorsque t *parcourt tout compact de* IR.

Preuve. (3.59) et (3.60) viennent directement de (3.57), (3.62) est une conséquence immédiate du lemme 3.12. Pour montrer (3.61), il suffit de remarquer :

$$\| C_{j,k}(t,s)\varphi \|_m \leqslant C_{m,j,k} \| \varphi \|_{m+j+2k} \tag{3.63}$$

C.D.F.D.

THEOREME 3.14. *Soit* b *un symbole vérifiant* (3.44). *Alors* $W_h(x_0,p_0)^* U_h(t)^* b^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D)$. $U_h(t)\ W_h(x_0,p_0)$ *admet un développement en puissance de* $h^{1/2}$ *au sens suivant : il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels* $G_j(t)$ *qui sont donnés par :*

$$G_j(t)\varphi = \sum_{j_1+j_2+j_3=j} D_{j_1}(t)^*\ B_{j_2}(t)\ D_{j_3}(t)\varphi \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n) \tag{3.64}$$

telle que pour tout entier N *et pour tout* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$, *on a :*

$$\begin{aligned} & W_h(x_0,p_0)^*\ U_h(t)^*\ b^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D)\ U_h(t)\ W_h(x_0,p_0)\varphi \\ & = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j/2}\, G_j(t)\varphi + h^{N/2}\, \widetilde{R}_N(h,t)\varphi\ , \quad \textit{dans} \quad \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n) \end{aligned} \tag{3.65}$$

et pour tout entier m, *on a les estimations uniformes par rapport à* t *dans tout compact de* IR :

$$\| G_j(t)\varphi \|_m \leqslant C_{j,m} \| \varphi \|_{m+3j} \qquad j = 0,1,\dots,N-1, \textit{ pour tout } \varphi \in \mathscr{S}, \tag{3.66}$$

$$\| \widetilde{R}_N(h,t)\varphi \|_{m,h} \leqslant C_m \sum_{|\alpha| + |\beta| \leqslant 2N^2+5N} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|_{m+N_0,h} \qquad h \in]0,h_0] \tag{3.67}$$

Rappelons que $B_j(t)$, $D_j(t)$ *sont définis par* (3.50), (3.60) *respectivement.*

Preuve. Par le lemme 3.13, on a :

$$V_h(t,0)^*\varphi = \sum_{j=0}^{N-1} h^{j/2}\, D_j(t)^*\varphi + h^{N/2}\, R_N(h,t)^*\varphi \tag{3.68}$$

Mais $V_h(t,s)$ étant unitaire, $V_h(t,0)^* = V_h(0,t)$. Par la démonstration des lemmes 3.12, 3.13, $D_j^*(t)$, $R_N(h,t)^*$ possèdent les mêmes propriétés que $D_j(t), R_N(h,t)$. D'autre part B_{j_2} est de symbole polynomial de degré j_2, donc pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n)$,

$$\| B_{j_2}(t)\varphi \|_{m,h} \leqslant C_{m,j_2} \sum_{|\alpha| + |\beta| \leqslant j_2} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|_{m,h} \tag{3.69}$$

D'après (3.44) et le lemme 2.18, $R_N^2(h,t)$ vérifie les estimations

$$\| R_N^2(h,t)\varphi \|_{m,h} \leqslant C_m \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant N} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|_{m+N_0,h} \tag{3.70}$$

Maintenant, (3.64) et (3.65) découlent du lemme 3.13 et de (3.50), (3.68). Les estimations (3.66), (3.67) viennent de (3.61), (3.69) et (3.70).

C.Q.F.D.

Explicitons deux premiers termes de (3.65) :

$$G_0(t) = b(x(t),p(t)) \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} G_1(t) &= D_0^*(t)^* B_1(t) D_0(t) + D_0(t)^* B_0(t) D_1(t) + D_1^*(t)^* B_0(t) D_0(t) \\ &= U(t,0)^* \left\{ \sum_{j=1}^{n} [x_j \partial_{x_j} b(x(t),p(t)) + D_j \partial_{p_j} b(x(t),p(t))] \right\} U(t,0) \end{aligned} \tag{3.72}$$

On note B^k l'espace $B^k(h)$ avec $h = 1$ et $\| \,.\, \|_k$ la norme correspondante. Alors on peut estimer le reste du développement semi-classique établi dans le théorème 3.14 par une norme indépendante de h :

COROLLAIRE 3.15. *Pour tout* m *entier* $\geqslant 0$, *il existe* C_m *tel que :*

$$\| \widetilde{R}_N(t,h)\varphi \|_m \leqslant C_m \| \varphi \|_{C(N^2+m^2)} \tag{3.73}$$

pour tout $h \subset]0,h_0]$ *et tout* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Ici* $C > 0$ *est une constante universelle.*

3.4. - Hamiltoniens dépendant du temps

Soit $a(t)$, $-T < t < T$, une famille de symboles telle que $\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)$ soit continu en (x,p), t. Supposons qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $T_1 < T$ et pour tous α, β, on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|+|p|)^{N_0} \qquad |t| \leqslant T_1 \tag{3.74}$$

Posons $A_h(t) = a^W(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t)$. On suppose que les solutions des problèmes suivants existent pour $-T < t,s < T$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{dt}(t,s) = \partial_p a(x(t,s),p(t,s),t) && x(s,s) = x_0 \\ &\frac{dp}{dt}(t,s) = -\partial_x a(x(t,s),p(t,s),t) && p(s,s) = p_0 \end{aligned} \right. \tag{3.75}$$

$$ih \frac{d}{dt} \varphi_h(t,s) = A_h(t)\, \varphi_h(t,s) \qquad \varphi_h(s,s) = \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3.76}$$

Désignons par $U_h(t,s)$ l'application $\varphi \to \varphi_h(t,s)$. Supposons de plus que $U_h(t,s)$ se prolonge en un propagateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sous les conditions ci-dessus, on peut montrer des résultats analogues au cas où l'Hamiltonien est indépendant de t :

THEOREME 3.16. *Utilisant les notations précédentes, soit* b *un symbole de poids borné. On note encore par* $b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)$ *son extension continue dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Alors :*

$$(3.77)\qquad \begin{aligned} &s-\lim_{h\to 0}\ W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t,s)^*\, b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, U_h(t,s)\, W_h(x_0,p_0) \\ &= b(x(t,s),p(t,s)) \qquad \textit{dans } L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

La limite est uniforme par rapport à t,s *dans tout compact de* $]-T,T[$.

THEOREME 3.17. *Sous les conditions du théorème* 3.16, *on a :*

$$(3.78)\qquad \begin{aligned} &s-\lim_{h\to 0}\ W_h(x_0,p_0)^*\, U_h(t,s)^*\, b^W(x\ h^{-1/2}x(t,s),D-h^{-1/2}p(t,s))\, U_h(t,s)\, W_h(x_0,p_0) \\ &= b^W(y_s(t,x,D),\, q_s(t,x,D)) \end{aligned}$$

$y_s(t,x,p)$, $q_s(t,x,p)$ *étant définis d'une manière analogue à celle du théorème* 3.8 :

Soit $\tilde{a}_2(y,q\ ;\ t,s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} \frac{1}{\alpha!\ \beta!}\ y^\alpha q^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,(t,s),p(t,s),t)$. *Soit* $(y(t,s\,;x,p),q(t,s\,;x,p))$ *la solution du problème :*

$$(3.79)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t}(t,s\,;x,p) = -\partial_q \tilde{a}_2(y(t,s\,;x,p),\, q(t,s\,;x,p)\,;t,s) \\ &\frac{\partial q}{\partial t}(t,s\,;x,p) = \partial_y \tilde{a}_2(y(t,s\,;x,p),\, q(t,s\,;x,p)\,;t,s) \end{aligned} \right.$$

avec données initiales :

$$(3.80)\qquad y(s,s\,;x,p) = x, \qquad q(s,s\,;x,p) = p.$$

alors, $y_s(t,x,p)$, $q_s(t,x,p)$ *sont donnés par*

$$(3.81)\qquad u_s(t,x,p) = y(s,t\,;x,p) \qquad q_s(t,x,p) = q(s,t\,;x,p)$$

Puisque la démonstration des théorèmes 3.16, 3.17 est presque analogue à celle des théorèmes 3.4, 3.8, on indique ici seulement les points différents.

Comme dans (3.9), on écrit $A_h(t)$ sous la forme :

$$A_h(t) = A_0^h(t,s) + A_1^h(t,s) + A_2^h(t,s) + R_3^h(t,s) \tag{3.82}$$

où $A_j^h(t,s)$ a pour symbole $a_j(x,p\,;t,s)$:

$$a_j(x,p\,;t,s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{\alpha!\,\beta!}\,\partial_x^\alpha \partial_p^\beta\, a(x(t,s),p(t,s),t)(x-x(t,s))^\alpha(p-p(t,s))^\beta \tag{3.83}$$

$j = 1,2,3$. On définit un opérateur $U_1^h(t,s)$ par :

$$U_1^h(t,s) = \exp\ -ih^{-1}\int_s^t A_1^h(\tau,s)d\tau$$

Alors comme dans le corollaire 3.3, pour tout symbole de poids tempéré b, on a :

$$U_1^h(t,s)\ W_h(x_0,p_0)\ b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\ W_h(x_0,p_0)^*\ U_1^h(t,s)^* = b^W(h^{1/2}x-x(t,s),h^{1/2}D-p(t,s)) \tag{3.84}$$

Introduisons l'opérateur $V_h^s(t,\tau)$ par :

$$V_h^s\ t,\tau) = W_h(x_0,p_0)^*\ U_1^h(t,\tau)^*\ U_h(t,\tau)U_1^h(\tau,s)\ W_h(x_0,p_0)\ \exp(-ih^{-1}\int_s^t a_0(\sigma,s)d\sigma) \tag{3.85}$$

D'après (3.84), on peut écrire le premier membre de (3.77), (3.78) comme :

$$\begin{aligned} &W_h(x_0,p_0)^*U_h(t,s)^*\ b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)U_h(t,s)W_h(x_0,p_0) \\ &= V_h^s(t,s)^*\ b^W(h^{1/2}x+x(t,s),h^{1/2}D+p(t,s))\ V_h^s(t,s) \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} &W_h(x_0,p_0)^*\ V_h(t,s)^*\ b^W(x-h^{-1/2}x(t,s),D-h^{-1/2}p(t,s))\ U_h(t,s)\ W_h(x_0,p_0) \\ &= V_h^s(t,s)^*\ b^W(x,D)\ V_h^s(t,s) \end{aligned} \tag{3.87}$$

Utilisant la méthode de la démonstration de la proposition 3.7, on obtient :

$$\|\ (V_h^s(t,s) - U(t,s))\varphi\ \| \leqslant h^{1/2}\ C(\varphi) \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{IR}^n) \tag{3.88}$$

l'estimation (3.88) étant uniforme par rapport à t,s dans tout compact de $]-T,T[$. Ici, $U(t,s)$

est défini par :

$$U(t,s) = \exp -i \int_s^t \widetilde{A}_2(r,s)dr$$

où $\widetilde{A}_2(t,s)$ est un opérateur de symbole :

$$\widetilde{a}_2(x,p\,;t,s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} x^\alpha p^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t,s),p(t,s),t)$$

Suivant la démonstration des théorèmes 3.4, 3.8, avec les modifications données ci-dessus, on peut montrer facilement les théorèmes 3.16, 3.17.

Au lieu de (3.74) on suppose que pour $|\alpha|+|\beta|\geqslant 2$, $|t|\leqslant T_1 < T$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)| \leqslant C_{\alpha\beta} \tag{3.89}$$

et que $A_h(t) = a^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D,t)$ est formellement symétrique sur $\mathcal{S}(\mathrm{IR}^n)$. Alors, d'après le théorème 2.5, le propagateur unitaire $U_h(t,s)$ correspondant au problème (3.76 existe, $U_h(t,s)$ est continu de $\mathcal{S}(\mathrm{IR}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathrm{IR}^n)$. On a donc le résultat suivant :

THEOREME 3.18. *Soit* b *un symbole de poids tempéré. Alors pour* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathrm{IR}^n)$, *on a :*

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} W_h(x_0,p_0)^* U_h(t,s)^* b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}D)\, U_h(t,s)\, W_h(x_0,p_0)\varphi \\ &= b(x(t,s),p(t,s))\varphi \qquad \textit{dans } L^2(\mathrm{IR}^n)\end{aligned} \tag{3.90}$$

La limite est uniforme par rapport à t,s *dans tout compact de* $]-T,T[$.

Remarque 3.19. On peut aussi donner un développement semi-classique de l'opérateur

$$W_h(x_0,p_0)^* U_h(t,s)^* b^W(h^{1/2}x,h^{1/2}p)\, U_h(t,s)\, W_h(x_0,p_0)$$

(voir le théorème 3.14). La démonstration est exactement la même que celle du théorème 3.14. Mais on utilise (3.86) au lieu de (3.39). On omet donc les détails.

REFERENCES

[1] R. BEALS. *«A general calculus of pseudo-differential operators».* Duke Math. J., 42 (1975), 1-42.

[2] A.P. CALDERON et R. VAILLANCOURT. *«A class of bounded pseudo-differential operators».* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185-1187.

[3] J. CHAZARAIN. *«Spectre d'un Hamiltonien quantique et mécanique classique».* Comm. P.D.E., 5 (6) (1980) 595-644.

[4] Yu. V. EGOROV. *«On canonical transformation of pseudo-differential operators».* Uspehi Mat. Nauk., 25 (1969) 235-236.

[5] D. FUJIWARA. *«A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equations».* J. Anal. Math., 35 (1979) 41-96.

[6] G.A. HAGEDORN. *«Semi-classical quantum mechnics, I the $h \to 0$ limit for coherent states».* Comm. Math. Phys., 71 (1980) 77-93.

[7] B. HELFFER et D. ROBERT. *«Calcul fonctionnel par la transformation de Melin et opérateurs admissibles».* J. Funct. Anal., 53 (3) (1983) 246-268.

[8] K. HEPP. *«The classical limit for quantum mechanical correlation functions».* Comm. Math. Phys., 35 (1974) 265-277.

[9] H. HOGREVE, J. POTTHOFF et R. SCHRADER. *«Classical limits for quantum particles in Yang-Mills potentials».* Comm. Math. Phys., 91 (4) (1983) 573-598.

[10] L. HORMANDER. *«The Weyl calculus of pseudo-differential operators».* Comm. Pure. Appl. Math., 32 (1979) 359-443.

[11] H. KITADA. *«A calculus of Fourier integral operators and the global fundamental solution for a Schrödinger equation».* Osaka J. Math., 19 (1982) 863-900.

[12] H. KITADA et H. KUMANO-GO. *«A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation».* Osaka J. Math., 18 (1981) 291-360.

[13] V.P. MASLOV et M.V. FEDORIUK. *«Semi-classical approximation in quantum mechanics».* D. Reidel, Dordrecht, (1981).

[14] D. ROBERT. *«Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et applications».* J. Funct. Anal., 45 (1) (1983) 74-94.

[15] D. ROBERT. *«Approximation semi-classique».* Cours de 3ème cycle, Nantes 1982-1983, à paraître.

[16] D. ROBERT et H. TAMURA. *« Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators ans asymptotics for scattering phase».* Comm. in P.D.E., 9(10) (1984), 1017-1058.

[17] R. SCHRADER et M. TAYLOR. *«Small asymptotics for quantum partition functions associated to particles in external Yang-Mills potentials»*. Comm. Math. Phys., 92, (1984), 555-594.

[18] B. SIMON. *«The classical limit of quantum partition functions»*. Comm. Math. Phys., 71, (1980), 247-276.

[19] W. THIRRING. *«A course in mathematical physics»*. Vol. 3, Berlin, Springer, (1979).

[20] A. VOROS. *«Developpement semi-classique»*. Thèse, Orsay, (1977).

[21] X.P. WANG. *«Etude semi-classique d'observables quantiques»*. Journée «Equations aux Dérivées Partielles» de Nantes-Rennes, Avril 1984.

(Manuscrit reçu le 8 février 1985)