

PHILIPPE BÉNILAN

SAMIR ISMAIL

**Générateur des semi-groupes non linéaires et la formule de Lie-Trotter**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 7, n° 2 (1985), p. 151-160

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1985\\_5\\_7\\_2\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_2_151_0)

© Université Paul Sabatier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## GENERATEUR DES SEMI-GROUPES NON LINEAIRES ET LA FORMULE DE LIE-TROTTER

Philippe Bénilan <sup>(1)</sup> et Samir Ismail <sup>(2)</sup>

*(1)(2) Equipe de Mathématiques, U.A. - C.N.R.S. 741, Université de Besançon 25030 Besançon.*

**Résumé :** Etant donné  $S(t)$  un semi-groupe continu de contractions non linéaire défini sur un espace de Banach  $X$ , on montre que  $S(t)$  admet un générateur infinitésimal au sens des graphes, i.e. un opérateur  $m$ -accréatif  $A$  de domaine dense tel que

$$\forall y \in Ax, \exists (x_t)_{t>0} \subset X, \lim_{t \rightarrow 0} \|x_t - x\| + \left\| \frac{x_t - S(t)x_t}{t} - y \right\| = 0$$

si et seulement si pour tout  $B : X \rightarrow X$  accréatif continu, la formule de Lie Trotter  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( S\left(\frac{t}{n}\right) S^B\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x$  converge pour tout  $x \in X$ , uniformément pour  $t \geq 0$  borné, où  $S^B(t)$  est le semi-groupe engendré par  $B$ .

**Summary :** Let  $S(t)$  be a continuous semi-group of nonlinear contractions on Banach space  $X$ . We show that  $S(t)$  has a graph infinitesimal generator, that is a  $m$ -accretive operator  $A$  with dense domain such that

$$\forall y \in Ax, \exists (x_t)_{t>0} \subset X, \lim_{t \rightarrow 0} \|x_t - x\| + \left\| \frac{x_t - S(t)x_t}{t} - y \right\| = 0$$

if and only if for any  $B : X \rightarrow X$  continuous accretive, the Lie Trotter formula  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( S\left(\frac{t}{n}\right) S^B\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x$  converges for any  $x \in X$  uniformly for  $t \geq 0$  bounded, where  $S^B(t)$  is the semi-group generated by  $B$ .

$X$  désigne un espace de Banach de norme  $\|\cdot\|$ . On note  $\mathcal{M}_0$  l'ensemble des opérateurs  $m$ -accréatifs de  $X$ , c'est-à-dire des graphes  $A \subset X \times X$  tels que, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$  soit une contraction partout définie sur  $X$ . Etant donné  $A \in \mathcal{M}_0$ , on lui associe son semi-groupe continu de contractions  $S^A(t)$  sur  $\overline{D(A)}$  défini par la «formule exponentielle» grâce au théorème de Crandall-Liggett [6],

$$(1) \quad S^A(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (J_{t/n}^A)^n x, \quad \text{pour tout } x \in \overline{D(A)} \text{ et } t > 0.$$

Etant donné  $B : X \rightarrow X$  continu accréatif, on sait que  $A + B \in \mathcal{M}_0$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_0$  (voir [1], [8], [4]). Supposant  $A \in \mathcal{M}_0$  avec  $\overline{D(A)} = X$ , on peut donc considérer les semi-groupes  $S^A(t)$ ,  $S^B(t)$  et  $S^{A+B}(t)$  sur  $X$  et il est normal de se demander si l'on a la formule de Lie-Trotter

$$(2) \quad S^{A+B}(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( S^A\left(\frac{t}{n}\right) S^B\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x$$

pour tout  $x \in X$   
uniformément pour  $t \geq 0$  borné.

Nous allons voir que la formule de Lie-Trotter (2) n'est pas vérifiée en général, même pour une perturbation  $B$  constante sur  $X$ . Plus précisément, nous montrerons qu'étant donné  $A \in \mathcal{M}_0$  avec  $\overline{D(A)} = X$ , la formule de Lie-Trotter (2) est valable pour toute application continue accréative  $B$  de  $X$  dans  $X$  ssi elle l'est pour les applications  $B$  constantes sur  $X$  et surtout ssi

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left( I + \frac{\lambda}{t} (1 - S^A(t)) \right)^{-1} x = J_\lambda^A x \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } \lambda > 0.$$

Or d'après un contre-exemple de M.G. Crandall et T. Liggett [7], la propriété (3) n'est pas toujours vérifiée et donc également la formule de Lie-Trotter (2).

Le fait que (3)  $\Rightarrow$  (2) résulte d'un théorème de H. Brézis et A. Pazy [5]. Notre contribution est dans la réciproque. Nous traiterons en fait ce problème dans un cas plus général et introduisons d'abord quelques notations.

$C$  désigne une partie fermée de  $X$ . On note  $\mathcal{C}(C)$  l'espace des applications continues de  $C$  dans  $X$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $C$ . On note  $\mathcal{G}(C)$  l'espace des germes  $(G(\ell))_{\ell \in ]0, [}$  d'applications de  $C$  dans  $X$  lipschitziennes de rapport  $1 + O(\ell)$  tels que  $\ell \rightarrow G(\ell)$  soit continue de  $]0, [$  dans  $\mathcal{C}(C)$  et  $G'(0) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{I - G(\ell)}{\ell}$  existe dans  $\mathcal{C}(C)$ . On note  $\mathcal{F}(C)$  l'espace des germes  $(F(\ell))_{\ell \in ]0, [}$  d'applications de  $X$  dans  $C$  lipschitziennes de rapport  $1 + O(\ell)$  tels que pour tout  $x \in X$ , l'application  $\ell \in ]0, [ \rightarrow F(\ell)x$  soit continue. Enfin on note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des opérateurs  $A$  tels que  $A + \omega I \in \mathcal{M}_0$  pour  $\omega \in \mathbb{R}$  suffisamment grand ; pour  $A \in \mathcal{M}$ , on note  $\omega(A) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} ; A + \omega I \in \mathcal{M}_0 \}$  ; pour tout

$\lambda > 0$  avec  $\lambda\omega(A) < 1$ ,  $J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1}$  est une application de  $X$  sur  $D(A)$  lipschitzienne de rapport  $(1 - \lambda\omega(A))^{-1}$  ; on peut associer à  $A$  par la formule exponentielle (1) le semi-groupe continu  $S^A(t)$  d'applications de  $\overline{D(A)}$  dans  $\overline{D(A)}$  lipschitziennes de rapport  $e^{\omega(A)t}$ . On dit qu'une suite généralisée  $(A_i)$  de  $\mathcal{M}$  converge si

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sup \omega(A_i) < \infty \text{ et pour tout } \lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega < 1 \\ \text{et tout } x \in X, J_\lambda x = \lim J_\lambda^{A_i} x \text{ existe dans } X \end{array} \right.$$

et on note  $A = \lim A_i$  l'unique opérateur tel que  $J_\lambda^A = J_\lambda$ .

On peut alors énoncer

THEOREME 1. Soit  $F(\ell) \in \mathcal{F}(C)$ . Pour tout  $y \in X$ , on note  $F_y(\ell)x = F(\ell)x + \ell y$ .

1) Les assertions suivantes sont équivalentes

$$(i) \quad A = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{I - F(\ell)}{\ell} \text{ existe dans } \mathcal{M} \text{ et } \overline{D(A)} = C$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } x \in C, \lim_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)x - x| = 0 \text{ et pour tout } (x,y) \in C \times X, \lim_{n \rightarrow \infty} F_y \left(\frac{t}{n}\right)^n x \text{ existe uniformément pour } t > 0 \text{ borné.}$$

2) Alors pour tout  $G(\ell) \in \mathcal{G}(C)$ ,  $A - G'(0) \in \mathcal{M}$  et

$$(6) \quad S^{A-G'(0)}(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F \left(\frac{t}{n}\right) G \left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( G \left(\frac{t}{n}\right) F \left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x$$

pour tout  $x \in C$  et uniformément pour  $t > 0$  borné.

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) et le point 2) résultent facilement de [5] ; bien que nous redémontrons l'ensemble du théorème, seule l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) est vraiment nouvelle. Ce théorème a évidemment à être rapproché du résultat remarquable de S. Reich [9] lorsque l'on suppose que  $X$  est réflexif à norme uniformément dérivable (au sens de Gâteaux) et  $C$  est un rétract contractant de  $X$  : considérant  $F(\ell) \in \mathcal{F}(C)$ , S. Reich montre que si l'on a (5) avec  $y = 0$  (pour tout  $x \in C$ ), alors on a (i) ; de plus, pour toute contraction  $P$  projetant  $X$  sur  $C$ ,

$$\frac{I - S^A(t)P}{t} \rightarrow A \text{ dans } \mathcal{M} \text{ lorsque } t \rightarrow 0.$$

Il en résulte en particulier une extension non linéaire du théorème de Hille-Yosida : l'application  $A \rightarrow S^A(t)$  est une bijection de  $\{ A \in \mathcal{M} ; \overline{D(A)} = C \}$  sur l'ensemble des semi-groupes continu d'applications de  $C$  dans  $C$  lipschitziennes de rapport  $1 + O(t)$ .

D'après le contre-exemple de M.G. Crandall et T. Liggett [7], le résultat de S. Reich ne peut pas s'étendre au cas d'un espace de Banach quelconque, même de dimension finie (avec  $\dim X \geq 3$ ). Notre théorème s'inscrit dans une autre extension du théorème de Hille-Yosida : étant donné  $A \in \mathcal{M}$ , on lui associe l'application

$$E^A : (t, x, y) \in [0, \infty[ \times \overline{D(A)} \times X \rightarrow S^{A^{-y}}(t)x \in \overline{D(A)}.$$

Il est clair que  $A$  est parfaitement déterminé par  $E^A$  :

$$A = \{(x, y) \in \overline{D(A)} \times X ; E^A(t, x, y) = x \text{ pour tout } t \geq 0\}.$$

En fait, comme il a été prouvé dans [2] (voir Corollaire 1.8), l'application  $A \rightarrow E^A$  est une bijection de  $\{A \in \mathcal{M} ; \overline{D(A)} = C\}$  sur l'ensemble des applications  $E$  de  $[0, \infty[ \times C \times X$  dans  $C$  vérifiant :

- (i)  $E(t+s, x, y) = E(t, E(s, x, y), y)$  pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $(x, y) \in C \times X$
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} |E(t, x, y) - x| = 0$  pour tout  $(x, y) \in C \times X$
- (iii) il existe  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in C \times X$ , les applications  $u(t) = E(t, x, y)$  et  $\hat{u}(t) = E(t, \hat{x}, \hat{y})$  vérifient

$$(7) \quad \frac{d}{dt} |u - \hat{u}| + \omega |u - \hat{u}| \leq [u - \hat{u}, y - \hat{y}] \text{ dans } \mathcal{D}'([0, \infty[)$$

où

$$[x, y] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{|x + \lambda y| - |x|}{\lambda} \text{ pour tout } (x, y) \in X \times X.$$

Nous utiliserons ici le fait que cette bijection est un homéomorphisme que l'on peut énoncer :

PROPOSITION 1 ([2], Proposition 1.24) <sup>(1)</sup>. *Etant donnée une suite généralisée  $(A_i)$  de  $\mathcal{M}$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $A = \lim A_i$  existe dans  $\mathcal{M}$  et  $\overline{D(A)} = C$
- (ii)  $\sup \omega(A_i) < \infty$  et pour tout  $(x, y) \in C \times X$ , il existe  $(x_i) \in \Pi \overline{D(A_i)}$  avec  $x_i \rightarrow x$  tel que  $\lim E^{A_i}(t, x_i, y)$  existe uniformément pour  $t \geq 0$  borné et appartienne à  $C$ .

(1) Dans [2] on suppose  $\omega(A_i) \leq 0$ , mais l'extension au cas général ne pose pas de problèmes (voir [3], [4]) ; on vérifie aussi facilement l'équivalence entre cet énoncé et celui de [2].

Compte tenu de la Proposition 1, le théorème 1 se déduit alors facilement de la

PROPOSITION 2. Etant donné  $F(\ell) \in \mathcal{F}(X)$ , on note  $A_\ell = \frac{I - F(\ell)}{\ell}$ ,  $J_\lambda^\ell = J_\lambda^{A_\ell}$ ,  $S^\ell(t) = S^{A_\ell}(t)$ .  
Pour  $x \in X$  fixé, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{\ell \rightarrow 0} |J_\lambda^\ell x - x| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} S^\ell(t)_x \text{ existe uniformément pour } t \geq 0 \text{ borné}$$

$$(ii) \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)_x - x| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right)_x^n \text{ existe uniformément pour } t > 0 \text{ borné.}$$

De plus, alors

$$(8) \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} S^\ell(t)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right)_x^n \text{ pour tout } t > 0.$$

Donnons d'abord la

*Preuve de la Proposition 2.* Supposons  $F(\ell)$  définie pour  $\ell \in ]0, \ell_0[$ , lipschitzienne de rapport  $1 + \omega\ell$ ; on peut toujours supposer  $\omega \geq 0$  et  $\ell_0 \leq 1$ . Rappelons l'estimation de Chernoff (voir [10], théorème 1.7) : pour tout  $x \in X$ ,  $t \geq 0$ ,  $\ell \in ]0, \ell_0[$  et  $n \in \mathbb{N}$

$$(9) \quad |S^\ell(t)_x - F(\ell)^n x| \leq (1 + \omega\ell)^n e^{\omega t} |x - F(\ell)_x| \left\{ \left(n - \frac{t}{\ell} - \omega t\right)^2 + \frac{t}{\ell} + \omega t \right\}^{1/2}.$$

Par définition

$$(10) \quad J_\lambda^\ell x - F(\ell)J_\lambda^\ell x = \frac{\ell}{\lambda} (x - J_\lambda^\ell x)$$

de telle sorte qu'en appliquant (9) à  $J_\lambda^\ell x$  à la place de  $x$ , on obtient par inégalité triangulaire :

$$(11) \quad |S^\ell(t)_x - F(\ell)^n x| \leq M \left( 1 + \frac{\frac{1}{\lambda^2} + |n\ell - t|}{\lambda} \right) |x - J_\lambda^\ell x|$$

pour tout  $x \in X$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\ell \in ]0, \ell_0[$ ,  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n\ell \leq T$ ,  $\lambda > 0$ , où

$$M = \max(2e^{\omega T}, e^{2\omega T} \max(\omega T + \frac{1}{2}, T^2)).$$

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (8) sont alors immédiates : posant  $u(t) = \lim_{\ell \rightarrow 0} S^\ell(t)_x$ , on a pour  $t \in ]0, T[$  et  $n > \frac{T}{\ell_0}$ , en appliquant (11) avec  $\ell = \frac{t}{n}$ ,

$$|F(\frac{t}{n})^n x - u(t)| \leq \sup_{0 < \ell \leq \frac{T}{n}} |S^\ell(t)x - u(t)| + M \left(1 + \frac{T}{\lambda n^2}\right) \sup_{0 < \ell \leq \frac{T}{n}} |x - J_\lambda^\ell x|$$

d'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in ]0, T]} |F(\frac{t}{n})^n x - u(t)| \leq M \limsup_{\ell \rightarrow 0} |x - J_\lambda^\ell x|.$$

Faisant  $\lambda \rightarrow 0$ , on voit donc que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\frac{t}{n})^n x = u(t)$  uniformément pour  $t \in ]0, T]$ . Aussi d'après (10),

$$|F(\ell)x - x| \leq (2 + \omega\ell + \frac{\ell}{\lambda}) |x - J_\lambda^\ell x|$$

d'où

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)x - x| \leq 2 \limsup_{\ell \rightarrow 0} |x - J_\lambda^\ell x|,$$

et à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)x - x| = 0$ .

Réciproquement supposons d'abord  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{\ell \rightarrow 0} |x - J_\lambda^\ell x| = 0$  et qu'il existe  $u \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\frac{t}{n})^n x = u(t)$  uniformément pour  $t \in ]0, T]$ . Montrons qu'alors

$\lim_{\ell \rightarrow 0} S^\ell(t)x = u(t)$  uniformément pour  $t \in [0, T]$ . Fixons  $n_0 > \frac{T}{\ell_0}$ ; étant donné  $t \in [0, T]$  et

$\ell \in ]0, \ell_0[$ , on a

$$\min_{r_0 \leq n \leq \frac{T}{\ell}} |n\ell - t| \leq n_0 \ell.$$

Appliquant (11) avec  $n$  réalisant le minimum, on obtient

$$|S^\ell(t)x - u(t)| \leq \max_{|\tau - t| \leq n_0 \ell} |u(t) - u(\tau)| + \sup_{n \geq n_0} \sup_{\tau \in ]0, T]} |F(\frac{\tau}{n})^n x - u(\tau)| + M \left(1 + \frac{\ell^2 + n_0 \ell}{\lambda}\right) |x - J_\lambda^\ell x|$$

d'où

$$\limsup_{\ell \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} |S^\ell(t)x - x| \leq \sup_{n \geq n_0} \sup_{\tau \in ]0, T]} |F(\frac{\tau}{n})^n x - u(\tau)| + M \limsup_{\ell \rightarrow 0} |x - J_\lambda^\ell x|.$$

Faisant  $n_0 \rightarrow \infty$  et  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient bien le résultat.

Pour achever la preuve, nous suivons la première partie de la démonstration du théorème 2.1. de [9]. Notons d'abord, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in X$ , l'application  $\ell \in ]0, \ell_0[ \rightarrow F(\ell)^n x$  est continue puisque

$$\begin{aligned} |F(\ell)^{n+1} x - F(\ell_1)^{n+1} x| &\leq (1 + \omega\ell) |F(\ell)^n x - F(\ell_1)^n x| \\ &+ |F(\ell)F(\ell_1)^n x - F(\ell_1)F(\ell_1)^n x|. \end{aligned}$$

Aussi, supposant  $\lim_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)x - x| = 0$ , on a, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{\ell \rightarrow 0} |F(\ell)^n x - x| = 0$ , puisque

$$|F(\ell)^{n+1} x - x| \leq (1 + \omega\ell) |F(\ell)^n x - x| + |F(\ell)x - x|.$$

En conséquence, sous l'hypothèse (ii), la fonction  $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right)^n x$  est continue sur  $]0, \infty[$  et se prolonge par continuité en  $t = 0$  par  $u(0) = x$ .

Montrons enfin que sous l'hypothèse (ii),  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{\ell \rightarrow 0} |J_\lambda^\ell x - x| = 0$ . Fixons  $t > 0$  et posons

$$\alpha(t) = \sup \left\{ |F(\ell)^n x - x| ; \ell \in ]0, \ell_0[ , n \in \mathbb{N}, n\ell \leq t \right\}.$$

Etant donné  $\ell \in ]0, \ell_0[$  et  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n\ell \leq t$ , on a, d'après (10), en supposant  $\lambda\omega < 1$

$$\begin{aligned} (1 + \omega\ell) |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^{n-1} x| &\geq |F(\ell)J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| = \\ |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x + \frac{\ell}{\lambda} (J_\lambda^\ell x - x)| &\geq (1 + \frac{\ell}{\lambda}) |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| - \frac{\ell}{\lambda} \alpha(t) \geq \\ (1 + \omega\ell) |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| + (\frac{1}{\lambda} - \omega)\ell |J_\lambda^\ell x - x| &- (\frac{2}{\lambda} - \omega)\ell \alpha(t) \end{aligned}$$

d'où

$$|J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| + \frac{(\frac{1}{\lambda} - \omega)\ell}{1 + \omega\ell} |J_\lambda^\ell x - x| \leq |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^{n-1} x| + \frac{(\frac{2}{\lambda} - \omega)\ell}{1 + \omega\ell} \alpha(t)$$

soit par récurrence

$$\begin{aligned} |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| + \frac{(\frac{1}{\lambda} - \omega)n\ell}{1 + \omega\ell} |J_\lambda^\ell x - x| &\leq |J_\lambda^\ell x - x| + \frac{(\frac{2}{\lambda} - \omega)n\ell}{1 + \omega\ell} \alpha(t) \\ &\leq |J_\lambda^\ell x - F(\ell)^n x| + \left[ 1 + \frac{(\frac{2}{\lambda} - \omega)n\ell}{1 + \omega\ell} \right] \alpha(t) \end{aligned}$$

et donc en définitive

$$|J_{\lambda}^{\ell} x - x| \leq \frac{\lambda(1+\omega\ell) + (2-\omega\lambda)n\ell}{(1-\omega\lambda)n\ell} \alpha(t).$$

Appliquant avec  $n = \lfloor \frac{t}{\ell} \rfloor$ , on obtient donc

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \limsup_{\ell \rightarrow 0} |J_{\lambda}^{\ell} x - x| \leq \alpha(t) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda + (2-\omega\lambda)t}{(1-\omega\lambda)t} = 2 \alpha(t).$$

On achève en notant que  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$ .

En effet, supposons  $\epsilon = \limsup_{t \rightarrow 0} \alpha(t) > 0$ ; alors il existe  $\ell_k \in ]0, \ell_0[$ ,  $n_k \in \mathbb{N}$  tels que  $t_k = n_k \ell_k \rightarrow 0$  et  $|F(\ell_k)^{n_k} x - x| \geq \frac{\epsilon}{2}$ . Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ , alors  $F(\ell_k)^{n_k} x = F(\frac{t_k}{n_k})^{n_k} x \rightarrow u(0) = x$ ; si  $\liminf_{k \rightarrow \infty} n_k < \infty$ , on peut extraire une suite stationnaire  $n_k = n$ , alors  $F(\ell_k)^n x \rightarrow x$ . C.Q.F.D.

Donnons maintenant la

*Preuve du théorème 1.*

Considérons d'abord  $F(\ell) \in \mathcal{F}(C)$  vérifiant (i), c'est-à-dire  $A = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{I - F(\ell)}{\ell}$  existe dans  $\mathcal{M}$  et  $\overline{D(A)} = C$  et soit  $G(\ell) \in \mathcal{G}(C)$ ; on a  $G(\ell) F(\ell) \in \mathcal{F}(X)$ . Montrons d'abord que  $A - G'(0) \in \mathcal{M}$  et  $\frac{I - G(\ell)F(\ell)}{\ell} \rightarrow A - G'(0)$  dans  $\mathcal{M}$  lorsque  $\ell \rightarrow 0$ . D'abord, étant donné  $(x, y) \in A$  et  $\lambda > 0$  suffisamment petit,

$$x_{\ell} = J_{\lambda}^{\ell}(x + \lambda y) \rightarrow x \text{ lorsque } \ell \rightarrow 0$$

$$\frac{x_{\ell} - F(\ell)x_{\ell}}{\ell} = \frac{x - x_{\ell}}{\ell} + y \rightarrow y \text{ lorsque } \ell \rightarrow 0$$

$$\frac{x_{\ell} - G(\ell)F(\ell)x_{\ell}}{\ell} = \frac{x_{\ell} - F(\ell)x_{\ell}}{\ell} - \left(\frac{G(\ell)-1}{\ell}\right) F(\ell)x_{\ell} \rightarrow y - G'(0)x.$$

Ceci montre que  $A - G'(0) + \omega I$  est accréatif pour  $\omega$  suffisamment grand; aussi pour tout  $\lambda > 0$  avec  $\lambda\omega < 1$ ,

$$\left( I + \frac{\lambda}{\ell}(I - G(\ell)F(\ell)) \right)^{-1} x \rightarrow (I + \lambda(A - G'(0)))^{-1} x \text{ lorsque } \ell \rightarrow 0$$

pour tout  $x \in R(I + \lambda(A - G'(0)))$ .

Il reste à prouver que  $A - G'(0) \in \mathcal{M}$ ; d'après [8], il suffit de montrer que pour tout  $(x, y) \in C \times X$  et  $\lambda_0 > 0$  suffisamment petit,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \text{dist}(x, R(I + \lambda(I + \lambda_0(A - G'(0)) - y))) = 0.$$

Prenant  $x_\lambda = G\left(\frac{\lambda_0 \lambda}{1+\lambda}\right)\left(\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}\right)$ , on a, en utilisant  $J_{\frac{\lambda_0 \lambda}{1+\lambda}}^A x_\lambda \in D(A)$ ,

$$\text{dist}(x, R((1+\lambda)(1+\lambda_0(A-G'(0))-y))) \leq |x+\lambda y - (1+\lambda)x_\lambda + \lambda \lambda_0 G'(0) J_{\frac{\lambda_0 \lambda}{1+\lambda}}^A x_\lambda|.$$

Mais  $x_\lambda = \frac{x+\lambda y}{1+\lambda} + \frac{\lambda_0 \lambda}{1+\lambda} G'(0)x + 0(\lambda)$  et  $J_{\frac{\lambda_0 \lambda}{1+\lambda}}^A x_\lambda \rightarrow x$  d'où le résultat.

Appliquant les implications (i)  $\Rightarrow$  (ii) des Propositions 1 puis 2, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( G\left(\frac{t}{n}\right) F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^N x = S^{A-G'(0)}(t)x \text{ pour tout } x \in C \text{ uniformément} \\ \text{pour } t > 0 \text{ borné.}$$

Maintenant étant donné  $x \in C$ ,

$$S^{A-G'(0)}(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right) \left[ G\left(\frac{t}{n}\right) F\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F\left(\frac{t}{n}\right) G\left(\frac{t}{n}\right) \right)^N F\left(\frac{t}{n}\right)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( F\left(\frac{t}{n}\right) G\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n x.$$

Supposons maintenant (ii). Appliquant (ii)  $\Rightarrow$  (i) des Propositions 2 puis 1, on a immédiatement (i). ■

## REFERENCES

- [1] BARBU V. «*Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*». Noordhoff International Publishing, 1976.
- [2] BENILAN Ph. «*Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*». Thèse, Orsay, 1972.
- [3] BENILAN Ph. «*Evolution equations and accretive operators*». Lecture notes, Spring 1981, University of Kentucky, Lexington.
- [4] BENILAN Ph., CRANDALL M.C., PAZY A. «*Evolution equations governed by accretive operator*». Livre à paraître.
- [5] BREZIS H., PAZY A. «*Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces*». J. Funct. Ana. 9, 1972, 63-74.
- [6] CRANDALL M.C., LIGGETT T. «*Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces*». Amer. J. Math. 93, 1971, 265-298.
- [7] CRANDALL M.C., LIGGETT T. «*A theorem and a counterexample in the theory of semigroups of nonlinear transformations*». Trans. of the Amer. Math. Soc., vol 160, 1971, 263-278.
- [8] KOBAYASHI Y. «*Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups*». J. Math., Soc. Japan, vol. 27, n<sup>o</sup> 4, 1975.
- [9] REICH S. «*Product formulas, nonlinear semigroups and accretive operators*». J. Funct Ana. 36, 1980, 147-168.
- [10] BREZIS H. «*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*». Amsterdam, North-Holland Publ. Co, 1973.

(Manuscrit reçu le 16 avril 1985)