ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

WITOLD MOZGAWA

Structures holomorphiquement projectives III. Structures plates et invariantes sur des variétés homogènes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 2 (1989), p. 171-191

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_2_171_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°2, 1989

Structures holomorphiquement projectives III. Structures plates et invariantes sur des variétés homogènes

WITOLD MOZGAWA[1]

RÉSUMÉ. — On montre que l'ensemble de HP – structures invariantes et plates sur un espace homogène $M = G/K$ est en bijection avec l'ensemble de certain homomorphismes des algèbres de Lie, comme application on décrit les telles HP – structures sur une présentation réelle $SL_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C})$ du groupe $SL(2, \mathbf{C})$.

ABSTRACT. — There is proved that a set of the invariant and flat HP - structures on a homogeneous space $M = G/K$ is in bijection with a set of certain homomorphisms of Lie algebras. As an application, all such structures on a real presentation $SL_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C})$ of the group $SL(2, \mathbf{C})$ are described.

Mots clés : G – structure, connexion, connexion de Cartan, représentation d'algèbre de Lie.

Classification AMS : 53 C 10

0. Introduction

Ce travail fait suite aux deux papiers [Mo.1] et [Mo.2] et constitue une extension du premier dans le cas des HP – structures invariantes et plates sur des variétés homogènes. Le but de ce papier est de démontrer que l'ensemble de telles HP – structures sur un espace homogène $M = G/K$ est en bijection avec l'ensemble de certains homomorphismes des algèbres de Lie $\underline{\underline{g}} \to hp(n+2)$.

Ce résultat peut être considéré comme une généralisation naturelle de la théorie des connexions affines invariantes (cf. [Wa]). Comme application de

(1) UMCS, Instytut Matematyki, Pl. M. Curie – Sklodowkiej 1, 20-031 Lublin, Pologne

ce théorème on décrit entièrement les HP – structures invariantes et plates sur une présentation réelle $SL_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C})$ du groupe $SL(2, \mathbf{C})$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les variétés sont de dimension ≥ 4 et nous nous plaçons dans la catégorie C^{∞}.

Tout ce papier a été écrit entiérement pendant mon séjour de six mois à l'Université de Lille organisé par Monsieur le Professeur J.P.Brasselet que je remercie très chaleureusement. Je lui suis très reconnaissant de la création des telles conditions à Lille qui m'ont permises de mener à la fin ce travail. Je suis reconnaissant de l'intérêt amical que m'a montré l'équipe de Géométrie et Topologie de l'UFR de Mathématiques de Lille I.

1. Preliminaires

Soit F un opérateur presque complexe (intégrable) sur l'espace réel $\mathbf{R}^n$. Donc

$$\widetilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & F & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

est un nouveau opérateur presque complexe associé à l'espace $\mathbf{R}^{n+2}$. L'ensemble de tous les plans invariants par $\widetilde{F}$ est une variété notée $G(n+2,2)$ qui est, en fait, une présentation réelle de $\mathbf{C}P^{n/2}$. Les éléments A de $GL(n+2,\mathbf{R})$ tels que $A\widetilde{F} = \widetilde{F}A$ forment un sous-groupe fermé $\widetilde{HP}(n+2)$ dont les éléments sont les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & u & b \\ \xi & B & F\xi \\ -b & -uF & a \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

où u est un n–vecteur–ligne, ξ est un n–vecteur–colonne et $B \in GL(n,\mathbf{R})$ commute avec F. Dans $\widetilde{HP}(n+2)$, considérons un sous-groupe fermé distingué $\widetilde{H}$ formé des matrices

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha I + \beta F & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

dont les éléments transforment les représentants d'un point de $G(n+2,2)$ en représentants du même moint. Le groupe $HP(n+2) = \widetilde{HP}(n+2)/\widetilde{H}$

devient donc un groupe transitif de transformations de $G(n+2,2)$ et le groupe d'isotropie $H = \widetilde{\widetilde{H}}/\widetilde{H}$ est donné par les matrices

$$\begin{bmatrix} a & u & b \\ 0 & B & 0 \\ -b & -uF & a \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

ceci signifie que $G(n+2,2) = HP(n+2)/H$. Soient

$$\begin{aligned} m &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & F\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{h}\,, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{h}\,, \\ m^* &= \begin{bmatrix} 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -uF & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{h} \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\widetilde{h}$ est l'algèbre de Lie de $\widetilde{H}$. Alors l'algèbre de Lie $hp(n+2)$ de $HP(n+2)$ est donnée par la somme directe $hp(n+2) = m + g + m^*$.

Soient M une variété et P^2M son fibré principal des repères de deuxième ordre, de groupe structural L_n^2. Une HP – structure P sur M est une réduction du groupe structural à un groupe H_n^2 isomorphe à H. Lorsqu'on choisit une base naturelle de $hp(n+2)$, une connexion de Cartan [cf. Ko.2] sur P peut être représentée comme $\omega = \omega^i + \omega^i_j + \omega_j$, $\quad i,j = 1,\dots n$. Pour une telle connexion on a les équations de structure suivantes :

$$\begin{aligned} d\omega^i &= -\omega^i_k \wedge \omega^k + \Omega^i \\ d\omega^i_j &= -\omega^i_t \wedge \omega^t_j - \omega^i \wedge \omega_j + \delta^i_j \omega_t \wedge \omega^t - \omega_s F^s_t \wedge \omega^t F^i_j \\ &\quad + F^i_t \omega^t \wedge \omega_s F^s_j + \Omega^i_j \\ d\omega_j &= -\omega_i \wedge \omega^i_j + \Omega_j\ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Les formes (Ω^i_j, Ω_j) sont dites formes de courbure de ω et (Ω^i) formes de torsion. Soient (θ^i, θ^i_j) les formes canoniques restreintes sur P. On démontre qu'il existe une connexion de Cartan unique sur P dite normale satisfaisant $\omega^i = \theta^i$, $\omega^i_j = \theta^i_j$ et certaines conditions sur la courbure (Ω^i_j, Ω_j). Cette connexion de Cartan normale jouera un rôle essentiel dans ce papier ainsi que les équations de structure. Sur la variété M on a une structure presque complexe F supposée intégrable; alors on peut se servir de la réduction $P^1_F M$ du fibré des repères linéaires. Chaque connexion linéaire Γ sans torsion sur $P^1_F M$ rendant F parallèle est dite une connexion complexe. Elle définit donc une certaine HP – structure P sur M. Deux telles connexions ω^i_j, ω'^i_j définissant une même HP – structure P sur la variété M sont liées par

$$\omega'^i_j - \omega^i_j = \theta^i a_j + \theta^k a_k \delta^i_j - a_p F^p_t \theta^t F^i_j - F^i_t \theta^t a_z F^z_j \tag{1.7}$$

où a est une fonction sur $P^1_F M$ à valeurs dans m^* telle que

$$a(u \cdot g) = a(u) \cdot g \tag{1.8}$$

pour chaque $u \in P^1_F M$ et $g \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$.

C'est-à-dire que ces connexions sont HP – liées. De plus, il existe un fibré $P^2_F M$ et une application $\gamma : P^1_F M \to P^2_F M$ telle que $\gamma^* \theta^i$ est la forme canonique sur $P^1_F M$ et $\gamma^* \theta^i_j$ est une forme de connexion Γ définissant la HP – structure P.

Dans ce chapitre nous nous sommes référés aux résultats antérieurs donnés en détails dans [Mo.1].

2. HP – Structures invariantes et plates sur des variétés homogènes.

Soient une variété homogène $M = G/K$ et P une HP – structure sur M, de connexion de Cartan normale $\omega = \omega^i + \omega^i_j + \omega_j$. Supposons cette structure invariante, c'est-à-dire telle que l'action à gauche $L_g : M \to M$ soit une HP – transformation pour chaque $g \in G$ (cf. [Mo.1]). Dans tout ce qui suit, nous fixons un repère $u \in P$, au point $0 = K \in G/K = M$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow P \\ g &\longmapsto (L_g)_*(u) \end{aligned} \tag{2.1}$$

d'où

$$h^*_u(\omega) = h^*_u(\omega^i + \omega^i_j + \omega_j) \tag{2.2}$$

définit une application $\underline{\underline{g}} \to hp(n+2)$ de l'algèbre de Lie du groupe G dans l'algèbre de Lie $hp(n+2)$.

THÉORÈME 2.1.— *L'application $h^*_u(\omega) : \underline{\underline{g}} \to hp(n+2)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si la HP – structure invariante P sur $M = G/K$ est plate (c'est-à-dire si $(\Omega^i_j, \Omega_j) = 0$).*

Démonstration. — La condition est suffisante. En effet considérons $(h_u^*\omega)([X,Y])$ pour chaque $X, Y \in \underline{\underline{g}}$. Les formules suivantes résultent de (1.6).

$$\begin{aligned}
(h_u^*\omega^i)([X,Y]) &= [(h_u^*\omega_k^i)(X), (h_u^*\omega^k)(Y)] - \\
&\quad - [(h_u^*\omega_k^i)(Y), (h_u^*\omega^k)(X)] \\
(h_u^*\omega_j^i)([X,Y]) &= [(h_u^*\omega_k^i)(X), (h_u^*\omega_j^k)(Y)] + \\
&\quad + [(h_u^*\omega^i)(X), (h_u^*\omega_j)(Y)] - \\
&\quad - [(h_u^*\omega^i)(Y), (h_u^*\omega_j)(X)] \\
(h_u^*\omega_j)([X,Y]) &= [(h_u^*\omega_k)(X), (h_u^*\omega_j^k)(Y)] - \\
&\quad - [(h_u^*\omega_k)(Y), (h_u^*\omega_j^k)(X)] \ .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

D'où

(2.4)
$$h_u^*(\omega)([X,Y]) = h_u^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j)([X,Y]) =$$
$$[h_u^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j)(X), h_u^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j)(Y)] = [h_u^*(\omega)(X), h_u^*(\omega)(Y)] \ .$$

Reste à montrer que la condition est nécessaire. On a

$$h_u^*(\Omega^i + \Omega_j^i + \Omega_j)(X,Y) = 0 \tag{2.5}$$

pour chaque $Xp\mathbb{X}p\in \underline{\underline{g}}$. Comme la connexion de Cartan est normale on a $\Omega^i = 0$. Donc $h_u^*\Omega_j^i(X,Y) = 0$ pour chaque $X, Y \in \underline{\underline{g}}$. Alors d'après la proposition 2.2 dans [Mo.1] $\Omega_j = 0$. Donc la HP – structure P est plate. ∎

Maintenant nous allons donner quelques notations utilisées dans la suite :

a) Soient $\pi_2 : P \to P_F^1 M$ et $\pi : G \to G/K$ les projections naturelles. Alors l'application

$$\varphi(X) = [\pi_2(u)]^{-1}(\pi_*(X)) \ , \qquad X \in \underline{\underline{g}} \tag{2.6}$$

peut être exprimée par

$$\varphi^i = \theta^i \circ (\pi_2)_* \circ h_* \ . \tag{2.7}$$

b) La représentation d'isotropie du groupe K dans $H(= H_n^2)$ est notée $iso : K \to H_n^2$. On note p la projection naturelle $p : H_n^2 \to GL_R(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$ et $\rho_0 = p \circ iso$ la composition naturelle donnant la représentation linéaire d'isotropie ρ_0.

c) De même $h_m + h_g + h_{m^*} = h_u^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j)$ selon les valeurs prises par $h_u^*(\omega)$.

PROPOSITION 2.2.— *Soient P une HP – structure invariante et plate sur une variété homogène $M = G/K$ et $h_u^*(\omega) = h_m + h_g + h_{m^*}$ l'homomorphisme associé comme ci-dessus.*

Alors

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} &1)\ h_m = \varphi \\ &2)\ h_m|\underline{\underline{k}} \equiv 0 \\ &3)\ h_g|\underline{\underline{k}} = (\rho_0)_* \end{aligned}$$

Démonstration.—

1) Soit $X \in \underline{\underline{g}}$. Alors

$$(2.9) \qquad h_m(X) = (h_u^*\omega^i)(X) = \theta^i \circ (\pi_2)_* \circ h_*(X) = \varphi(X)$$

puisque ω est normale.

2) et 3) Soit $X \in \underline{\underline{k}}$. Alors $h_u^*(X)$ est la valeur du champ fondamental définit par $(iso)_*(X)$ au point $u \in P$. Donc $(h_u^*)(\omega)(X) \in g + m^*$. Notons $h_u^*(X) = (A_j^i, A_j)$. D'autre part $(iso)_*(X) = (A_j^i, A_j)^*$, le champ fondamental associé à (A_j^i, A_j). Donc $h_g|\underline{\underline{k}} = p \circ (iso)_* = (\rho_0)_*$. ∎

DÉFINITION 2.3.— *Un homomorphisme vérifiant les conditions 1), 2), 3) de la proposition 2.2 sera dit un HP – homomorphisme.*

Choisissons pour l'instant un autre point $u' \in P$ tel que $\pi_2(u) = \pi_2(u')$ $(= \widetilde{u}) \in P_F^1 M$ et considérons l'homomorphisme $h_{u'}^*(\omega) : g \to h(n+2)$ qui est, par ailleurs, un HP – homomorphisme. On va établir un lien entre $h_u^*(\omega)$ et $h_{u'}^*(\omega)$. Une réponse précise est fournie par un calcul de

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} h_{u'}^*(\omega) - h_u^*(\omega) &= h_{u'}^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j) - h_u^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j) = \\ &= h_u^*(R_{g'}^*(\omega^i + \omega_j^i + \omega_j) - (\omega^i + \omega_j^i + \omega_j)) \end{aligned}$$

où $g' \in H_u^2$ est tel que $R_{g'} u = u'$, ce qui donne

$$(2.11) \quad (h_{u'}^*)(\omega_j^i) - (h_u^*)(\omega_j^i) = (\varphi^i v_j - F_t^i \varphi^t \cdot v_z F_j^z + v_t \varphi^t \delta_j^i - v_z F_t^z \varphi^t \cdot F_j^i)_{|u}$$

pour un $v \in m^*$. On a donc le

THÉORÈME 2.4.— *Soient P une HP - structure invariante et plate sur une variété homogène $M = G/K$ et $u, u' \in P$ tel que $\pi_2(u) = \pi_2(u')$. Alors pour $h_u^*\omega$ et $h_{u'}^*\omega$ on a*

$$h_g(u') - h_g(u) = (\varphi \cdot v - F\varphi \cdot vF + v\varphi I - vF\varphi \cdot F)_{|u} \tag{2.12}$$

pour un certain $v \in m^* = \mathbf{R}^n$ dépendant de $g' \in H_n^2$ et tel que $u' = R_{g'}u$.

La même démonstration nous donne le

COROLLAIRE 2.5.—

$$h_{m^*}(u') - h_{m^*}(u) = (-vh_g - vh_m \cdot v + vFh_m \cdot vF)_{|u} \tag{2.13}$$

Dans l'ensemble de tous les HP – homomorphismes on introduit une relation d'équivalence R définie par (2.12). Cette relation d'équivalence permet de définir l'application

$$\begin{aligned} A :&\{\ HP - \text{structures plates et invariantes sur } M = G/K\} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \{\ \text{classes d'équivalence de } R\} \end{aligned} \tag{2.14}$$

dont nous allons montrer qu'elle est bijective.

Injectivité de A

Soient P et P' deux HP – structures plates et invariantes sur une variété homogène $M = G/K$. Soient $\widetilde{\omega}_j^i = \gamma^*\theta_j^i$, $\widetilde{\omega}'^i_j = (\gamma')^*\theta_j^i$ deux connexions complexes déterminant les structures P et P' (cf. théorème 5.1 dans [Mo.1]). Soient $u \in P$ et $u' \in P'$ tels que pour $\pi_2 : P \to P_F^1M$ et pour $\pi_2' : P_F^1M$ on a $\pi_2'(u') = \pi_2(u) = \widetilde{u} \in P_F^1M$ et supposons que $h_u^*(\omega)$ et $h_{u'}^*(\omega)$ sont HP – liées, c'est-à-dire satisfont (2.12).

Si on montre que $\widetilde{\omega}_j^i$ et $\widetilde{\omega}'^i_j$ sont HP – liées cela entrainera l'égalité $P = P'$.

Soit $\widetilde{h} : G \to P_F^1M$.

$$\widetilde{h}(g) = (L_g)_*(\widetilde{u})\ . \tag{2.15}$$

On notera π_1^2 la projection naturelle

$$\pi_1^2 : P_F^2M \longrightarrow P_F^1M\ . \tag{2.16}$$

LEMME 2.6.— *Soit P une HP - structure plate et invariante sur $M = G/K$ déterminée par une connexion complexe $\widetilde{\omega}^i_j$ sur $P^1_F M$, c'est-à-dire $\widetilde{\omega}^i_j = \gamma^* \theta^i_j$. Alors*

$$h_g(u)(X) = \widetilde{\omega}^i_j(\widetilde{h}_* X)_{|\widetilde{u}} \tag{2.17}$$

pour chaque $X \in \underline{\underline{g}} = T_e G$.

Démonstration.— Soit $Z \in T_u P$, alors

$$(\pi^2_1)^* \circ \gamma^*(\omega^i + \omega^i_j + \omega_j)(Z + A^*) \tag{2.18}$$

où A^* est un champ fondamental déterminé par un $A \in m^*$. On a

$$(\pi^2_1)^* \circ \gamma^*(\omega^i_j) = \omega^i_j \quad \text{en } u \in P\ . \tag{2.19}$$

En utilisant l'égalité $h^*_u \circ (\pi^2_1)^* = \widetilde{h}^*_{\widetilde{u}}$ on obtient

$$h_g(u) = \widetilde{h}^*(\omega^i_j) \quad \text{en} \quad e \in G\ . \tag{2.20}$$

Compte-tenu du lemme 2.6 on a au point $\widetilde{u} \in P^1_F M$

$$(\widetilde{\omega}'^i_j - \widetilde{\omega}^i_j)_{|\widetilde{u}} = (\theta^i \cdot \eta_j + \eta_t \theta^t \cdot \delta^i_j - (\eta_t F^t_z \theta^z) F^i_j - F^i_t \theta^t \cdot \eta_z F^z_j)_{|\widetilde{u}} \tag{2.21}$$

pour un $\eta \in m^*$.

Comme les HP - structures P et P' sont invariantes, alors pour chaque $a \in G$ et chaque $z \in P^1_F M$, il existe des fonctions $\rho(a)(z)$ et $\rho'(a)(z)$ à valeurs dans $m^* = \mathbf{R}^n$ et telles que :

$$(L^*_a \widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^i_j)_{|z} = (\theta^i \rho(a)_j + \rho(a)_t \theta^t \delta^i_j - \rho(a)_t F^t_p \theta^p \cdot F^i_j - F^i_t \theta^t \cdot \rho(a)_p F^p_j)_{|z} \tag{2.22}$$

et

$$\begin{aligned}(L^*_a \widetilde{\omega}'^i_j - \widetilde{\omega}'^i_j)_{|z} = (\theta^i \rho'(a)_j + \rho'(a)_t \theta^t \delta^i_j - \rho'(a)_t F^t_p \theta^p \cdot F^i_j -\\ - F^i_t \theta^t \cdot \rho'(a)_p F^p_j)_{|z}\end{aligned} \tag{2.23}$$

Il résulte de (2.21), (2.22) et (2.23) que

$$\rho(ab) = \rho(b) + L^*_b \rho(a) \tag{2.24}$$

et

$$\rho'(ab) = \rho'(b) + L_b^*\rho'(a) \tag{2.25}$$

pour chaque $a, b \in G$ et

$$\eta \cdot \rho_0(h)(\widetilde{u}) = \eta + (\rho(h) - \rho'(h))(\widetilde{u}) \tag{2.26}$$

pour chaque $h \in K$.

Comme chaque point z de $P_F^1 M$ peut être représenté par $L_a \circ R_g(\widetilde{u})$ où $a \in G$ et $g \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$, on peut s'en servir pour calculer $(\widetilde{\omega}_j^i - \widetilde{\omega}'^i_j)_{|z}$. Il en résulte que pour la fonction

$$P(z) = \eta \cdot g + \rho(a)(\widetilde{u}) \cdot g - \rho'(a)(\widetilde{u}) \cdot g \tag{2.27}$$

où $z = L_a \circ R_g(\widetilde{u})$, on a

$$(\widetilde{\omega}_j^i - \widetilde{\omega}'^i_j)_{|z} = (\theta^i \cdot P_j + \theta^t P_t \cdot \delta_j^i - P_t F_s^t \theta^s \cdot F_j^i - F_t^i \theta^t \cdot P_s F_j^s)_{|z} \tag{2.28}$$

En utilisant les propriétés des fonctions ρ et ρ' on démontre que cette construction ne dépend pas du choix de a et de g tels que $z = L_a \circ R_g(\widetilde{u})$ et que $P(z \cdot g) = P(z) \cdot g$ pour chaque $z \in P_F^1 M$ et chaque $g \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$.

Surjectivité de A

Soient $M = G/K$ une variété homogène; F une structure presque complexe (intégrable) et invariante par G. Alors on a un fibré $P_F^1 M$ invariant par $(L_g)_*$ pour chaque $g \in G$. La donnée d'une classe d'équivalence de $R : h_m + h_g + h_{m^*}$ entraîne l'existence d'un point $\widetilde{u} \in P_F^1 M$ tel que 1) de la proposition 2.2 est satisfait. Ayant ce point on peut définir l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : G &\longrightarrow P_F^1 M \\ g &\longmapsto (L_g)_*(\widetilde{u}) \,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ceci nous permettra de trouver une connexion complexe sur $P_F^1 M$ qui déterminera sur $M = G/K$ une HP – structure P invariante et plate. Posons

$$\widetilde{\omega}_j^i(\widetilde{h}_*(X))_{|\widetilde{u}} = (h_g)_j^i(X) \tag{2.30}$$

pour chaque $X \in \underline{\underline{g}}$. On va l'étendre à une connexion sur $P_F^1 M$ donnant la structure en question.

De manière générale, on a le

LEMME 2.7.— *L'homomorphisme $h_m + h_g + h_{m^*}$ étant donné, il existe une application unique $\xi : K \to m^*$ telle que*

$$h_g(Ad\,h) - Ad\,\rho_0(h)h_g = Ad\,\rho_0(h)[h_m, \xi(h)] \tag{2.31}$$

pour chaque $h \in K$. De plus, pour chaque $h, i \in K$, on a

$$\xi(h_i) = \xi(i) + \xi(h)\rho_0(i)\ . \tag{2.32}$$

PROPOSITION 2.8.— *Il existe une fonction de classe C^∞ pour chaque $g \in G$:*

$$F(g) : r^{-1}(0) \longrightarrow m^*\ , \tag{2.33}$$

où $r : P^1_F M \to M$ est la projection du fibré, telle que

$$F(k_1)\rho_0(j) + \xi(j) = F(k) \tag{2.34}$$

dès que $k_1 j = k$, $j \in K$ et

$$F(k)(u \cdot g) = F(k)(u) \cdot g \quad \textit{pour } g \in GL_{\mathbf{R}}(\tfrac{n}{2}, \mathbf{C})\ . \tag{2.35}$$

Démonstration.— Soient $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert localement fini qui trivialise le fibré $\pi : G \to G/K$ et $\{f_\alpha\}$ une partition de l'unité subordonnée. Posons

$$\underset{\alpha}{F}(g)(\widetilde{u}) = -\xi(a) \tag{2.36}$$

où $g = \sigma_\alpha(x) \cdot a$ at σ_α est une section au-dessus U_α. Soit $x = \pi(g) \in U_\alpha \cap U_\beta$ alors il existe une fonction $g \to g_{\alpha\beta}(g) \in H$ telle que

$$\exp \underset{\alpha}{F}(g) = \exp \underset{\beta}{F}(g) \circ g_{\alpha\beta}(g) \tag{2.37}$$

où

$$g_{\alpha\beta}(g) = \exp(\underset{\alpha}{F}(g) - \underset{\beta}{F}(g))\ . \tag{2.38}$$

Par un calcul direct on peut voir que

$$g_{\alpha\beta}(g \cdot i) = \mathrm{Ad}\; iso^{-1}(i) g_{\alpha\beta}(g) \tag{2.39}$$

pour chaque $i \in K$.

Définissons $F(g)(\widetilde{u})$ par

$$\exp F(g)(\widetilde{u}) = \exp \underset{\alpha}{F}(g) \cdot \exp\Big[\sum_{\beta} f_\beta(\pi(g))(\underset{\alpha}{F}(g) - \underset{\beta}{F}(g))\Big] . \tag{2.40}$$

Par un calcul utilisant également les définitions on obtient

$$F(g_1 i) = \xi(i) + F(g) \cdot \rho_0(i) \tag{2.41}$$

pour $g_1 i = g$ où $g_1, g \in G$ et $i \in K$. ∎

Maintenant on se propose de construire une connexion complexe sur $P^1_F M$. Considérons un vecteur $Z \in T_u(P^1_F M)$. Pour un $g \in G$ et un $a \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$ on a

$$\widetilde{u} = (L_g)_* \circ R_a u \;, \tag{2.42}$$

si $\widetilde{h}$ denote

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : G &\longrightarrow P^1_F M \\ g &\longmapsto (L_g)_*(\widetilde{u}) \end{aligned} \tag{2.43}$$

on obtient alors :

$$(L_g)_* \circ (R_a)_* Z = \widetilde{h}_*(X) + A^*_{\widetilde{u}} \tag{2.44}$$

pour un $X \in \underline{\underline{g}}$ et pour un $A \in \underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$.

On pose

$$\begin{aligned} \omega^i_j(Z)_{|u} = {} & \mathrm{Ad}(a)((h_g)^i_j(X) + A^i_j + \\ & + (h_m)^i(X) F_j(g^{-1})(\widetilde{u}) + F_t(g^{-1})(\widetilde{u})(h_m)^t(X)\delta^i_j - \\ & - F^i_t(h_m)^t(X) F_p(g^{-1})(\widetilde{u}) - F_p(g^{-1}) F^p_t(h_m)^t(X) F^i_j) \;. \end{aligned} \tag{2.45}$$

a) $\omega^i_j(Z)_{|u}$ ne dépend pas du choix de X et de A. Soit

$$\widetilde{h}_*(X) + A^*_{\widetilde{u}} = \widetilde{h}_*(Y) + B^*_{\widetilde{u}} \tag{2.46}$$

On a

$$\widetilde{h}_*(X-Y) = (B^* - A^*)_{\widetilde{u}} \tag{2.47}$$

Donc $X - Y \in \underline{\underline{k}}$ et

$$\rho_0(X-Y) = B - A = h_g(X-Y) \tag{2.48}$$

d'où

$$(h_g)^i_j(X) + A^i_j = (h_g)^i_j(X) + B^i_j \ .$$

b) $\omega^i_j(Z)_{|u}$ ne dépend pas du choix de g et de a. Soit

$$\widetilde{u} = (L_g)_* \circ R_a u = (L_{g1})_* \circ R_b = u$$

pour $g, g_1 \in G$ et $a, b \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, \mathbf{C})$. D'où $g_1 g^{-1} = j \in K$ et $iso(j) = b^{-1}a$. On écrit donc

$$(L_{g_1})_*(R_b)_*(Z) = \widetilde{h}_*(U) + C^*_{\widetilde{u}} \tag{2.49}$$

où $U = \mathrm{Ad}(j)X$ et $C = \mathrm{Ad}(\rho_0(j))A$.

En sachant que

$$F(g^{-1}) = F(g_1^{-1}j) = F(g^{-1}) \cdot \rho_0(j) + \xi(j) \tag{2.50}$$

on montre que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(b)[h^i_j(U) + C^i_j + (h_m)^i(U)F_j(g_1^{-1}) + F_t(g_1^{-1})(h_m)^t(U)\delta^i_j \\ &- F^i_t(h_m)^t(U)F_p(g_1^{-1})F^p_j - F_p(g_1^{-1})F^p_t(h_m)^t(U)F^i_j] \\ &= \mathrm{Ad}(b)[h^i_j(X) + A^i_j + (h_m)^i(X)F_j(g^{-1}) \\ &+ F_t(g^{-1})(h_m)^t(X)\delta^i_j - F^i_t(h_m)^t(X)F_p(g^{-1})F^p_j \\ &- F_p(g^{-1})F^p_z(h_m)^z(X)F^i_j] \end{aligned} \tag{2.51}$$

c) la connexion ω^i_j est sans torsion : soient $Z_1, Z_2 \in T_u P^1_F M$ et

$$\begin{aligned} (L_g)_*(R_a)_* Z_1 &= \widetilde{h}_*(X_1) + A^*_{1\widetilde{u}} \\ (L_g)_*(R_a)_* Z_2 &= \widetilde{h}_*(X_2) + A^*_{2\widetilde{u}} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Un calcul de $T^i = d\theta^i + \omega^i_j\theta^j - \omega_j\theta^j$ nous donne :

$$\begin{aligned} &\omega^i_j(\widehat{Z}_1)\theta^j(\widehat{Z}_2) - \omega^i_j(\widehat{Z}_2)\theta^j(\widehat{Z}_1) = \\ &= a[(h_g)^i_j(X_1)(h_m)^j(X_2) - (h_g)^i_j(X_2)(h_m)^j(X_1) + \\ &+ A_1{}^i_j(h_m)^j(X_2) - A_2{}^i_j(h_m)^j(X_1)] == d\theta^i(Z_1, Z_2) \ . \end{aligned} \tag{2.53}$$

où $\widehat{Z}_1, \widehat{Z}_2$ dénotent les extensions naturelles de Z_1, Z_2. Il en résulte que $T^i \equiv 0$.

d) la HP – structure P sur M déterminée par ω^i_j est invariante

LEMME 2.9.— *Dans les conditions de ce paragraphe, il existe une fonction $F : G \times P^1_F M \to m^*$ telle que*

(2.54) 1) $$F(h)(z \cdot a) = F(h)(z) \cdot a$$

pour chaque $h \in G$, $z \in P^1_F M$ et $a \in GL_{\mathbf{R}}(\frac{n}{2}, C)$ et

(2.55) 2) $$F(gh)(z) = F(h)(z) + F(g)((L_h)_*(z))$$

pour chaque $z \in P^1_F M$ et $g, h \in G$.

Démonstration.— Soit

(2.56) $$F(h)((L_{g^{-1}})_* \widetilde{u} := (F(hg^{-1}) - F(g^{-1}))(\widetilde{u}) \; .$$

Donc 1) et 2) en découlent immédiatement. ∎

En utilisant ce lemme et les définitions précédentes on obtient

(2.57) $$\begin{aligned} &(L^*_h)\omega^i_j - \omega^i_j = \theta^i \cdot F_j(h) + F_t(h)\theta^t \cdot \delta^i_j - \\ &-F^i_t \theta^t F_p(h) F^p_j - F_p(h) F^p_j \theta^i F^i_j \end{aligned}$$

quelque soit $h \in G$, ce qui montre que la structure en question est G – invariante.

e) La HP – structure P est plate. Tous les points ci–dessus permettent de montrer que l'unique connexion de Cartan sur P satisfait les conditions de la connexion plate.

Ce qui achève la démonstration du théorème principal

THÉORÈME 2.10.— *L'application A est bijective.*

III. HP – structures invariantes et plates sur G/K déterminées par des connexions complexes G – invariantes.

Soit $\widetilde{\omega}^i_j$ une connexion complexe sur une variété homogène $M = G/K$ telle que la HP – structure P déterminée soit plate et invariante. Soit f

un représentant de la classe des HP – homomorphismes associés à cette connexion. Donc du théorème 2.10 découlent les deux lemmes suivants :

LEMME 3.1.— *Si* $iso(j) = \rho_0(j)$ *pour* $j \in K$ *alors il existe une connexion complexe unique* $\widetilde{\omega}^i_j$ *invariante par l'action de* G *déterminant le même homomorphisme* f.

Démonstration.— En vertu du lemme 2.7 on a :

$$iso(j) = \rho_0(j)\exp(F(j)(\widetilde{u})) \ . \tag{3.1}$$

Il en résulte que $f \equiv 0$. Donc la formule (2.57) nous montre que la connexion construite dans le chapitre précédent est invariante. S'il y avait deux telles connexions $\widetilde{\omega}^i_j$ et $\widetilde{\omega}'^i_j$, les homomorphismes f et f' qu'elles déterminent seraient égaux. Donc on aurait l'égalité $\widetilde{\omega}^i_{j\,|\widetilde{u}} = \widetilde{\omega}'^i_{j\,|\widetilde{u}}$. Puisque la connexion invariante est uniquement déterminée par sa valeur en $\widetilde{u}$, il n'y a qu'une telle connexion. ∎

De la même manière on démontre le

COROLLAIRE 3.2.— *Soit* P *une* HP *– structure plate et invariante sur une variété homogène* $M = G/K$. *La structure* P *est déterminée par une connexion complexe,* G *– invariante si et seulement si dans la classe d'équivalence des* HP *– homomorphismes déterminant* P *il en existe un noté* f *tel que* $f(X) = (\rho_0)_*(X) \in g$ *pour chaque* $X \in \underline{\underline{k}}$.

IV. Étude d'un exemple

Ce chapitre sera consacré à l'étude des HP – structures sur une forme réelle $SL_{\mathbf{R}}(2,\mathbf{C})$, du groupe $SL(2,\mathbf{C})$, traitée comme une variété homogène, avec $K = \{e\}$. L'algèbre de Lie $\underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2,C)$ de ce groupe est donnée par la base

(4.1)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la structure presque complexe (intégrable) est donnée par

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

On a $Fe_1 = e_4$, $Fe_2 = e_5$, $Fe_3 = e_6$. On introduira la notion d'un HP – homomorphisme pur.

DÉFINITION 4.1.— *Une représentation* $\widetilde{h} : \underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C}) \to \underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(4, \mathbf{C})$ *est dite un* HP *– homomorphisme pur si elle est donnée par des matrices telles que* $a_{11} = a_{18} = a_{81} = a_{88} = 0$ *et si, composée avec la projection naturelle* $\underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(4, \mathbf{C}) \to hp(8)$, *elle donne un* HP *– homomorphisme.*

Remarque 4.2.— Cette définition peut être donnée de manière générale (ainsi que les lemmes suivants mais nous nous contenterons d'étudier le cas particulier de $SL(2, \mathbf{C})$.

D'après le corollaire 2.5, on peut trouver un autre représentant $\widetilde{h}$ du même HP – homomorphisme h en choisissant un $v \in m^*$ et on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_m &= h_m \\ \widetilde{h}_g &= h_g + h_m v - Fh_m \cdot vF + vh_m I - (vFh_m) \cdot F \\ \widetilde{h}_{m^*} &= h_{m^*} - vh_g - vh_m \cdot v + vFh_m \cdot vF\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

LEMME 4.3.— *Il existe* $v \in m^* = \mathbf{R}^6$ *tel que l'application*

$$\begin{aligned} \widetilde{h} : \underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C}) &\longrightarrow \underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(4, \mathbf{C}) \\ X &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & h_{m^*}(X) & 0 \\ h_m(X) & h_g(X) & Fh_m(X) \\ 0 & -h_{m^*}(X)F & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

soit un HP *– homomorphisme pur.*

Démonstration. — Si on prend une base $(E_i)_{i=1,\dots,6}$ de $\underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C})$ telle que $\varphi(E_i) = n_i$ où $n_i = (0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^6$, alors on peut prendre pour v

$$\begin{aligned} v = \Big(& h_{m^*}(E_3)n_2 - h_{m^*}(E_2)n_3, \frac{1}{2}(h_{m^*}(E_2)n_1 - h_{m^*}(E_1)n_2), \\ & \frac{1}{2}(h_{m^*}(E_1)n_3 - h_{m^*}(E_3)n_1), h_{m^*}(E_6)n_2 - h_{m^*}(E_2)n_6, \\ & \frac{1}{2}(h_{m^*}(E_5)n_1 - h_{m^*}(E_1)n_5), \frac{1}{2}(h_{m^*}(E_1)n_6 - h_{m^*}(E_6)n_1)\Big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Alors (4.4) donne un HP – homomorphisme pur $\widetilde{h}$. ∎

On s'intéresse maintenant au problème "inverse" c'est-à-dire, étant donnée une représentation $\underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2,\mathbf{C}) \to \underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(4,\mathbf{C})$, où peut-on trouver une autre représentation conjuguée qui soit un HP – homomorphisme pur? On va démontrer qu'il existe en général un tel HP – homomorphisme pur.

LEMME 4.4.— *Soit* $\widetilde{h} : \underline{\underline{sl}}_{\mathbf{R}}(2,\mathbf{C}) \to \underline{\underline{gl}}_{\mathbf{R}}(4,\mathbf{C})$ *une représentation d'algèbre de Lie.*

1) S'il existe $g \in GL(8,\mathbf{R})$ *tel que* $g^{-1}\widetilde{h}g$ *soit un* HP *- homomorphisme pur, alors* g *s'écrit,*

$$g = (v, \widetilde{h}(e_1)v, \ldots, \widetilde{h}(e_6)v, \widetilde{F}v) \tag{4.6}$$

où $\widetilde{F}$ *est donné par (1.1) et* $v \in \mathbf{R}^8$.

2) Si pour un certain $v \in \mathbf{R}^8$, g *donné par (4.6), appartient à* $GL(8,\mathbf{R})$, *alors* $g^{-1}\widetilde{h}g$ *est un* HP *- homomorphisme pur.*

Démonstration.—

1) Pour $w = (1,0,0,0,0,0,0,0)$ on a

$$g^{-1}\widetilde{h}(e_i)g = (0, n_i, 0)\ , \qquad i = 1, \ldots, 6\ . \tag{4.7}$$

Donc il suffit de poser $u = gw$ pour avoir

$$g = (v, \widetilde{h}(e_1)v, \ldots, \widetilde{h}(e_6)v, *)\ . \tag{4.8}$$

Pour calculer l'astérisque on remarque que

$$g^{-1}\widetilde{h}(e_i)g\ \widetilde{F}w = (0, n_i, 0) \qquad i = 1, \ldots, 6\ . \tag{4.9}$$

donc $* = \widetilde{F}v$.

2) est évident puisque

$$g^{-1}\widetilde{h}(e_i)gw = g^{-1}\widetilde{h}(e_i)g\ Fw = (0, n_i, 0) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, 6\ . \tag{4.10}$$

∎

Maintenant on peut décrire toutes les HP – structures sur $SL_{\mathbf{R}}(2,\mathbf{C})$. Pour ceci il faut regarder les représentations de $SL(2,\mathbf{C})$ dans $GL(4,\mathbf{C})$, ce qui est donné en détail dans [We].

A) REPRÉSENTATIONS RÉDUCTIBLES

a)Représentations sans composantes triviales.

La seule telle représentation complexe est donnée par

$$\widetilde{h} = \begin{bmatrix} SL(2,C) & 0 \\ 0 & SL(2,C) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

donc, d'après les lemmes ci–dessus, on obtient le :

LEMME 4.5.— *Si une matrice g, donnée par (4.6), est non–singulière, alors le HP - homomorphisme pur $h = g^{-1}\widetilde{h}g$ ne dépend pas du vecteur $v \in \mathbf{R}^8$ définissant g et est toujours donné par les valeurs*

$$h(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$h(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.12)

$$h(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad h(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut trouver une connexion complexe définissant cette HP – structure unique, a savoir celle–ci est déterminée par la connexion

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \tag{4.13}$$

sur $SL_{\mathbf{R}}(2, \mathbf{C})$.

b) Représentations avec une composante triviale.

Si h est la somme d'une représentation 2–dimensionnelle irréductible et d'une composante triviale 2–dimensionnelle, alors, pour h, on doit avoir

$$h_{m^*}(e_i) = 0 \tag{4.14}$$

puisque $h_m(e_i) = n_i$, $i = 1, \dots, 6$. Donc alors

$$h(e_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_i & (\Gamma^t_{ip})_{t,p=1,\dots,6} & Fn_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

où les Γ^t_{ip} sont les coefficients d'une connexion complexe déterminant cette HP – structure. On note $\psi(e_i) = (\Gamma^t_{ip})_{t,p=1,\dots,6}$. Remarquons que

$$R_{e_i e_j} = [\psi(e_i), \psi(e_j)] - \psi([e_i, e_j]) \tag{4.16}$$

où $R_{e_i e_j} = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i, e_j]}$. Il en résulte que $R_{e_i e_j} = 0$ pour $i, j = 1, \dots, 6$, puisque h est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Ceci est impossible, car d'après [Ma, Ok] il n'existe pas de connexions invariantes et localement affines (c'est–à–dire $T \equiv 0$ et $R \equiv 0$) sur des groupes semi-simples réels. Donc il n'existe aucune HP – structure sur $SL_{\mathbf{R}}(2, C)$ donnée par une telle représentation.

B) REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

Il n'en existe qu'une seule (cf. [We]) donnant un nombre infini de structures différentes sur $SL_{\mathbf{R}}(2, C)$, dépendant de choix de $v \in \mathbf{R}^8$ tel que la matrice g associée soit non–singulière.

Par exemple un HP – homomorphisme pur, donné par le vecteur $v = (0,0,0,1,0,0,0,1)$ est

$$h(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$h(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.17)

$$h(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(e_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et la connexion complexe qui détermine cette HP – structure plate et invariante sur $SL_{\mathbf{R}}(2,\mathbf{C})$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
&-2\nabla_{e_2}e_3 = 2\nabla_{e_3}e_2 = 2\nabla_{e_5}e_6 = -2\nabla_{e_6}e_5 = e_1\\
&\nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{3}\nabla_{e_2}e_1 = \frac{1}{2}\nabla_{e_3}e_6 = -\nabla_{e_4}e_5 = -\frac{1}{3}\nabla_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}\nabla_{e_6}e_3 = e_2\\
&-\nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}\nabla_{e_2}e_5 = -\frac{1}{3}\nabla_{e_3}e_1 = \nabla_{e_4}e_6 =\\
&\qquad = -\frac{1}{2}\nabla_{e_5}e_2 = \frac{1}{3}\nabla_{e_6}e_4 = e_3\\
&-2\nabla_{e_2}e_6 = 2\nabla_{e_3}e_5 = -2\nabla_{e_5}e_3 = 2\nabla_{e_6}e_2 = e_4\\
&\nabla_{e_1}e_5 = -\frac{1}{3}\nabla_{e_2}e_4 = -\frac{1}{2}\nabla_{e_3}e_3 = \nabla_{e_4}e_2 = \frac{1}{3}\nabla_{e_5}e_1 = \frac{1}{2}\nabla_{e_6}e_6 = e_5\\
&\nabla_{e_1}e_6 = \frac{1}{2}\nabla_{e_2}e_2 = -\frac{1}{2}\nabla_{e_3}e_4 = -\nabla_{e_4}e_3 = -\frac{1}{2}\nabla_{e_5}e_5 =\\
&\qquad = -\frac{1}{2}\nabla_{e_6}e_1 = e_6\\
&\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_1}e_4 = \nabla_{e_4}e_1 = \nabla_{e_4}e_4 = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

L'étude des HP – structures plates et invariantes est ainsi achevée. De la même manière, en combinant le théorème 2.10 et la théorie des représentations des algèbres de Lie on pourrait, déterminer l'existence des HP – structures plates et invariantes sur des autres espaces homogènes.

Bibliographie

[Ad] ADO I.D. — The representation of Lie algebras by matrices, Uspehi. *Mat. Nauk (N.S.)* 2, N°6 (22), 1947, 159–173.

[Ag] AGAOOKA Y. — *Invariant flat projective structures on homogeneous spaces*, Hokkaido Math. J., XI 2, 1982, 125–172.

[Ca] CARTAN E. — Sur les variétés à connexion projective, Bull. *Soc. Math. France*, 52, 1924, 205–241.

[Jw] IWAHORI N. — *On real irreducible representations of Lie algebras*, Nagoya Math. J., 14, 1959, 59–83.

[Ja1] JACOBSON N. — Structure and automorphisms of semi-simple Lie groups in the large, *Ann. of Math.*, 40, 1939, 755–763.

[Ja2] JACOBSON N. — *Lie algebras*, Dover Publications Inc. New-York, 1970.

[Ko1] KOBAYASHI S. — *Canonical forms on frame bundles of higher order contact*, Proc. Symposia in Pure Math. Vol. 3. Diff. Geom. A.M.S., 1961, 186–193.

[Ko, Och] KOBAYASHI S., OCHIAI T. — Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, *Math. Ann.*, 249, 1980, 75–94.

[Ko, Na] KOBAYASHI S., NAGANO T. — *On projective connections*, J. Math. Mech., 13, 1964, 215–235.

[Ma, Ok] MATSUSHIMA H., OKAMOTO K.— *Non-existence of torsion free flat connections on a real semi-simple Lie group*, Hiroshima Math. J. 9, 1979, 59–60.

[Mo1] MOZGAWA W.— Homomorphically projective structures I. The connections, *An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi*, XXX, I, 1984'5, 55–68.

[Mo2] MOZGAWA W.— Holomorphically projective structures II. The transgressed classes, *Rend Circ. Nat. Palermo*, XXXIV, 1985, 192–201.

[Och] OCHIAI T.— Geometry associated with semi-simple flat homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152, 1970, 159– 193.

[Se] SERRE J.P..— *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W.A. Benjamin, Inc. New-York, 1966.

[Su, Wi] SULANKE R., WINTGEN P.— *Differentialgeometrie und Faserbündel*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

[Szy] SZYBIAK A.— Grassmannian connections, *Ann. Univ. Mariae Curie – Skłodowska*, XXVIII, 1974, 57–78.

[Wa] WANG H.C.— *On invariant connections over a principal fibre bundle*, Nagoya Math. J., 13, 1958, 1–19.

[We] WELLS R.O.— *Differential Analysis on Complex Manifolds*, GTM n°65, Springer Verlag 1979.

(Manuscrit reçu le 7 décembre 1987)