

FRANÇOIS NICOLEAU

DIDIER ROBERT

**Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 12, n° 2 (1991), p. 185-194

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1991\\_5\\_12\\_2\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_2_185_0)

© Université Paul Sabatier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique

FRANÇOIS NICOLEAU et DIDIER ROBERT<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Dans cet article, nous étudions des perturbations de l'opérateur de Laplace positif  $-\Delta$  sur  $\mathbb{R}^n$  de la forme :

$$H_{A,V} = \sum (D_j - A_j(x))^2 + V(x).$$

Dans le cas où  $V$  est à courte portée,  $A(x) = \sum A_j(x) dx_j$  à longue portée, mais la 2-forme  $dA$  étant à courte portée, nous comparons les opérateurs d'onde usuels de Moeller et les opérateurs d'onde modifiés suivant Isozaki-Kitada. Nous retrouvons ainsi un résultat de Loss-Thaller sur la complétude des opérateurs d'onde pour la paire  $(H_{A,V}, -\Delta)$ .

**ABSTRACT.** — In this paper, we study perturbations of the positive Laplace operator,  $-\Delta$ , in  $\mathbb{R}^n$  of the form :

$$H_{A,V} = \sum (D_j - A_j(x))^2 + V(x).$$

In case when  $V$  is short range,  $A(x) = \sum A_j(x) dx_j$  long range but the two form  $dA$  being short range, we compare the usual Moeller wave operators and the modified wave operators introduced by Isozaki-Kitada. We recover a result of Loss-Thaller on the completeness of the wave operators for the pair  $(H_{A,V}, -\Delta)$ .

---

### 1. Introduction

L'opérateur Hamiltonien quantique de Schrödinger décrivant l'interaction d'une particule avec un champ électrique  $\nabla V$  et un champ magnétique  $B$  est donné par l'opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  :

$$H_{A,V} = \sum (D_j - A_j(x))^2 + V(x),$$

---

<sup>(1)</sup> Département de Mathématiques, U.R.A. CNRS n° 758 - Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex, France

avec les notations :

- $D_j = -i\partial_{x_j}$ ;
- $A = \sum A_j dx_j$  est la 1-forme potentiel magnétique;
- $B = dA$  est la 2-forme champ magnétique, identifiée à la matrice antisymétrique  $(b_{jk})_{j,k}$ ,  $b_{jk}(x) = \partial_{x_j} A_k(x) - \partial_{x_k} A_j(x)$ , dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On suppose  $A, V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et vérifiant la propriété de décroissance :

$$(H_{\rho,\delta}) \begin{cases} \exists \rho > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0 \text{ tel que} \\ \langle x \rangle^{\rho+|\alpha|} |\partial_x^\alpha A_j(x)| + \langle x \rangle^{\delta+|\alpha|} |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, n \quad \left( \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2} \right). \end{cases}$$

Lorsque  $\rho > 1, \delta > 1$ , il est bien connu que  $H_{A,V}$  est une perturbation à courte portée de l'opérateur de Laplace sur  $\mathbb{R}^n$  :  $H_0 = -\Delta$ .

En particulier, les opérateurs d'onde de Moeller :

$$W^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_{A,V}} \cdot e^{-itH_0} \quad (1)$$

existent sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et sont complets, c'est-à-dire que les images de  $W^\pm$  coïncident avec le sous-espace spectral absolument continu  $\mathcal{H}_{ac}(H_{A,V})$  de  $H_{A,V}$  (pour ces notions, nous renvoyons à [RE-SI], t. 3).

Lorsque  $\delta \in ]0, 1]$  et  $A = 0$ , la formule (1) n'a a priori plus de sens, et on la remplace par l'introduction d'opérateurs d'onde modifiés. La première approche, historiquement, a été de remplacer  $e^{-itH_0}$  par une évolution libre modifiée, (cf. [DO], [HO], [PE], ...), la modification dépendant du temps.

Une deuxième approche consiste à introduire une modification des opérateurs d'onde indépendante du temps de la forme :

$$W_\Phi^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_{A,V}} J_\Phi e^{-itH_0} \quad (2)$$

où  $J_\Phi$  est un opérateur intégral de Fourier proche de l'identité, associé à une solution convenable  $\Phi$  de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$h_{A,V}(x, \partial_x \Phi(x, \xi)) = \xi^2, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3)$$

où  $h_{A,V}(x, \xi) = |\xi - A(x)|^2 + V(x)$  est le symbole (hamiltonien classique) associé à  $H_{A,V}$ .

Cette approche a été introduite par Isozaki-Kitada [IS-KI], dans le cas  $A = 0$ , et permet en particulier d'étudier en détails la matrice et l'amplitude de diffusion.

Dans la thèse [NI], l'un d'entre nous a montré que les constructions de [IS-KI] sont encore valides pour  $H_{A,V}$  avec  $A$  et  $V$  vérifiant  $(H_{\rho,\delta})$ , ce qui nous a permis d'établir l'existence et la complétude d'opérateurs d'onde modifiés du type  $W_{\Phi}^{\pm}$ .

Cependant, il faut noter que la condition  $(H_{\rho,\delta})$  dépend du choix de la jauge  $A$  et il serait donc plus naturel de faire des hypothèses sur le champ magnétique  $B$  en introduisant

$$(B_{\rho,\delta}) \quad \langle x \rangle^{1+\rho+|\alpha|} |\partial_x^\alpha B(x)| + \langle x \rangle^{\rho+|\alpha|} |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha.$$

$B$  étant donné, le problème est alors de choisir  $A$  vérifiant  $(H_{\rho,\delta})$  et tel que  $dA = B$ .

Uhlenbeck [UH], puis Loss et Thaller [LO-TH] ont remarqué que l'on pouvait choisir  $A$  vérifiant la condition de transversalité :

$$A(x) \cdot x = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{T})$$

$A$  est alors complètement déterminé par  $B$  et est donné par :

$$A(x) = - \int_0^1 s B(sx) \cdot x \, ds. \quad (4)$$

Un calcul élémentaire montre que  $H_{A,V}$  s'écrit alors sous la forme suivante :

$$H_{A,V} = H_0 + \sum a_{jk}(x) \cdot L_{jk} + Q(x) \quad (5)$$

avec les notations :

- $a_{jk}(x) = - \int_0^1 s b_{jk}(sx) \, ds$ ;
- $Q(x) = A^2(x) + i \operatorname{div} A(x) + V(x)$ ;
- $L_{jk} = -i(x_j \partial_{x_k} - x_k \partial_{x_j})$  (opérateurs moments cinétiques, générateurs des rotations).

L'hypothèse  $(B_{\rho,\delta})$  entraîne :

$$\langle x \rangle^{\min(1+\rho,2)+|\alpha|} |\partial_x^\alpha a_{jk}(x)| \leq C_\alpha \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

et  $A$  vérifie donc

$$\langle x \rangle^{\min(1,\rho)+|\alpha|} |\partial_x^\alpha A(x)| \leq C_\alpha \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

La preuve de l'existence de  $W^\pm$ , pour  $\rho > 1/2$  et  $\delta > 1$ , se fait alors facilement par la méthode de Cook [RE-SI], en utilisant (5) et en remarquant que  $L_{jk}$  commute aux rotations (cf. [LO-TH]).

L'exemple dans  $\mathbb{R}^2$  des champs  $B \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , à flux total non nul, montre que (7) est en général optimal.

Cela montre également que des champs magnétiques à décroissance très rapide peuvent être associés à des potentiels  $A(x) = O(|x|^{-1})$ , et donc a priori à longue portée.

Cependant, physiquement, on s'attend à ce que de tels champs soient à courte portée, et donc que  $W_\Phi^\pm = W^\pm$ .

L'existence et la complétude de  $W^\pm$  ont été démontrées d'abord par Perry [PE], dans le cas particulier d'interactions radiales, puis récemment par Loss et Thaller [LO-TH] dans le cas général en utilisant la méthode dépendant du temps de Enss pour l'étude de la diffusion [EN].

L'objet de cet article est de comparer les opérateurs  $W^\pm$  et  $W_\Phi^\pm$  pour en déduire une nouvelle démonstration du résultat suivant de Loss et Thaller.

**THÉORÈME 1.** — *Supposons que  $B$  et  $V$  vérifient  $(B_{\rho,\delta})$  avec  $\rho > 1/2$  et  $\delta > 1$ . On fait le choix de jauge  $A$  vérifiant la condition de transversalité (T).*

*Alors : les opérateurs d'onde  $W^\pm$  définis par (1) existent et sont complets.*

L'approche stationnaire mise en œuvre ici permet d'obtenir également des informations sur les matrices de diffusion et l'amplitude associées à  $H_{A,V}$  pour  $\rho > 1/2$  et  $\delta > 1$ , (cf. [IS-KI], [NI]).

## 2. Démonstration du théorème 1

Commençons d'abord par énoncer des résultats établis dans [NI] dans le cas de la diffusion avec champ magnétique à longue portée.

Désignons par  $E_0(I)$  le projecteur spectral sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , associé à  $H_0$ .

**THÉORÈME 2.** — *Pour tout  $a_0 > 0$ , les opérateurs d'onde modifiés :*

$$W_\Phi^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_{A,V}} J_\Phi e^{-itH_0} E_0([a_0, \infty[)$$

existent et sont complets, le modificateur  $J_{\Phi}$  étant l'opérateur Fourier intégral :

$$J_{\Phi}\Psi(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\Phi(x,\xi)-y\cdot\xi)} \Psi(y) dy d\xi$$

avec  $\Phi$  vérifiant :

$$i) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\Phi(x, \xi) - x \cdot \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^{1-\mu-|\alpha|}$$

pour tout  $\mu \in ]0, \min(1, \rho, \delta) [$  ;

$$ii) \quad h_{A,V}(x, \partial_x \Phi(x, \xi)) = \xi^2$$

pour  $(x, \xi)$  dans une zone sortante ou entrante  $\Sigma^\pm$

(cf. définition ci-dessous).

**DÉFINITION .** — On appelle zone sortante  $\Sigma^+$  (resp. entrante  $\Sigma^-$ ), les parties de l'espace de phase classique  $\mathbb{R}^{2n}$  définies par

$$\Sigma^\pm = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x| \geq R, |\xi| \geq d, \pm x \cdot \xi \geq -\sigma|x||\xi|\}$$

où  $\sigma \in ]0, 1 [$ ,  $R > 0$ ,  $d > 0$ .

*Remarque 1*

L'intérêt de l'introduction de  $\Sigma^\pm$  vient essentiellement de la propriété suivante

$$\forall (x, \xi) \in \Sigma^\pm, \quad \text{on a} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |x + t\xi| = +\infty$$

qui est importante pour pouvoir résoudre globalement l'équation de Hamilton-Jacobi, (cf. [IS-KI], [NI]).

*Remarque 2*

Lorsque l'on peut prendre  $\mu > 1$  dans le théorème 2, on voit facilement que  $J_{\Phi}$  est une perturbation compacte de l'identité. On en déduit alors l'existence et la complétude de  $W^\pm$ .

Nous allons montrer que le théorème 2 entraîne le théorème 1 : l'existence et la complétude des opérateurs d'onde  $W_{\Phi}^\pm$  étant établies, il est alors naturel de comparer  $W_{\Phi}^\pm$  et  $W^\pm$ .

Notre méthode consiste à construire une nouvelle phase  $\Phi_1(x, \xi)$ , pour  $(x, \xi)$  dans les zones où le moment cinétique total  $\ell(x, \xi) = [\sum \ell_{jk}(x, \xi)^2]^{1/2}$  reste borné, ( $\ell_{jk}(x, \xi) = x_j \xi_k - x_k \xi_j$ ),  $\Phi_1$  vérifiant l'équation de Hamilton-Jacobi (3), et à comparer  $\Phi_1$  à  $\Phi$ . En effet, de la formule (5) il résulte que l'on a :

$$h_{A,V}(x, \xi) = \xi^2 + \sum a_{jk}(x) \ell_{jk}(x, \xi) + Q(x).$$

Dans les zones  $B$  de l'espace de phase où  $\ell(x, \xi)$  est borné,  $h_{A,V}(x, \xi)$  est une perturbation à courte portée de  $h_{0,0}(x, \xi) = \xi^2$  en ce sens qu'il existe  $C, \epsilon > 0$  tels que :

$$|h_{A,V}(x, \xi) - \xi^2| \leq C \langle x \rangle^{-1-\epsilon}, \quad \forall (x, \xi) \in B.$$

Il est donc naturel de chercher à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi (3) dans  $B$  de façon à améliorer les estimations de  $\Phi(x, \xi) - x \cdot \xi$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , ce qui est essentiel d'après la remarque 2.

LEMME 3. — *Pour tout  $M > 0$ , il existe une fonction  $\Phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  vérifiant :*

$$i) \quad \begin{cases} \left| \partial_\xi^\beta (\Phi_1(x, \xi) - x \cdot \xi) \right| \leq C_\beta \langle x \rangle^{-\mu} \\ \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\Phi_1(x, \xi) - x \cdot \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^{1-\mu-|\alpha|} \quad \text{pour } |\alpha| \geq 1 \end{cases}$$

pour un  $\mu > 0$  et  $(x, \xi)$  tels que  $\ell(x, \xi) \leq M$  ;

ii)  $h_{A,V}(x, \partial_x \Phi_1(x, \xi)) = \xi^2$  dans une zone entrante ou sortante  $\Sigma^\pm$  ;

iii) il existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\Phi_1(x, \xi) = \Phi(x, \xi) + g(\xi)$  pour  $(x, \xi)$  tels que  $\ell(x, \xi) \leq M$ .

Admettons provisoirement ce lemme.

*Notations*

Soient  $\theta_1 \in C_0^\infty([a_0, \infty[)$ ,  $\theta_2 \in C_0^\infty([0, M])$  et  $F$  l'opérateur pseudo-différentiel de symbole  $f(x, \xi) = \theta_1(\xi^2) \theta_2(\ell(x, \xi)^2)$ .

Soit  $J_{\Phi_1}$  l'opérateur Fourier intégral de phase  $\Phi_1$ , d'amplitude  $f(x, \xi)$  :

$$J_{\Phi_1} \Psi(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\Phi_1(x, \xi) - y \cdot \xi)} f(x, \xi) \Psi(y) dy d\xi.$$

LEMME 4. —  $s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_{\Phi_1} - F) e^{-itH_0} = 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* — D'après le lemme 3 i), il est facile de voir que  $J_{\Phi_1} - F$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole

$$s(x, \xi) = (e^{i(\Phi_1(x, \xi) - x \cdot \xi)} - 1)f(x, \xi)$$

qui vérifie les estimations suivantes :

$\forall N \geq 0, \forall \alpha, \beta$  multi-indices,  $\exists C_{\alpha\beta N} > 0$  telle que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta N} \langle x \rangle^{-\mu - |\alpha|} \langle \xi \rangle^{-N}.$$

En particulier,  $J_{\Phi_1} - F$  est un opérateur compact, car  $\mu > 0$  [BE]. D'autre part, l'opérateur  $e^{-itH_0}$  converge faiblement vers zéro, lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  : cela se montre aisément par conjugaison par la transformée de Fourier. D'où le lemme.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.* — La méthode consiste à comparer  $W^\pm$  et  $W_\Phi^\pm$  sur des sous-espaces denses, d'énergie et de moments cinétiques bornés.

La conservation du moment cinétique sous l'action du groupe libre  $e^{-itH_0}$  nous permet d'écrire

$$e^{itH_{A,v}} J_\Phi e^{-itH_0} F = e^{itH_{A,v}} J_\Phi F e^{-itH_0}$$

et d'après le lemme 3 iii), on a

$$J_\Phi F = J_{\Phi_1} e^{ig(D)} \quad \text{où } D = -i\nabla.$$

Par conséquent

$$e^{itH_{A,v}} J_\Phi e^{-itH_0} F = e^{itH_{A,v}} J_{\Phi_1} e^{-itH_0} e^{ig(D)} F \quad (8)$$

que l'on écrit sous la forme

$$e^{itH_{A,v}} J_\Phi e^{-itH_0} F = e^{itH_{A,v}} (J_{\Phi_1} - F) e^{-itH_0} e^{ig(D)} F + e^{itH_{A,v}} F e^{-itH_0} e^{ig(D)} F.$$

On fait tendre  $|t|$  vers l'infini dans l'expression précédente, et d'après le lemme 4 et le théorème 2, on obtient :

$$W_\Phi^\pm F = W^\pm F e^{ig(D)}. \quad (9)$$

En utilisant la densité des espaces d'énergie et de moments cinétiques bornés, le caractère isométrique de  $e^{ig(D)}$ , ainsi que la complétude de  $W_{\Phi}^{\pm}$ , il vient aussitôt grâce à (9) :

$$\text{Im } W^{\pm} = \mathcal{H}_{\text{ac}}(H_{A,V})$$

ceci termine alors la preuve du théorème.  $\square$

Pour conclure, il reste à établir le lemme 3.

*Démonstration du lemme 3.* — Pour cela, nous reprenons les grandes lignes de la preuve du théorème 2 (cf. [GE-MA], [IS-KI], [NI], [RO1], [RO2]).

Utilisant l'expression (5) de  $H_{A,V}$ , l'équation de Hamilton-Jacobi devient :

$$h_{A,V}(x, \partial_x \Phi(x, \xi)) = \xi^2 \tag{10}$$

avec  $h_{A,V}(x, \xi) = \xi^2 + \Sigma a_{jk}(x) \ell_{jk}(x, \xi) + Q(x)$ .

Suivant [IS-KI], on résoud (10) dans les zones entrante et sortante de l'espace des phases définies par

$$\Sigma^{\pm} = \Sigma^{\pm}(R, d, \sigma) = \{(x, \xi) \mid |x| \geq R, |\xi| \geq d, \pm x \cdot \xi \geq -\sigma|x||\xi|\}$$

où  $d > 0$ ,  $\sigma \in ]0, 1[$  sont donnés,  $R$  étant choisi aussi grand que nécessaire. Comme d'habitude, nous traitons le cas (+) (le cas (−) étant similaire).

En dehors de ces zones,  $\Phi(x, \xi)$  sera prolongée de manière  $C^{\infty}$  par  $x \cdot \xi$ .

Introduisons le flot associé au champ hamiltonien :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \partial_x h_{A,V} \cdot \partial_{\xi} - \partial_{\xi} h_{A,V} \cdot \partial_x \\ \exp(t\mathcal{H})(x, \eta) &= (z(t, x, \eta), \xi(t, x, \eta)). \end{aligned} \tag{11}$$

Des propriétés de  $h_{A,V}(x, \xi)$ , on en déduit (cf. [NI], lemme 4.4, p. 71) :

$$|z(t, x, \eta)| \geq C_0(|x| + t|\xi|), \quad \forall t \geq 0, \forall (x, \eta) \in \Gamma^+. \tag{12}$$

On montre ensuite que l'application  $\eta \rightarrow \xi(t, x, \eta)$  est un difféomorphisme global et nous désignons par  $\eta \rightarrow \xi(t, x, \eta)$  le difféomorphisme inverse qui est défini pour tout  $t \geq 0$ ,  $(x, \eta) \in \Sigma^+(R, d - \epsilon, \sigma + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  aussi petit que l'on veut ( $R$  dépendant de  $\epsilon$ ).

On définit alors

$$y(t, x, \eta) = (z(t, x, \xi(t, x, \eta)) \tag{13}$$

et on a la propriété

$$\exp(t\mathcal{H})(x, \xi(t, x, \eta)) = (y(t, x, \eta), \eta). \quad (14)$$

La fonction  $\Phi$  du théorème 2 est obtenue en posant pour  $(x, \eta) \in \Sigma^+(2R, d - \epsilon, \sigma + \epsilon)$  :

$$\Phi(x, \eta) = x \cdot \eta + \int_0^\infty [h_{A,V}(y(t, x, \eta), \eta) - h_{A,V}(y(t, x_0, \eta), \eta)] dt \quad (15)$$

avec  $x_0 = (R/d)\eta$ .

L'introduction du point  $x_0$  permet d'obtenir le caractère  $L^1$ , en variable  $t$ , de la quantité  $h_{A,V}(y(t, x, \eta), \eta) - h_{A,V}(y(t, x_0, \eta), \eta)$ . Mais ce terme supplémentaire empêche de gagner des puissances de  $\langle x \rangle$  raisonnables dans l'expression  $|\Phi(x, \eta) - x \cdot \eta|$ , même pour  $(x, \eta)$  tels que  $\ell(x, \eta) \leq M$ .

Plus précisément, on peut montrer que pour de tels  $(x, \eta)$ , on a

$$|\Phi(x, \eta) - x \cdot \eta| = O(|x_0|^{-\mu}) \quad \text{pour } \mu < \min(1, \rho, \delta).$$

Cela suggère de remplacer  $x_0$  par un point à l'infini et ainsi d'améliorer les estimations de la phase construite.

En utilisant l'estimation suivante (cf. [NI], lemme 4.8, p. 75) :

$$y(t, x, \eta) = x + 2t\eta + O(|x| + t|\eta|)^{1-\mu}, \quad (16)$$

on obtient de suite

$$|y(t, x, \eta)| \geq C_0(|x| + t|\eta|) \quad (17)$$

et par conséquent

$$\left| h_{A,V}(y(t, x, \eta), \eta) - \eta^2 \right| \leq C_1 |\eta| (|x| + t|\eta|)^{-1-\mu} \quad (18)$$

pour  $(x, \eta)$  tels que  $\ell(x, \eta) \leq M$ . Ceci nous permet de poser :

$$\Phi_1(x, \eta) = x \cdot \eta + \int_0^\infty [h_{A,V}(y(t, x, \eta), \eta) - \eta^2] dt. \quad (19)$$

Cette phase  $\Phi_1(x, \eta)$  vérifie trivialement ii) et iii) du lemme 3, ainsi que la première estimation de i).

En ce qui concerne la seconde, il suffit d'utiliser

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta h_{A,V}(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^{-\mu-|\alpha|} \langle \xi \rangle \quad \text{pour } |\alpha| \neq 0. \quad (20)$$

Ceci termine la démonstration du lemme 3.  $\square$

### Références bibliographiques

- [BE] BEALS (R.) . — *A general calculus of pseudodifferential operators*,  
Duke Math. J. **42** (1975) pp. 1-42.
- [DO] DOLLARD (J.D.) . — *Quantum mechanical scattering theory for short range and Coulomb interactions*,  
Rocky Mountain J. **1** (1971) pp. 5-88.
- [EN] ENNS (V.) . — *Long-range scattering of two-and three body quantum systems*,  
Actes des Journées Équations aux Dérivées Partielles, Saint-Jean de Monts (1989)  
pp. 1-31
- [GE-MA] GÉRARD (C.) et MARTINEZ (A.) . — *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à 2 corps à longue portée*,  
Ann. Inst. Henri Poincaré, **51**, n° 1 (1989) pp. 81-110.
- [HO] HÖRMANDER (L.) . — *The analysis of linear partial differential operators*,  
Tomes 1 à 4, Springer-Verlag.
- [IS-KI] ISOZAKI (H.) and KITADA (H.) . — *Modified wave operators with time-independent modifiers*,  
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **32** (1985) pp. 77-104.
- [LO-TH] LOSS (M.) and THALLER (B.) . — *Scattering of particles by long-range magnetic fields*,  
Annals of physics, **176** (1987) pp. 159-180.
- [NI] NICOLEAU (F.) . — *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique*,  
Thèse de doctorat de l'Université de Rennes I (1991).
- [PE] PERRY (P.A.) . — *Scattering theory by the Enns method*,  
Mathematical Reports Series, vol. 1, part 1, Hardwood Acad. Publishers (1983).
- [RE-SI] REED (M.) and SIMON (B.) . — *Methods of Modern Mathematical Physics*  
Tomes 1 à 4, Academic Press (1972).
- [RO1] ROBERT (D.) . — *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du Laplacien*,  
À paraître au Annales de l'E.N.S.
- [RO2] ROBERT (D.) . — *On Scattering theory for long range perturbations of Laplace operators*,  
Conférence en l'honneur de S. Agmon, juin 1990; à paraître dans le Journal d'Analyse Mathématique.