

BIN ZHANG

**Revêtements étales abéliens de courbes  
génériques et ordinarité**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 1, n<sup>o</sup> 1  
(1992), p. 133-138

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1992\\_6\\_1\\_1\\_133\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_1_133_0)

© Université Paul Sabatier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Revêtements étales abéliens de courbes génériques et ordinarité

BIN ZHANG<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $L$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . Considérons une  $L$ -courbe générique de genre  $g$ . On montre par dégénérescence que tout revêtement étale abélien de la courbe générique de groupe d'ordre premier à  $p$  est ordinaire (théorème 3.1). Il résulte alors de [3] que tout revêtement étale abélien de la courbe générique est ordinaire.

**ABSTRACT.** — We study the ordinarity of étale abelian coverings of the generic curve of given genus  $g$  in positive characteristic  $p$ . We prove that all étale abelian coverings of the generic curve are ordinary.

---

### 1. Préliminaire

Soient  $C$  une courbe sur un corps séparablement clos  $k$  et  $c$  un point fermé de  $C$ . Rappelons que  $c$  est un *point double ordinaire* si le complété  $(\mathcal{O}_{C,c})^\wedge$  de l'anneau local  $\mathcal{O}_{C,c}$  est isomorphe au quotient  $k[[x, y]]/(xy)$  de l'anneau des séries formelles  $k[[x, y]]$  en deux variables. En particulier  $c$  est un point rationnel.

Soient  $S$  un schéma et  $g$  un entier positif. Rappelons qu'une *courbe semi-stable* (resp. *stable*) de genre  $g$  au-dessus de  $S$  est un morphisme propre et plat  $f : C \rightarrow S$  dont les fibres géométriques sont des schémas  $\mathcal{C}_{\bar{s}}$  réduits, connexes, de dimension 1 et satisfaisant aux deux (resp. trois) conditions suivantes :

- i)  $\mathcal{C}_{\bar{s}}$  n'admet que des points doubles ordinaires pour singularités;
- ii)  $\dim H^1(\mathcal{C}_{\bar{s}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{\bar{s}}}) = g$ .

---

<sup>(1)</sup> Université Paul Sabatier, U.F.R. Mathématiques, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex (France)

(resp. iii) si  $E$  est une composante rationnelle de  $C_{\bar{s}}$ , alors  $E$  coupe les autres composantes irréductibles en au moins trois points.)

Dans toute la suite, on fixe un entier  $g \geq 2$ . Soit  $k$  un corps séparablement clos de caractéristique  $p > 0$ . D'après [2], on a une courbe stable universelle  $Z_g \rightarrow H_g$  où  $H_g$  est un  $k$ -sous-schéma d'un schéma de Hilbert convenable avec les propriétés suivantes (cf. [2]).

PROPRIÉTÉS

- Toute courbe stable sur  $k$  de genre  $g$  est isomorphe à une fibre de  $Z_g \rightarrow H_g$ .
- $H_g$  est géométriquement irréductible et lisse sur  $k$ , et l'ensemble des  $x \in H_g$  tels que la fibre de  $Z_g$  soit lisse est un ouvert dense de  $H_g$ .

Considérons une clôture algébrique  $L$  de  $k(\eta)$ , où  $\eta$  est le point générique de  $H_g$ . On obtient ainsi une courbe générique de genre  $g : X = Z_g \times_{H_g} \text{Spec } L$ . Cette courbe générique  $X/L$  est propre, lisse et connexe. On va étudier l'ordinarité des revêtements étales abéliens de  $X$ .

Soit  $S$  un schéma de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas. Soit  $X^{(p)} = X \times_S S$  où le morphisme  $S \rightarrow S$  est le morphisme de Frobenius absolu. On note  $F : X \rightarrow X^{(p)}$  le  $S$ -morphisme de Frobenius relatif.

DÉFINITION 1.1. — Soit  $X$  une courbe semi-stable sur un corps  $K$  de caractéristique  $p > 0$ . Le morphisme de Frobenius relatif  $F : X \rightarrow X^{(p)}$  induit une application  $k$ -linéaire de  $F^* : H^1(X^{(p)}, \mathcal{O}_{X^{(p)}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ . On dit que  $X$  est ordinaire si  $F^*$  est bijectif.

Remarques 1.2

- i) Les courbes elliptiques ordinaires sur un corps de caractéristique  $p > 0$  sont celles d'invariant de Hasse non nul. Les courbes elliptiques non ordinaires correspondent à un nombre fini de valeurs de l'invariant  $j$ .
- ii) Soit  $X$  une courbe semi-stable sur un corps  $K$  de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $K'$  une extension de  $K$ . On note  $X'$  la courbe  $X \otimes_K K'$ . Alors  $X$  est ordinaire si et seulement si  $X'$  est ordinaire.
- iii) Soit  $S$  un schéma intègre noethérien de caractéristique  $p > 0$  et  $f : C \rightarrow S$  une courbe semi-stable. Notons  $\text{ord}(C/S)$  l'ensemble des  $s \in S$  tels que  $C_s$  soient ordinaires. Alors  $\text{ord}(C/S)$  est un ouvert de  $S$ .

- iv) Soient  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ ,  $E$  et  $E'$  deux courbes elliptiques sur  $K$ . Si  $f : E' \rightarrow E$  est une isogénie, alors  $E$  est ordinaire si et seulement si  $E'$  est ordinaire.

## 2. Genre et normalisation d'une courbe semi-stable

PROPOSITION 2.1. — Soient  $K$  un corps séparablement clos et  $C$  une courbe sur  $K$  semi-stable de genre  $g$ . On note  $C'$  le normalisé de  $C$ ,  $m$  le nombre de points singuliers de  $C$ , et  $n$  le nombre des composantes irréductibles de  $C$ . Alors  $g+n-m-1$  est la somme des genres des normalisés des composantes irréductibles de  $C$ .

Notons que le normalisé  $C'$  est lisse sur  $K$ . Soient  $C = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_i$  où  $C_i$  sont les composantes irréductibles de  $C$ ,  $f : C' \rightarrow C$  le morphisme canonique et  $C'_i$  le normalisé de  $C_i$ . Les  $C'_i$  sont les composantes de  $C'$ . Nous avons une suite exacte induite par le morphisme canonique injectif  $h : \mathcal{O}_C \rightarrow f_*\mathcal{O}_{C'}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow f_*\mathcal{O}_{C'} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

où  $Q = f_*\mathcal{O}_{C'}/\mathcal{O}_C$ .

$Q$  est concentré aux points singuliers de  $C$  et chaque point singulier de  $C$  se relève en deux points distincts de  $C'$  car  $C$  est semi-stable, et  $Q$  est de longueur 1 en chaque point double de  $C$ .

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^0(C, f_*\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow H^0(C, Q) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C, f_*\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow H^1(C, Q) = 0. \end{aligned}$$

D'où une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} K \rightarrow \prod_{1 \leq i \leq m} K \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(C', f_*\mathcal{O}_{C'}) \rightarrow 0$$

et on en déduit

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\text{genre de } C'_i) = g + n - m - 1.$$

**COROLLAIRE 2.2.** — Soient  $K$  un corps séparablement clos et  $C$  une courbe semi-stable de genre  $g$ . Soit  $C'$  sa normalisée. Alors le "genre de  $C'$ " est  $\leq g$ . Supposons de plus que les composantes  $C_i$  de  $C$  soient lisses sur  $K$  et forment une "chaîne", c'est-à-dire  $n = m + 1$ , et  $C$  a au plus deux points singuliers sur chaque  $C_i$ . Alors

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (\text{genre de } C_i) = g.$$

**COROLLAIRE 2.3.** — Une courbe semi-stable sur un corps séparablement clos de caractéristique  $p > 0$  est ordinaire si et seulement si sa normalisée est "ordinaire", c'est-à-dire les composantes de sa normalisée sont ordinaires.

### 3. Revêtements étales abéliens de la courbe générique

Retournons à la situation du paragraphe 1. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal que nous avons en vue.

**THÉORÈME 3.1.** — Soit  $X/L$  une courbe générique de genre  $g \geq 2$ . Soit  $Y$  un revêtement étale connexe galoisien de  $X$  de groupe  $G$  commutatif d'ordre premier à  $p$ . Alors  $Y$  est ordinaire.

*Remarque 3.2.* — En particulier  $X$  est ordinaire, ce qui est classique (cf. [5]).

*Démonstration du théorème 3.1.* — Prenons  $g$  courbes elliptiques ordinaires sur  $k$ . Il existe une courbe stable  $C_0$  de genre  $g$  sur  $k$  qui est une "chaîne" constituée de ces  $g$  courbes elliptiques ordinaires.

$C_0$  correspond alors à une fibre de  $Z_g/H_g$  en un point rationnel  $x$  de  $H_g$ .

Il existe un anneau de valuation discrète  $R$  tel que, si on note  $\xi$  le point générique de  $S = \text{Spec } R$  et  $s$  le point fermé de  $S$ , on ait un morphisme  $f : S \rightarrow H_g$  qui induit un isomorphisme  $K(R) \cong k(\eta)$  et  $f(s) = x$ ,  $f(\xi) = \eta$  ([4], II (7.1.9)), où  $K(R)$  est le corps des fractions de  $R$ .

Soit  $\mathcal{X} = Z_g \times_{H_g} \text{Spec } R$ . On obtient une courbe stable  $\mathcal{X}/S$ , la fibre générique géométrique est  $X/L$ , la fibre spéciale est une courbe stable  $C = C_0 \otimes_k k(s)$  qui est une "chaîne" constituée de  $g$  courbes elliptiques ordinaires.

On introduit quelques notations :

$E :=$  le corps des fractions de  $R$ ;

$\mathcal{J} := \text{Pic}^0(\mathcal{X}/S)$ ,  $J_L := \text{Pic}^0(X/L)$ ,  $J_E := \text{Pic}^0((\mathcal{X} \otimes_R E)/E)$  (cf. [1], chap. 8 et 9);

$G := G_S$  le  $S$ -schéma en groupes constant associé à  $G$ ,  $G_E := G \otimes_R E$ ;

$G' :=$  le dual de Cartier de  $G (= \underline{\text{Hom}}_{S-G_r}(G, \mathbf{G}_m, S))$ ;

$G'_E := G' \otimes_R E$ ,  $G'_L := G' \otimes_R L$ .

LEMME 3.3. —  $\mathcal{J}$  est un schéma abélien.

D'après [1] section 9.3,  $\mathcal{J}$  est un  $S$ -schéma en groupe lisse. La fibre spéciale de  $\mathcal{J}$  est un schéma abélien d'après le choix de  $C$  et [1] exemple 9.2.8, et par suite  $\mathcal{J}$  est un schéma abélien.

Comme  $L$  est algébriquement clos, on peut factoriser  $\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } R$  à travers un hensélisé strict de  $R$ , donc supposer  $R$  strictement hensélien. Alors d'après [7], (6.2), nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{et}^1(\mathcal{X}, G) & \cong & \text{Hom}(G', \mathcal{J}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{et}^1(\mathcal{X} \otimes_R E, G_E) & \cong & \text{Hom}(G'_E, J_E) \end{array} \quad (*)$$

Le revêtement  $Y/X$  correspond à un morphisme injectif  $h : G'_L \rightarrow J_L$ . Soit  $n = \#(G)$ .  $h$  correspond à un morphisme injectif  $h' : G'_L \rightarrow (J_L)_n = \mathcal{J}_n \otimes_R L$  (indice  $n$  désigne le noyau de la multiplication par  $n$ ).  $n$  est premier à  $p$ , donc  $G'$  et  $\mathcal{J}_n$  sont des  $S$ -groupes finis étales.  $R$  est strictement hensélien, donc  $G'$  et  $\mathcal{J}_n$  sont  $R$ -isomorphes à des réunions disjointes de  $\text{Spec } R$ , donc  $h'$  provient d'un morphisme  $r : G'_E \rightarrow (J_E)_n$  et  $r$  se prolonge en un morphisme  $G' \rightarrow \mathcal{J}_n$  qui correspond à un morphisme  $G' \rightarrow \mathcal{J}$  prolongeant  $G'_E \rightarrow J_E$ .

Il résulte alors de (\*) que le revêtement étale  $Y/X$  se prolonge en un revêtement étale  $\mathcal{Y}/\mathcal{X}$  connexe galoisien de groupe de Galois  $G$ .

Le revêtement  $\mathcal{Y}/\mathcal{X}$  donne sur la fibre fermée un revêtement étale galoisien  $q : D \rightarrow C$  de groupe  $G$ .

Considérons le morphisme induit  $q' : D' \rightarrow C'$  où  $D'$  et  $C'$  sont les normalisés respectifs de  $D$  et  $C$ . On a  $D' = D \times_C C'$  car le morphisme  $q$  est étale.

$C'$  est réunion disjointe de courbes elliptiques ordinaires par construction de  $C$ , donc  $D'$  est ordinaire (remarque 1.2.iv), et par suite  $D$  est ordinaire (corollaire 2.3). Donc  $Y$  est ordinaire (remarque 1.2.iii).

Le théorème et [3], corollaire 1.8.3, entraînent le résultat suivant.

**COROLLAIRE 3.4.** — *Tout revêtement étale abélien connexe d'une courbe générique est ordinaire.*

### Références

- [1] BOSCH (S.), LUTKEBOHMERT (W.) et RAYNAUD (M.) . — *Néron Models*, A Series of modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 21 (1990).
- [2] DELIGNE (P.) et MUMFORD (D.) . — *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. IHES, 36 (1969) pp. 75-110.
- [3] CREW (R.M.) . — *Étale  $p$ -covers in characteristic  $p$* , Compositio Math., 52 (1984) pp. 31-45.
- [4] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.) . — *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES, 8.
- [5] KOBLITZ (N.) . —  *$p$ -adic variation of the zeta- function over families of varieties defined over finite field*, Compositio Math., 31 n° 2 (1975) pp. 119-218.
- [6] MUMFORD (D.) . — *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Oxford (1970).
- [7] RAYNAUD (M.) . — *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES, 38 (1970) pp. 27-76.