

SALEM MATHLOUTHI

**Bifurcation d'orbites homoclines pour les  
systèmes hamiltoniens**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 1, n<sup>o</sup> 2  
(1992), p. 211-236

<[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1992\\_6\\_1\\_2\\_211\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_2_211_0)>

© Université Paul Sabatier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Bifurcation d'orbites homoclines pour les systèmes hamiltoniens

SALEM MATHLOUTHI<sup>(1)</sup>

**RÉSUMÉ.** — On s'intéresse à l'étude des orbites homoclines d'un système hamiltonien autonome soumis à une perturbation externe non-autonome. On suppose que le système libre admet la solution  $T$ -périodique  $\bar{x} = 0$  et que cette solution est hyperbolique; de plus, il admet une autre solution  $x_0$  homocline à  $\bar{x}$  et non dégénérée. On met en évidence une situation de bifurcation en deux points  $\tau_1 * x_0 = x_0(\cdot + \tau_1)$  et  $\tau_2 * x_0 = x_0(\cdot + \tau_2)$  qui donnent naissance à deux courbes géométriquement distinctes de solutions du système forcé. On démontre une condition nécessaire et une condition suffisante de bifurcation. Enfin, on donne un développement asymptotique de la solution du système forcé et une application à deux exemples : l'équation de Duffing et un système de type Hénon-Heiles.

**ABSTRACT.** — This paper deals with homoclinic orbits in autonomous Hamiltonian systems which are subject to non-autonomous external perturbation. We assume that the free system admits the  $T$ -periodic solution  $\bar{x} = 0$  that is hyperbolic; in addition, the free system admits another solution  $x_0$  homoclinic to  $\bar{x}$  and non degenerate. We emphasize on situation of bifurcation in to points  $\tau_1 * x_0 = x_0(\cdot + \tau_1)$  and  $\tau_2 * x_0 = x_0(\cdot + \tau_2)$  which yield two curves geometrically distinct of solutions of the perturbed system. We obtain a necessary condition and a sufficient condition for bifurcation. We finally present an asymptotic development of the bifurcation solution and an application to two exemples : Duffing's equation and Hénon-Heiles system type.

**KEY-WORDS :** Hamiltonian systems, bifurcation theory, homoclinic orbits, Melnikov's function.

### Introduction

Dans cet article, on s'intéresse aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = h(x) + g(\epsilon, t, x) \tag{1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , et

<sup>(1)</sup> Faculté des Sciences de Bizerte, Bizerte, Tunisie

$$h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

sont des applications suffisamment régulières ( $C^r$ ,  $r \geq 1$ ),  $g$  est  $T$ -périodique par rapport à  $t$  et

$$g(0, t, x) = 0, \quad \forall t, x.$$

Le système non perturbé

$$\dot{x} = h(x) \tag{2}$$

est supposé Hamiltonien : il existe une fonction  $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$h(x) = JH'(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

avec

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{matrice } 2N \times 2N.$$

L'étude locale des solutions  $T$ -périodiques du système perturbé (1), au voisinage d'une solution  $T$ -périodique du système non perturbé (2), a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]). Le but de cet article est d'étudier un autre type de solutions, découvertes par Poincaré [13], appelées solutions doublement asymptotiques ou orbites homoclines.

Si  $\bar{x}$  est une solution  $T$ -périodique de (1), une autre solution  $z$  est dite doublement asymptotique à  $\bar{x}$  si  $|z(t) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Notre hypothèse de base est que  $\bar{x} \equiv 0$  est une solution hyperbolique du système non perturbé (2), c'est-à-dire que les valeurs propres de  $h'(0)$  ont une partie réelle non nulle, et qu'il existe une autre solution  $x_0$  doublement asymptotique à  $\bar{x} \equiv 0$ . On suppose aussi que  $x_0$  est non dégénérée, c'est-à-dire que l'espace vectoriel  $E_0$  des solutions doublement asymptotiques à zéro du système linéarisé autour de  $x_0$  :

$$\dot{y} = h'(x_0(t))y \tag{3}$$

est un espace de dimension  $k = 1$ .

Comme  $\bar{x}$  est une solution hyperbolique de (2) et  $g(0, \cdot, \cdot) \equiv 0$ , une simple application du théorème des fonctions implicites, nous montre qu'au

voisinage de  $\bar{x}$  et pour  $\epsilon$  voisin de zéro, il existe une unique solution  $\gamma_\epsilon(t)$  du système perturbé (1),  $T$ -périodique,  $C^r$  par rapport à  $\epsilon$  et vérifie  $\gamma_0 \equiv \bar{x} \equiv 0$ .

On désire étudier, dans un voisinage de  $x \equiv x_0$  et de  $\epsilon = 0$ , les solutions doublement asymptotiques à  $\gamma_\epsilon$  du système perturbé (1).

La motivation de ce type d'étude vient de la remarque suivante : le système (2) est autonome; par conséquent,  $\tau \star x_0 = x_0(\cdot + \tau)$  est encore une solution doublement asymptotique à zéro de (2). Le système (1) n'a pas cette propriété pour  $\epsilon \neq 0$ , à cause de la perturbation non autonome. La question est donc, d'étudier, dans un voisinage de la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ , les valeurs de  $\tau$  qui donnent naissance à une ou plusieurs solutions doublement asymptotiques à  $\gamma_\epsilon$  du système (1).

Dans cet article on démontre deux théorèmes.

**THÉORÈME A.** — *Si le système perturbé (1) est hamiltonien, alors, pour  $\epsilon$  voisin de zéro, il admet, dans un voisinage de la famille  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ , au moins deux solutions  $z_1, z_2$  doublement asymptotiques à  $\gamma_\epsilon$  et géométriquement distinctes  $(z_1(\cdot + \ell T) \neq z_2(\cdot), \forall \ell \in \mathbb{Z})$ .*

**THÉORÈME B.** — *Soit  $M$  la fonction de Melnikov :*

$$M(\tau) = \int_{\mathbb{R}} h(x_0(t - \tau)) \cdot Jg'_\epsilon(0, t, x_0(t - \tau)) dt.$$

*Alors, si  $M$  admet un zéro simple, le système perturbé (1) admet, pour  $\epsilon$  voisin de zéro, au moins une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$ ; si  $M$  ne s'annule pas, le système perturbé (1) n'admet, pour  $\epsilon$  voisin de zéro, aucune solution doublement asymptotique dans un voisinage de la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ .*

Des énoncés précis sont donnés dans le courant de l'article.

*Remarques*

- i) Dans le théorème A, dire que le système (1) est hamiltonien revient à dire que l'application  $g$  est hamiltonienne : il existe une fonction  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$g(\epsilon, t, x) = JG'_x(\epsilon, t, x).$$

- ii) Si  $g = g(\epsilon, x)$  est indépendante de  $t$ , la fonction de Melnikov  $M$  est constante

$$M(\tau) = \text{Cte}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R};$$

si cette constante est non nulle, le théorème B nous dit qu'il n'y a aucune solution doublement asymptotique au voisinage de la famille  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ , pour  $\epsilon$  voisin de zéro.

- iii) Si  $g = g(\epsilon, x) = JG'_x(\epsilon, x)$ , le théorème B ne donne aucun renseignement car la fonction de Melnikov est identiquement nulle; par contre, le théorème A nous donne l'existence d'au moins une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$ .

Dans le cas où la perturbation est hamiltonnienne :

$$g = JG'_x,$$

Coti-Zelati, Ekeland et Séré [1] ont démontré, sous une forme plus générale avec  $x \rightarrow H(x) + G(\epsilon, t, x)$  convexe, que le système (1) admet au moins deux solutions doublement asymptotiques. Le théorème A nous montre, en plus de l'existence, que ces deux solutions sont dans un voisinage de la famille  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ .

Dans le cas  $N = 1$ , on trouve une autre démonstration du théorème B dans Greenspan et Holmes [14] avec d'autres hypothèses. Dans notre résultat, le nombre de degrés de liberté  $N$  du système non perturbé est quelconque. Nous supposons que la solution  $x_0$ , du système non perturbé est non dégénérée; par contre dans [14], on suppose que  $x_0$  est une limite d'une suite de solution  $T_\alpha$ -périodiques du système non perturbé avec  $T_\alpha \rightarrow +\infty$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ . Dans Greenspan et Holmes [14], on trouve une application à l'équation de Duffing suivante :

$$\ddot{y} - y + y^3 = \epsilon(\gamma \cos(\omega t) - \delta \dot{y}).$$

Le plan de l'article est le suivant.

Dans le paragraphe 1, on met en évidence en tout point de la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ , une situation de bifurcation dans l'espace orthogonal à l'espace tangent à la courbe  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ .

Dans le paragraphe 2, on suppose que  $x_0$  est non dégénérée, c'est-à-dire  $k = \dim E_0 = 1$ . Le théorème 1 montre, en utilisant la situation de bifurcation du paragraphe 1, l'existence de deux courbes  $\epsilon \rightarrow z_i(\epsilon)$ ,  $i = 1$  à 2, géométriquement distinctes, telles que, pour  $i = 1$  ou 2 :

- pour tout  $\epsilon \in ]-\eta, \eta[$ ,  $z_i(\epsilon)$  est une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$  du système (1);
- $\{(\epsilon, z_i(\epsilon)) \mid \epsilon \in ]-\eta, \eta[\} \cap \{(0, \tau \star x_0) \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(0, z_i(0))\}$ .

Le théorème 2 du paragraphe 3, donne une condition nécessaire pour conserver une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$  du système perturbé (1) proche d'une solution doublement asymptotique à zéro du système libre (2). Le théorème 3 donne une condition suffisante pour qu'un phénomène de bifurcation survienne, c'est-à-dire pour qu'il existe une fonction "régulière"  $\epsilon \rightarrow z(\epsilon)$ , définie dans un voisinage de zéro, telle que  $z(\epsilon)$  soit une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$  de (1) dans un voisinage de la famille à un paramètre  $\{\tau * x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ .

Dans le paragraphe 4, le théorème 4 donne un développement asymptotique à l'ordre un de la fonction  $\epsilon \rightarrow z(\epsilon)$ .

Dans le paragraphe 5, les résultats précédents sont appliqués à l'équation de Duffing et un système de type Hénon-Heiles [16].

### 1. Étude locale au voisinage d'une famille à un paramètre

On considère le système :

$$\dot{x} = h(x) + g(\epsilon, t, x) \tag{1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{2N}$ ,  $N \geq 1$  et

$$h : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

sont de classe  $C^{p-1}$ ,  $p \geq 2$ ,  $g$  est  $T$ -périodique par rapport à  $t$  et identiquement nulle pour  $\epsilon = 0$ . On suppose que le système non perturbé est hamiltonien avec  $h \equiv JH'$  et vérifie les hypothèses suivantes.

(H1)  $h(0) = 0$  et toutes les valeurs propres de  $E = h'(0) = JA$ , avec  $A = H''(0)$ , ont une partie réelle non nulle (c'est-à-dire que  $\bar{x} \equiv 0$  est une solution hyperbolique du système non perturbé).

(H2) Pour  $\epsilon = 0$ , le système non perturbé possède une solution  $x_0$  non identiquement nulle et doublement asymptotique à zéro. De plus, on suppose qu'il existe un réel  $1 < \beta < 2$  tel que :

$$x_0 \in L^\beta(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N} \text{ mesurable} \mid \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^\beta dt < \infty \right\}.$$

(H3) L'espace  $E_0$  des solutions doublement asymptotiques à zéro du système linéarisé autour de  $x_0$  :

$$\dot{y} = h'(x_0(t))y \tag{2}$$

est inclus dans  $L^\beta(\mathbb{R})$ .

*Remarques 1*

1) On vérifie sans peine que

$$x_0 \in C_0^p = \left\{ x \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \mid \lim_{\pm\infty} x^{(s)}(t) = 0, 0 \leq s \leq p \right\}$$

et que  $x_0^{(s)} \in L^\beta(\mathbb{R})$  pour  $0 \leq s \leq p$ .

2) Il est facile de voir que  $y_0 = \dot{x}_0$  est une solution doublement asymptotique à zéro de (2). Comme le système (2) est linéaire, alors

$$1 \leq k = \dim E_0 \leq 2N.$$

3) En utilisant (H3), on vérifie facilement que

$$E_0 \subset \{y \in C_0^{p-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N}) \mid y^{(s)} \in L^\beta(\mathbb{R}), 0 \leq s \leq p\}.$$

4) Dans le cas  $k = 1$ , l'hypothèse (H3) est contenue dans (H2) car

$$y_0 = \dot{x}_0 \in E_0 \cap L^\beta(\mathbb{R}).$$

Pour tout  $\epsilon$  voisin de zéro, on pose  $x = z + \gamma_\epsilon$ ; alors  $x$  est une solution doublement asymptotique à  $\gamma_\epsilon$  si et seulement si  $z$  est une solution doublement asymptotique à zéro du nouveau système :

$$\dot{z} = h(z) + (h(z + \gamma_\epsilon) - h(\gamma_\epsilon) - h(z) + g(\epsilon, t, z + \gamma_\epsilon) - g(\epsilon, t, \gamma_\epsilon)),$$

soit encore

$$\dot{z} = h(z) + K(\epsilon, t, z)$$

avec

$$K(\epsilon, t, z) = h(z + \gamma_\epsilon) - h(\gamma_\epsilon) - h(z) + g(\epsilon, t, z + \gamma_\epsilon) - g(\epsilon, t, \gamma_\epsilon).$$

Si on note

$$A = H''(0), \quad R(z) = H(z) - \frac{1}{2}Az \cdot z - H(0),$$

le système (1) est équivalent à

$$\dot{z} = JAz + JR'(z) + K(\epsilon, t, z), \tag{1_\epsilon}$$

où  $\begin{cases} R \text{ est } C^p, R(0) = R'(0) = R''(0) = 0; \\ K \text{ est } C^{p-1} \text{ et } K(0, t, z) = K(\epsilon, t, 0) = 0, \forall t, \epsilon, z. \end{cases}$

Soit  $E_\tau$  l'espace vectoriel des solutions doublement asymptotiques à zéro du système linéarisé autour de  $\tau \star x_0$  :

$$\dot{z} = JAz + JR''(\tau \star x_0(t))z. \quad (2\tau)$$

Soient  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$  une base orthonormée au sens  $L^2$  de  $E_0$ . On vérifie sans peine que  $\tau \star y_0, \tau \star y_1, \dots, \tau \star y_{k-1}$  est une base orthonormée au sens  $L^2$  de  $E_\tau$ . D'autre part, on démontre facilement que les applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow L^\beta(\mathbb{R}) \\ \tau \rightarrow \tau \star y_i \end{cases} \quad i = 0 \text{ à } k-1,$$

sont de classe  $C^{p-1}$ .

On note  $W^{1,\beta}(\mathbb{R}) = \{x \in L^\beta(\mathbb{R}) \mid \dot{x} \in L^\beta(\mathbb{R})\}$  et on définit l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : W^{1,\beta}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^\beta(\mathbb{R}) \\ z &\rightarrow \mathcal{A}z = J\dot{z} + Az; \end{aligned}$$

on démontre dans [1] que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme et que son inverse  $L : L^\beta(\mathbb{R}) \rightarrow W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  est défini par

$$Lu(t) = \int_{-\infty}^t e^{E(t-\tau)} P_s(Ju(\tau)) d\tau - \int_t^{+\infty} e^{E(t-\tau)} P_u(Ju(\tau)) d\tau,$$

où  $P_s$  (resp.  $P_u$ ) représente la projection sur le sous-espace stable (resp. instable). On montre aussi, qu'il existe  $c_1 > 0, c_2 > 0$  et  $c_3 > 0$  tels que, pour tout  $u \in L^\beta(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \|Lu\|_\beta &\leq c_1 \|u\|_\beta, \\ \|Lu\|_\alpha &\leq c_2 \|u\|_\beta, \\ \|Lu\|_\infty &\leq c_3 \left( \sup \left\{ \int_{s-B}^{s+B} |u(t)|^\beta dt; s \in \mathbb{R} \right\} \right)^{1/\beta}, \forall B > 1, \end{aligned} \quad (*)$$

avec  $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ .

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , on considère l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau : W^{1,\beta}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^\beta(\mathbb{R}) \\ z &\rightarrow \mathcal{L}_\tau z = \mathcal{A}z + R''(\tau \star x_0)z; \end{aligned}$$

on a le lemme suivant.

LEMME 1. — Sous les hypothèses (H1)-(H2)-(H3), on a :

- 1) l'opérateur  $\mathcal{L}_\tau$  est linéaire, continu et d'image fermée;
- 2)  $\mathcal{L}_\tau$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

*Démonstration*

1) Soit  $\tau \in \mathbb{R}$ . Il est clair que l'opérateur  $\mathcal{L}_\tau$  est linéaire, continu et que son noyau est égal à  $E_\tau$ . On note par  $Y_\tau$ , l'image de l'opérateur  $\mathcal{L}_\tau$ , et on vérifie facilement que :

$$y \in Y_0 \Leftrightarrow \tau \star y \in Y_\tau.$$

Il suffit donc de prouver que  $Y_0$  est un fermé de  $L^\beta(\mathbb{R})$ . Soit  $(v_n)$  une suite de  $Y_0$  convergente vers  $v$  dans  $L^\beta(\mathbb{R})$ , on a :

$$\exists x_n \in W^{1,\beta}(\mathbb{R}) \mid v_n = \mathcal{L}_0 x_n, \forall n.$$

Quitte à remplacer  $x_n$  par  $x_n - \sum_{i=0}^{k-1} (\int_{\mathbb{R}} x_n \cdot y_i) y_i$ , nous supposons que  $x_n$  est orthogonal au sens  $L^2$  à  $E_0$ . Soit  $u_n \in L^\beta(\mathbb{R})$  tel que  $x_n = Lu_n$ . Il suffit de démontrer que  $(u_n)$  est bornée dans  $L^\beta(\mathbb{R})$ ; en effet, quitte à extraire une sous-suite, on a :

$$\exists u \in L^\beta(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} (u_n) \text{ converge faiblement vers } u \text{ dans } L^\beta \\ (Lu_n) \text{ converge faiblement vers } Lu \text{ dans } L^\beta \end{cases};$$

d'où

$$(v_n) = (u_n + R''(x_0)Lu_n) \text{ converge faiblement vers } v = u + R''(x_0)Lu,$$

ce qui prouve que  $v = \mathcal{L}_0(Lu)$ . Supposons que  $(u_n)$  est non bornée dans  $L^\beta(\mathbb{R})$ , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\|u_n\|_\beta$  tend vers l'infini. On pose

$$\bar{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_\beta}, \quad \bar{v}_n = \frac{v_n}{\|u_n\|_\beta}, \quad \forall n,$$

d'où

$$\bar{v}_n = \bar{u}_n + R''(x_0)L\bar{u}_n.$$

Distinguons deux cas.

Premier cas :  $(\bar{u}_n)$  vérifie

$$\forall B > 0, \quad \sup \left\{ \int_{s-B}^{s+B} |\bar{u}_n(t)|^\beta dt \mid s \in \mathbb{R} \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (**)$$

D'après (\*),  $\|L\bar{u}_n\|_\infty$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini; d'autre part, l'application  $t \in \mathbb{R} \rightarrow R''(x_0(t))$  est continue et nulle à l'infini, d'où :

$$\exists C > 0, \quad \sup \left\{ \|R''(x_0(t))\|^\beta \mid |t| > C \right\} < \frac{1}{2^\beta c_1},$$

soit

$$\begin{aligned} \|R''(x_0)L\bar{u}_n\|_\beta^\beta &= \\ &= \int_{-C}^C \|R''(x_0(t))L\bar{u}_n(t)\|^\beta dt + \int_{|t| \geq C} \|R''(x_0(t))L\bar{u}_n(t)\|^\beta dt \\ &\leq \|L\bar{u}_n\|_\infty^\beta \int_{-C}^C \|R''(x_0(t))\|^\beta dt + \frac{1}{2^\beta c_1} \|L\bar{u}_n\|_\beta^\beta, \end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_n \|R''(x_0)L\bar{u}_n\|_\beta \leq \frac{1}{2},$$

ce qui contredit le fait que  $\|\bar{v}_n\|_\beta$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini et que :

$$1 = \|\bar{u}_n\|_\beta \leq \|R''(x_0)L\bar{u}_n\|_\beta + \|\bar{v}_n\|_\beta.$$

Deuxième cas :  $(\bar{u}_n)$  ne vérifie pas (\*\*), quitte à extraire une sous-suite, on a :

$$\exists \lambda \in ]0, 1[, \exists B_0 > 0; \forall n, \exists s_n \in \mathbb{R} : \int_{-B_0}^{B_0} |\bar{u}_n(t + s_n)|^\beta dt \geq \lambda. \quad (***)$$

Quitte à extraire encore une sous-suite de  $(s_n)$ , on supposera qu'elle admet une limite  $s$  quand  $n$  tend vers l'infini, avec  $|s| \leq +\infty$ . Soit  $w \in L^\beta(\mathbb{R})$  une limite faible de  $w_n = \bar{u}_n(\cdot + s_n)$ . Par une simple application du théorème d'Ascoli, on montre facilement que  $(Lw_n)$  converge uniformément vers  $Lw$  sur tout intervalle  $[-B, B]$ ,  $B > 0$ . En particulier,  $(Lw_n)$  converge vers  $(Lw)$  dans  $L^\beta([-B, B])$ ,  $B > 0$ . D'autre part,

$$\bar{v}_n(\cdot + s_n) = w_n + R''(x_0(\cdot + s_n))Lw_n, \quad \forall n,$$

et  $\bar{v}_n(\cdot + s_n)$  converge vers zéro dans  $L^\beta(\mathbb{R})$ . D'où, pour tout  $B > 0$ ,  $(w_n)$  converge dans  $L^\beta([-B, B])$  vers  $w$  avec

$$w = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| = +\infty, \\ -R''(x_0(\cdot + s))Lw & \text{si } |s| < +\infty; \end{cases}$$

dans ce dernier cas, on pose  $x = Lw$ , on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_s x = 0, \\ \forall y \in E_s, \quad \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot y(t) dt = \lim_n \int_{\mathbb{R}} Lw_n(t) \cdot y(t) dt = 0; \end{cases}$$

d'où,  $x = w = 0$ . Ce qui prouve en particulier que  $(w_n)$  converge vers zéro dans  $L^\beta([-B_0, B_0])$ , d'où la contradiction avec (\*\*\*) .

2) On note par  $\mathcal{L}_0^*$ , l'opérateur adjoint de  $\mathcal{L}_0$  :

$$\mathcal{L}_0^* : L^\alpha(\mathbb{R}) \rightarrow (W^{1,\beta}(\mathbb{R}))^*$$

pour tout  $v \in L^\alpha(\mathbb{R})$ , pour tout  $x \in W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  :

$$(\mathcal{L}_0^* v)(x) = \int_{\mathbb{R}} v(t) \cdot \mathcal{L}_0 x(t) dt .$$

D'après le théorème de l'image fermée, on a :

$$\begin{aligned} Y_0 &= (\text{Ker } \mathcal{L}_0^*)^\perp \\ &= \text{orthogonal au sens de la dualité du noyau de } \mathcal{L}_0^* \end{aligned}$$

Soit  $v \in \text{Ker } \mathcal{L}_0^*$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} v(t) \cdot \mathcal{L}_0 x(t) dt, \quad \forall x \in W^{1,\beta}(\mathbb{R}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(t) \cdot [J\dot{x}(t) + Ax(t) + R''(x_0(t))x(t)] dt, \quad \forall x \in W^{1,\beta}(\mathbb{R}); \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} Jv(t) \cdot \dot{x}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot [Av(t) + R''(x_0(t))v(t)] dt, \quad \forall x \in W^{1,\beta}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \dot{v} \in L^\alpha(\mathbb{R}), \\ -J\dot{v} = Av + R''(x_0)v; \end{cases}$$

ce qui implique que  $v \in E_0$  et par suite  $\text{Ker } \mathcal{L}_0^* \subset E_0$ . On vérifie facilement que  $E_0 \subset (Y_0)^\perp = \text{Ker } \mathcal{L}_0^*$ ; d'où  $\text{Ker } \mathcal{L}_0^* = E_0$ .  $\square$

Il est connu que  $W^{1,\beta}(\mathbf{R}) \subset C_0(\mathbf{R}, \mathbb{R}^{2N})$ , on a alors le lemme suivant.

LEMME 2. — Soit  $\varphi : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$  de classe  $C^{p-1}$  telle que  $\varphi(0) = 0$ . Alors l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : W^{1,\beta}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^\beta(\mathbf{R}) \\ z &\rightarrow \varphi(z) \end{aligned}$$

est aussi de classe  $C^{p-1}$ .

*Démonstration*

On vérifie facilement que  $\Phi$  est bien définie. Soit  $z, h \in W^{1,\beta}(\mathbb{R})$ , on a :

$$\|\Phi(z+h) - \Phi(z) - \varphi'(z)h\|_\beta = \left\| \int_0^1 (\varphi'(z+\delta h) - \varphi'(z))h \, d\delta \right\|_\beta,$$

d'autre part,  $z$  et  $h$  sont dans  $C_0(\mathbf{R}, \mathbb{R}^{2N})$ ; d'où :

$$\exists r > 0 \mid z(t) + \lambda h(t) \in \bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \mid \|x\| \leq r\}, \forall t \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1].$$

Or  $\varphi'$  est uniformément continue sur  $\bar{B}$ . D'où

$$\forall c > 0, \exists \eta > 0; \left( \|h\|_\infty < \eta \Rightarrow \|\Phi(z+h) - \Phi(z) - \varphi'(z)h\|_\beta \leq c \|h\|_\beta \right).$$

D'autre part, l'injection de  $W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbf{R})$  est continue. D'où  $\Phi$  est différentiable et on a :

$$\Phi'(z)h = \varphi'(z)h.$$

En utilisant encore la continuité uniforme de  $\varphi'$  sur les boules fermées de  $\mathbb{R}^{2N}$ , on montre facilement que  $\Phi'$  est continue. Avec la même technique on démontre sans peine que  $\Phi$  est  $C^{p-1}$ .  $\square$

PROPOSITION 1. — Sous les hypothèses (H1)-(H2)-(H3). Il existe  $\epsilon_0 > 0$  et une application  $z$  de  $] -\epsilon_0, \epsilon_0[ \times \mathbb{R}$  dans  $W^{1,\beta}(\mathbf{R})$  de classe  $C^{p-1}$  tels que :

- a)  $z(0, \tau) = \tau \star x_0, \forall \tau \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $z(\epsilon, \tau + T) = T \star z(\epsilon, \tau), \forall \epsilon, \forall \tau$ ;
- c)  $\forall i = 0, k-1, \int_{\mathbb{R}} (z(\epsilon, \tau)(t) - \tau \star x_0(t)) \cdot \tau \star y_i(t) \, dt = 0, \forall \tau, \forall \epsilon$ ;
- d)  $J\dot{z} + Az + R'(z) - JK(\epsilon, \cdot, z) \in E_\tau, \forall \epsilon, \forall \tau,$   
avec  $z = z(\epsilon, \tau)$  et  $\dot{z} = \frac{d}{dt} z(\epsilon, \tau)$ ;
- e)  $\forall \tau_1, \tau_2 \in [0, T[, \tau_1 \neq \tau_2 \Rightarrow z(\epsilon, \tau_1) \neq z(\epsilon, \tau_2 + \ell T), \forall \ell \in \mathbb{Z}, \forall \epsilon.$

*Démonstration*

De la démonstration du lemme 1, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , il découle que

$$\begin{aligned} W^{1,\beta}(\mathbf{R}) &= E_\tau \oplus X_\tau, \\ L^\beta(\mathbf{R}) &= E_\tau \oplus Y_\tau, \end{aligned}$$

avec  $E_\tau = \text{noyau de } \mathcal{L}_\tau$

$$\begin{aligned} X_\tau &= (E_\tau)^\perp = \text{orthogonal au sens } L^2 \text{ de } E_\tau \text{ dans } W^{1,\beta}(\mathbb{R}) \\ Y_\tau &= (E_\tau)^\perp = \text{orthogonal au sens de la dualité de } E_\tau \text{ dans } L^\beta(\mathbb{R}) \\ &= \mathcal{L}_\tau(W^{1,\beta}(\mathbf{R})). \end{aligned}$$

On considère l'application  $F$  de  $\mathbf{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbf{R}^k \times L^\beta(\mathbf{R})$  définie par

$$\begin{aligned} F(\epsilon, \tau, \lambda, z) &= \left( \int_{\mathbb{R}} (z - \tau \star x_0) \cdot \tau \star y_0, \dots, \int_{\mathbb{R}} (z - \tau \star x_0) \cdot \tau \star y_{k-1}, \right. \\ &\quad \left. \mathcal{A}z + R'(z) - JK(\epsilon, \cdot, z) - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \tau \star y_i \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2, on montre facilement que  $F$  est de classe  $C^{p-1}$ . Vérifions que  $(\partial F / \partial Z)(0, \tau, 0, \tau \star x_0)$ , où  $Z = (\lambda, z) \in \mathbb{R}^k \times W^{1,\beta}(\mathbf{R})$ , est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Z}(0, \tau, 0, \tau \star x_0)(Z) &= \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} z \cdot \tau \star y_0, \dots, \int_{\mathbb{R}} (z \cdot \tau \star y_{k-1}, \mathcal{L}_\tau z - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \tau \star y_i) \right); \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Z}(0, \tau, 0, \tau \star x_0)(Z) = 0 &\Leftrightarrow z \in X_\tau \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\tau z = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \tau \star y_i \in E_\tau, \\ &\Leftrightarrow z = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0. \end{aligned}$$

Soit  $(s, y) \in \mathbb{R}^k \times L^\beta(\mathbf{R})$ , on a :

$$\exists x \in X_\tau, \exists \lambda \in \mathbb{R}^k \mid y = \mathcal{L}_\tau x - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \tau \star y_i;$$

on pose  $Z = (\lambda, x + \sum_{i=0}^{k-1} s_i \tau \star y_i)$ , on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial Z}(0, \tau, 0, \tau \star x_0)(Z) = (s, y).$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on a : pour tout réel  $\mu$ , il existe  $\epsilon_\mu > 0$ , un voisinage ouvert  $V(\mu)$  de  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ , un voisinage ouvert  $V(\mu \star x_0)$  de  $\mu \star x_0$  dans  $W^{1,\beta}(\mathbb{R})$ , un voisinage ouvert  $V(0)$  de zéro dans  $\mathbb{R}^k$  et deux applications de classe  $C^{p-1}$  :

$$\begin{aligned} z_\mu : ] - \epsilon_\mu, \epsilon_\mu[ \times V(\mu) &\rightarrow V(\mu \star x_0) \\ (\epsilon, \tau) &\rightarrow z_\mu(\epsilon, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_\mu : ] - \epsilon_\mu, \epsilon_\mu[ \times V(\mu) &\rightarrow V(0) \\ (\epsilon, \tau) &\rightarrow \lambda_\mu(\epsilon, \tau), \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{cases} (\epsilon, \tau, \lambda, x) \in ] - \epsilon_\mu, \epsilon_\mu[ \times V(\mu) \times V(0) \times V(\mu \star x_0) \\ F(\epsilon, \tau, \lambda, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda_\mu(\epsilon, \tau) \\ x = z_\mu(\epsilon, \tau). \end{cases}$$

En particulier pour tout  $\tau \in V(\mu)$ , on a :

$$\begin{cases} \lambda_\mu(0, \tau) = 0 \\ z_\mu(0, \tau) = \tau \star x_0. \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$F(\epsilon, \tau, \lambda, x) = 0 \Rightarrow F(\epsilon, \tau + \ell T, \lambda, (\ell T) \star x) = 0, \forall \ell \in \mathbb{Z};$$

d'où

$$\forall (\epsilon, \tau) \in ] - \epsilon_\mu, \epsilon_\mu[ \times V(\mu), \begin{cases} \lambda_{\mu+\ell T}(\epsilon, \tau + \ell T) = \lambda_\mu(\epsilon, \tau) \\ z_{\mu+\ell T}(\epsilon, \tau + \ell T) = (\ell T) \star z_\mu(\epsilon, \tau). \end{cases}$$

Comme l'intervalle  $[0, T]$  est un compact :

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_j \in [0, T] \mid [0, T] \subset \bigcup_{i=1, j} V(\mu_i).$$

On pose  $\bar{\epsilon} = \min\{\bar{\epsilon}_{\mu_i} \mid i = 1 \text{ à } j\}$  et on définit les fonctions  $z$  et  $\lambda$  respectivement de  $] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \times \mathbb{R}$  dans  $W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  et de  $] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\forall (\epsilon, \tau) \in ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \times \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda(\epsilon, \tau) = \lambda_{\mu_i}(\epsilon, \tau - \ell T) \\ z(\epsilon, \tau) = (\ell T) \star z_{\mu_i}(\epsilon, \tau - \ell T), \end{cases}$$

avec  $i \in \{1, \dots, j\}$ ,  $\ell \in \mathbb{Z} \mid \tau - \ell T \in V(\mu_i)$ .

On vérifie facilement que la fonction  $z$  est de classe  $C^{p-1}$  et vérifie a), b), c) et d). Soient  $\tau_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad \tau_1 \neq \tau_2 + \ell T,$$

on a

$$\|\tau_1 \star x_0 - (\tau_2 + \ell T) \star x_0\|_{W^{1,\beta}} > 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z},$$

et

$$\liminf_{|\ell| \rightarrow \infty} \|\tau_1 \star x_0 - (\tau_2 + \ell T) \star x_0\|_{W^{1,\beta}} \geq \|\tau_1 \star x_0\|_{W^{1,\beta}} = \|x_0\|_{W^{1,\beta}} > 0;$$

d'où

$$\delta = \inf_{\ell \in \mathbb{Z}} \|\tau_1 \star x_0 - (\tau_2 + \ell T) \star x_0\|_{W^{1,\beta}} > 0.$$

D'autre part,  $z^{-1}(B(\tau_1 \star x_0, \delta/2))$  et  $z^{-1}(B(\tau_2 \star x_0, \delta/2))$  sont deux ouverts de  $] -\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \times \mathbb{R}$ ; par conséquent, il existe  $\epsilon_0 > 0$ , un voisinage ouvert  $V(\tau_1)$  de  $\tau_1$  dans  $\mathbb{R}$  et un voisinage  $V(\tau_2)$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$z(] -\epsilon_0, \epsilon_0[ \times V(\tau_1)) \subset B(\tau_1 \star x_0, \delta/2),$$

$$z(] -\epsilon_0, \epsilon_0[ \times V(\tau_2)) \subset B(\tau_2 \star x_0, \delta/2),$$

d'où

$$z(\epsilon, \tau_1) \neq (\ell T) \star z(\epsilon, \tau_2), \quad \forall \ell \in \mathbb{Z},$$

car  $B(\tau_1 \star x_0, \delta/2) \cap B((\tau_2 + \ell T) \star x_0, \delta/2) = \emptyset$ .

## 2. Bifurcation au voisinage d'une famille à un paramètre

On considère toujours la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$  avec  $x_0 \in W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  : solution doublement asymptotique à zéro du système (1<sub>0</sub>).

DÉFINITION 1. — On dit que l'orbite homocline  $x_0$  est non dégénérée si

$$\dim E_0 = 1.$$

Comme  $E_0$  représente l'espace tangent à la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$  au point  $x_0$  dans  $W^{1,\beta}(\mathbb{R})$ , l'hypothèse de non dégénérescence veut dire "en gros" que la famille  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$  est isolée dans l'ensemble des solutions doublement asymptotiques à zéro de (1<sub>0</sub>).

**THÉORÈME 1.** — *Sous les hypothèses (H1)-(H2). On suppose de plus, que  $x_0$  est non dégénérée et que  $g$  est hamiltonienne; alors, il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que, pour tout  $\epsilon \in ]-\epsilon_1, \epsilon_1[ \setminus \{0\}$ , l'équation  $(1_\epsilon)$  admet, dans un voisinage de la famille à un paramètre  $\{\tau \star x_0, \tau \in \mathbb{R}\}$ , au moins deux solutions  $z_1(\epsilon)$ ,  $z_2(\epsilon)$  doublement asymptotiques à zéro et géométriquement distinctes (i.e.  $z_1(\epsilon) \neq (\ell T) \star z_2(\epsilon)$ , pour tout  $\ell \in \mathbb{Z}$ ).*

*Démonstration*

Comme  $g$  est hamiltonienne, il existe une fonction réelle  $f$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$K(\epsilon, t, z) = J f'_z(t, \epsilon, z).$$

Pour tout  $\epsilon \in ]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ , on pose :

$$h_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tau \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}z \cdot z + R(z) + f(t, \epsilon, z) \right] dt$$

avec  $z = z(\epsilon, \tau)(t)$ ; on démontre sans peine que  $h_\epsilon$  est de classe  $C^{p-1}$  et vérifie :

$$h_\epsilon(\tau + T) = h_\epsilon(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

D'où, il existe  $\tau_1(\epsilon) \neq \tau_2(\epsilon) \in [0, T[$  tels que

$$h_\epsilon(\tau_1(\epsilon)) = \min\{h_\epsilon(\tau) ; \tau \in [0, T]\} = \min\{h_\epsilon(\tau) ; \tau \in \mathbb{R}\},$$

$$h_\epsilon(\tau_2(\epsilon)) = \max\{h_\epsilon(\tau) ; \tau \in [0, T]\} = \max\{h_\epsilon(\tau) ; \tau \in \mathbb{R}\};$$

par conséquent

$$\frac{d}{d\tau} h_\epsilon(\tau_1(\epsilon)) = 0, \quad i = 1 \text{ ou } 2.$$

D'autre part, d'après la proposition 1 :

$$\forall \epsilon \in ]-\epsilon_0, \epsilon_0[, \forall \tau \in \mathbb{R}, \exists \lambda(\epsilon, \tau) \in \mathbb{R} \mid$$

$$\mathcal{A}z(\epsilon, \tau) + R'(z(\epsilon, \tau)) + f'_z(\cdot, \epsilon, z(\epsilon, \tau)) = \lambda(\epsilon, \tau) \tau \star y_0.$$

D'où

$$\lambda(\epsilon, \tau_i(\epsilon)) \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial z}{\partial \tau}(\epsilon, \tau_i(\epsilon)) \cdot \tau_i(\epsilon) \star y_0 \right] = 0, \quad i = 1 \text{ ou } 2;$$

or

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial z}{\partial \tau}(0, \tau) \cdot \tau \star y_0 = \int_{\mathbb{R}} |y_0|^2 > 0 \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{R}.$$

Par continuité, on obtient :

$$\exists 0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_0 \mid \forall \epsilon \in ]-\epsilon_1, \epsilon_1[, \forall \tau \in \mathbb{R}; \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial z}{\partial \tau}(\epsilon, \tau) \cdot \tau \star y_0 \right| > 0.$$

Soit

$$\lambda(\epsilon, \tau_i(\epsilon)) = 0, \quad \forall \epsilon \in ]-\epsilon_1, \epsilon_1[, \quad i = 1 \text{ ou } 2;$$

ce qui prouve que  $z_1(\epsilon) = z(\epsilon, \tau_1(\epsilon))$  et  $z_2(\epsilon) = z(\epsilon, \tau_2(\epsilon))$  sont deux solutions doublement asymptotiques à zéro de  $(1_\epsilon)$ , et d'après e) de la proposition 1, on a :

$$z_1(\epsilon) \neq (\ell T) \star z_2(\epsilon), \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}.$$

### Remarques

- i) Soit  $W_\epsilon^u(0)$  (resp.  $W_\epsilon^s(0)$ ) la variété instable (resp. stable) du système  $(1_\epsilon)$ . En utilisant (H1), il est facile de voir que l'intersection de  $W_\epsilon^u(0)$  et  $W_\epsilon^s(0)$  au point  $z = 0$  est transversale. Dans le cas où la perturbation est non autonome; il est fort probable que l'intersection de la variété stable  $W_\epsilon^s(0)$  et de la variété instable  $W_\epsilon^u(0)$  est transversale dans un voisinage  $U$  de  $z = 0$ . Par conséquent, pour  $k$  assez grand, l'intersection de  $W_\epsilon^u(0)$  et  $W_\epsilon^s(0)$  au point  $(kT) \star z_i(\epsilon)$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , est transversale; ce qui prouve que les orbites  $z_1(\epsilon)$  et  $z_2(\epsilon)$  sont des orbites homoclines transversales.
- ii) Si l'orbite homocline  $z_1(\epsilon)$  ou  $z_2(\epsilon)$  est transversale, le théorème de Smale [17] montre l'existence d'une infinité d'orbites homoclines du système  $(1_\epsilon)$ .

### 3. Conditions de bifurcation homocline

On considère la fonction de Melnikov (voir [14], [15]) :

$$M(\tau) = \int_{\mathbb{R}} h(x_0(t - \tau)) \cdot Jg'_\epsilon(0, t, x_0(t - \tau)) dt.$$

On pose :

$$S = \{(\epsilon, z) \in \mathbb{R} \times W^{1,\beta}(\mathbb{R}) \mid z \text{ est une solution de } (1_\epsilon)\},$$

$$Z = \{(0, \tau \star x_0) \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

#### 3.1. Condition nécessaire de bifurcation

**THÉORÈME 2.** — *Sous les hypothèses (H1)-(H2). De plus, on suppose que  $x_0$  est non dégénérée. Soit  $\underline{\tau} \in \mathbb{R}$  tel que  $M(\underline{\tau}) \neq 0$ . Alors, il existe un voisinage  $W$  de  $(0, x_0(\cdot - \underline{\tau}))$  dans  $\mathbb{R} \times W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\epsilon, z) \in W \\ \text{et} \\ z \text{ est solution de } (1_\epsilon) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \epsilon = 0 \\ \text{et} \\ z \in Z. \end{array} \right.$$

*Démonstration*

Soit  $\tau = -\underline{\tau}$ . On définit l'application  $G$  de  $\mathbb{R} \times W^{1,\beta}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R} \times L^\beta(\mathbb{R})$  par :

$$G(\epsilon, z) = \left( \int_{\mathbb{R}} z \cdot \tau \star y_0, \mathcal{A}z + R'(z) - JK(\epsilon, \cdot, z) \right).$$

$G$  est une application de classe  $C^{p-1}$ , et on a :

$$G(0, \tau \star x_0)(\epsilon, z) = \left( \int_{\mathbb{R}} z \cdot \tau \star y_0, \mathcal{A}z + R''(\tau \star x_0)z - \epsilon JK'_\epsilon(0, \cdot, \tau \star x_0) \right)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}} z \cdot \tau \star y_0, \mathcal{L}_\tau z - \epsilon JK'_\epsilon(0, \cdot, \tau \star x_0) \right).$$

Vérifions que  $G(0, \tau \star x_0)$  est un isomorphisme. Soit  $(s, u) \in \mathbb{R} \times L^\beta(\mathbb{R})$ , l'opérateur  $\mathcal{L}_\tau$  réalise un isomorphisme entre  $X_\tau$  et  $Y_\tau$  et on a :

$$W^{1,\beta}(\mathbb{R}) = E_\tau \oplus X_\tau,$$

$$L^\beta(\mathbb{R}) = E_\tau \oplus X_\tau;$$

d'où

$$\begin{aligned} \exists ! c \in \mathbb{R}, \exists u_2 \in Y_\tau \mid u &= c \tau \star y_0 + u_2, \\ \exists ! d \in \mathbb{R}, \exists k_2 \in Y_\tau \mid JK'_\epsilon(0, \cdot, \tau \star x_0) &= d \tau \star y_0 + k_2. \end{aligned}$$

D'autre part, un calcul simple nous donne :

$$K'_\epsilon(0, t, x) = h'(x)y(t) - \dot{y}(t) + g'_\epsilon(0, t, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2N}, t \in \mathbb{R},$$

avec  $y$  est l'unique solution  $T$ -périodique de :

$$\dot{y} = h'(0)y + g'_\epsilon(0, t, 0),$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tau \star y_0(t) \cdot JK'_\epsilon(0, t, \tau \star x_0(t)) dt &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dot{x}_0(t + \tau) \cdot JK'_\epsilon(0, t, x_0(t + \tau)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dot{x}_0(t + \tau) \cdot [Jh'(x_0(t + \tau))y(t) - J\dot{y}(t) + Jg'_\epsilon(0, t, x_0(t + \tau))] dt \\ &= M(-\tau) + \int_{\mathbb{R}} \dot{x}_0(t + \tau) \cdot (-H''(x_0(t + \tau))y(t) - J\dot{y}(t)) dt \\ &= M(-\tau) - \int_{\mathbb{R}} [H''(x_0(t + \tau))\dot{x}_0(t + \tau)y(t) + H'(x_0(t + \tau))\dot{y}(t)] dt \\ &= M(-\tau) - \int_{\mathbb{R}} [H'(x_0(t + \tau))y(t)]' dt \\ &= M(\tau) \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $d$  est non nul. Soient  $\epsilon = -c/d$ ,  $z_2 = \mathcal{L}_\tau^{-1}(\epsilon k_2 + u_2)$  et  $z = s \tau \star y_0 + z_2$ . On vérifie facilement que  $(\epsilon, z)$  est l'unique antécédent de  $(s, u)$ .

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert  $W_1$  de  $(0, \tau \star x_0)$  et un voisinage  $V_1$  de  $G(0, \tau \star x_0) = (0, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times L^\beta(\mathbb{R})$  tels que,  $G$  soit un  $C^{p-1}$  difféomorphisme de  $W_1$  sur  $V_1$ . Comme  $S = G^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$ ,  $S \cap W_1$  est une variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension un. Or,  $Z$  est une variété de dimension un et  $Z \subset S$ . D'où, il existe un voisinage ouvert  $W \subset W_1$  de  $(0, \tau \star x_0)$  tel que  $S \cap W = Z \cap W$ . Autrement dit, si  $M(\tau) \neq 0$ , il n'existe pas de solution de  $(1_\epsilon)$  au voisinage de  $x_0(\cdot - \tau)$  pour  $\epsilon \neq 0$ . La condition nécessaire de bifurcation au point  $x_0(\cdot - \tau)$  est donc

$$M(\tau) = 0. \square$$

### 3.2. Condition suffisante de bifurcation

**THÉORÈME 3.** — *Sous les hypothèses (H1)-(H2). De plus, on suppose que  $x_0$  est non dégénérée. Soit  $\tau \in \mathbb{R}$  tel que*

$$M(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad M'(\tau) \neq 0.$$

*Alors, il existe  $\bar{\epsilon} > 0$ , une application*

$$x : ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \rightarrow W^{1,\beta}(\mathbb{R})$$

*de classe  $C^{p-3}$  et un voisinage  $W$  de  $(0, x_0(\cdot - \tau))$  tels que :*

*$x(\epsilon)$  est une solution doublement asymptotique à zéro de  $(1_\epsilon)$ ,*

$$\begin{aligned} & \{(\epsilon, x(\epsilon)) ; \epsilon \in ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \} \subset W, \\ & \{(\epsilon, x(\epsilon)) ; \epsilon \in ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[ \} \cap Z = \{(0, x_0(\cdot - \tau))\}. \end{aligned}$$

*Démonstration*

D'après la proposition 1, il existe  $\epsilon_0 > 0$  et une application :

$$\begin{aligned} z : ] - \epsilon_0, \epsilon_0[ \times \mathbb{R} &\rightarrow W^{1,\beta}(\mathbb{R}) \\ (\epsilon, \tau) &\rightarrow z(\epsilon, \tau) \end{aligned}$$

de classe  $C^{p-1}$  tels que :

$$\begin{aligned} z(0, \tau) &= \tau \star x_0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}z(\epsilon, \tau) + R'(z(\epsilon, \tau)) - JK(\epsilon, \cdot, z(\epsilon, \tau)) &\in E_\tau. \end{aligned}$$

Soit  $\lambda$  l'application de  $] - \epsilon_0, \epsilon_0[ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\lambda(\epsilon, \tau) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{A}z(\epsilon, \tau) + R'(z(\epsilon, \tau)) - JK(\epsilon, \cdot, z(\epsilon, \tau))) \cdot \tau \star y_0 \, dt ;$$

il est clair que  $\lambda$  est de classe  $C^{p-1}$  et que  $\lambda(0, \tau) = 0$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ . Par un simple calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}(0, -\tau) &= -M(\tau) = 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}(0, -\tau) &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau^2}(0, -\tau) = 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau \partial \epsilon}(0, -\tau) &= M'(\tau) \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\lambda''(0, -\underline{\tau})$  est inversible et on a :

$$\det \lambda''(0, -\underline{\tau}) < 0.$$

D'après le lemme de Morse, il existe un  $C^{p-3}$ -difféomorphisme  $\rho$  d'un voisinage  $] - \eta, \eta[ \times ] - \eta, \eta[$  de  $(0, 0)$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(0, -\underline{\tau})$  tel que :

$$\begin{aligned} \rho(0, 0) &= (0, -\underline{\tau}), \\ \rho(r, s) &= (\epsilon(r, s), \tau(r, s)) : |r| < \eta, |s| < \eta, \\ \lambda(\rho(r, s)) &= r^2 - s^2 : |r| < \eta, |s| < \eta. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda(\rho(r, r)) &= 0 : |r| < \eta, \\ \lambda(\rho(r, -r)) &= 0 : |r| < \eta. \end{aligned}$$

Or,  $\lambda(0, \tau) = 0$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ; d'où l'une des deux courbes précédentes coïncide avec la courbe  $r \rightarrow (0, r - \underline{\tau})$  sur l'intervalle  $] - \eta, \eta[$ . Par conséquent, l'une des applications suivantes est égale à l'application nulle de  $] - \eta, \eta[$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \gamma : r &\rightarrow \epsilon(r, r) \\ \xi : r &\rightarrow \epsilon(r, -r). \end{aligned}$$

Utilisant le fait que  $\rho$  est un difféomorphisme, on obtient :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial r}(0, 0) + \frac{\partial \epsilon}{\partial s}(0, 0) \neq 0,$$

ou

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial r}(0, 0) - \frac{\partial \epsilon}{\partial s}(0, 0) \neq 0,$$

ce qui prouve que l'application non nulle  $\gamma$  ou  $\xi$  est un difféomorphisme de classe  $C^{p-3}$  d'un voisinage  $] - \delta, \delta[$ ,  $0 < \delta < \eta$ , dans un voisinage  $] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[$  de zéro dans  $\mathbb{R}$ . Il existe donc une application  $\tau(\cdot)$  de  $] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^{p-3}$  telle que :

$$\lambda(\epsilon, \tau(\epsilon)) = 0, \quad \forall \epsilon \in ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[.$$

On pose alors  $x(\epsilon) = z(\epsilon, \tau(\epsilon))$  pour  $\epsilon \in ] - \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}[$ . □

#### 4. Développement asymptotique

Dans cette partie, on suppose que les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées. La condition nécessaire de bifurcation au point  $\bar{\tau} \star x_0$  (voir démonstration du théorème 2) est équivalente à :

$$JK'_\epsilon(0, \cdot, \bar{\tau} \star x_0) \in Y_{\bar{\tau}}.$$

Comme  $\mathcal{L}_{\bar{\tau}}$  réalise un isomorphisme entre  $X_{\bar{\tau}}$  et  $Y_{\bar{\tau}}$ , le système suivant :

$$\begin{cases} -J\dot{z} = Az + R''(\bar{\tau} \star x_0)z - JK'_\epsilon(0, t, \bar{\tau} \star x_0(t)), \\ t \in \mathbb{R}, \\ z = z(t) \in \mathbb{R}^{2N}, \end{cases} \quad (3\bar{\tau})$$

admet une solution unique  $z_0$  doublement asymptotique à zéro et appartenant à  $X_{\bar{\tau}}$ , c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} z_0(t) \cdot \bar{\tau} \star y_0(t) dt = 0.$$

Utilisant c) de la proposition 1, on vérifie facilement que :

$$z_0 = \frac{\partial}{\partial \epsilon} z(0, \bar{\tau}).$$

On pose :

$$\begin{aligned} a &= M'(-\bar{\tau}), \\ b &= \int_{\mathbb{R}} [Jh''(\bar{\tau} \star x_0)z_0z_0 + JK''_{\epsilon\epsilon}(0, t, \bar{\tau} \star x_0) + \\ &\quad + 2K''_{z\epsilon}(0, t, \bar{\tau} \star x_0)z_0] \cdot \bar{\tau} \star y_0 dt. \end{aligned}$$

On a le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.** — *Sous les Hypothèses (H1)-(H2). De plus, on suppose que  $p$  est supérieur ou égal à 4 et qu'il existe  $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$  tel que :*

$$M(-\bar{\tau}) = 0 \quad \text{et} \quad M'(-\bar{\tau}) \neq 0.$$

*Soit  $x_1 = z_0 + (b/2a)\bar{\tau} \star y_0$ . Alors la fonction  $\epsilon \rightarrow x(\epsilon)$  donnée par le théorème 3 admet le développement asymptotique suivant :*

$$x(\epsilon) = \bar{\tau} \star x_0 + \epsilon \cdot x_1 + o(\epsilon),$$

*avec  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (o(\epsilon)/\epsilon) = 0$ .*

*Démonstration*

L'application  $\epsilon \rightarrow x(\epsilon) = z(\epsilon, \tau(\epsilon))$  est de classe  $C^{p-3}$  dans un voisinage  $W$  de zéro et comme  $p \geq 4$ , il suffit de prouver que  $x'(0) = x_1$ . Autrement dit :

$$\frac{\partial z}{\partial \epsilon}(0, \bar{\tau}) + \tau'(0) \frac{\partial z}{\partial \tau}(0, \bar{\tau}) = z_0 + \frac{b}{2a} \bar{\tau} * y_0.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon, \tau(\epsilon)) &= 0, \quad \forall \epsilon \in W, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}(0, \bar{\tau}) &= \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}(0, \bar{\tau}) = 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \epsilon^2}(0, \bar{\tau}) &= -b, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \epsilon \partial \tau}(0, \bar{\tau}) &= a, \end{aligned}$$

d'où

$$\tau'(\epsilon) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}(\epsilon, \tau(\epsilon)) + \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon}(\epsilon, \tau(\epsilon)) = 0, \quad \forall \epsilon \in W.$$

En divisant l'équation ci-dessus par  $\epsilon$  et en faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro, on obtient :

$$\tau'(0) = \frac{b}{2a},$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \epsilon}(0, \bar{\tau}) &= z_0, \\ \frac{\partial z}{\partial \tau}(0, \bar{\tau}) &= \bar{\tau} * y_0. \end{aligned}$$

## 5. Exemples de bifurcation

Dans ce paragraphe, on applique les résultats des paragraphes 2 et 3 à deux exemples. Le premier exemple est un système à un degré de liberté : équation de Duffing (voir [14]). Le second exemple est un système à deux degrés de liberté : système de type Hénon-Heiles (voir [16]).

### 5.1. Équation de Duffing

$$\ddot{x} - x + x^3 = b(\epsilon, t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

avec

$$b(0, t, x, y) = 0, \quad \forall t, x, y \in \mathbb{R},$$

et  $b$  est  $T$ -périodique par rapport à  $t$ .

On pose  $u = x$  et  $v = \dot{x}$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= u - u^3 + b(\epsilon, t, u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

soit encore

$$\dot{z} = h(z) + g(\epsilon, t, z) \tag{3}$$

avec  $z = (u, v)$ ,  $h(z) = (v, u - u^3)$  et  $g(\epsilon, t, z) = (0, b(\epsilon, t, u, v))$ .

Pour  $\epsilon = 0$ , le système non perturbé

$$\dot{z} = h(z)$$

vérifie (H1) et (H2) avec

$$x_0(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}(t)}, -\frac{\sqrt{2} \operatorname{th}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \right).$$

D'autre part, on vérifie sans peine que la solution du système linéarisé autour de  $x_0$

$$\dot{z} = h'(x_0(t))z$$

qui vérifie la condition initiale

$$z(t_0) = (1, 1),$$

avec  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que  $1 - (6/\operatorname{ch}^2(t_0)) > 1/2$ , tend vers l'infini quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, la dimension de  $E_0$  est égale à un; ce qui prouve que  $x_0$  est non dégénérée.

*Premier cas* :  $b(\epsilon, t, u, v) = b(\epsilon, t, u)$

D'après le théorème A, pour tout  $\epsilon$  voisin de zéro, l'équation (1) admet au moins deux orbites homoclines  $z_1, z_2$ , géométriquement distinctes ( $z_1(\cdot) \neq z_2(\cdot + \ell T)$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ ).

Deuxième cas :  $b(\epsilon, t, u, v) = \epsilon(\gamma \cos(\omega t) - \delta v)$

D'après un calcul fait dans [14], la fonction de Melnikov est égale à

$$M(\tau) = -\frac{4\delta}{3} - \sqrt{2} \gamma \pi \omega \frac{\sin(\omega \tau)}{\text{ch}(\omega \tau/2)}.$$

D'après le théorème B, pour  $\epsilon$  voisin de zéro,

si  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{3\gamma\pi\omega} \text{ch}(\omega\pi/2) > 1$ , il n'y a aucune orbite homocline de (1) dans le voisinage de  $x_0$ ;

si  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{3\gamma\pi\omega} \text{ch}(\omega\pi/2) < 1$ , il y a exactement deux orbites homoclines dans un voisinage de  $x_0$ , solution de (1) pour  $\epsilon$  voisin de zéro.

## 5.2. Système de type Hénon-Heiles

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = JH'_z(\epsilon, t, z(t)) \\ t \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, z(t) = (p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4 \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$H(\epsilon, t, z) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{\omega^2(q_1^2 + q_2^2)}{2} - q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3} + G(\epsilon, t, z),$$

où  $G$  est une fonction régulière de  $\epsilon, t, z$ ,  $T$ -périodique par rapport à  $t$  et identiquement nulle pour  $\epsilon = 0$ .

On vérifie sans peine que

$$x_0 = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2)$$

avec

$$q_1(t) = q_2(t) = -\frac{3}{4} \left( \frac{\omega}{\text{ch}(\omega t/2)} \right)^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

est une orbite homocline du système non perturbé et que  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in E_0$  si seulement si

$$\begin{cases} z_3 = z_4 = y \\ z_1 = z_2 = \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega^2 \left( 1 - \frac{3}{(\text{ch}(\omega t/2t))^2} \right) y. \end{cases}$$

De même manière que l'exemple précédent, on montre que l'équation en  $y$  admet une solution qui tend vers l'infini quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ; d'où la dimension de  $E_0$  est égale à un. Par conséquent  $x_0$  est non dégénérée.

D'après le théorème A il y a bifurcation de deux orbites homoclines.

## Remerciement

Je souhaite remercier Claude Viterbo pour ses précieuses suggestions et discussions.

## Références

- [1] COTI ZELATI (V.), EKELAND (I.) et SÉRÉ (E.) . — *A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems*,  
Math. Ann. **288** (1990), pp. 133-160.
- [2] SÉRÉ (E.) . — *Une approche variationnelle au problème des orbites homoclines de systèmes hamiltonien*,  
Preprint.
- [3] COTI ZELATI (V.) et RABINOWITZ (P.H.) . — *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*,  
Preprint.
- [4] RABINOWITZ (P.H.) . — *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*,  
Proc. Roy. Soc. Edinburgh **114A** (1990), pp. 33-38.
- [5] EKELAND (I.) . — *A perturbation theory near convex Hamiltonian systems*,  
Jour. Diff. Equat. **50** (1983), pp. 407-440.
- [6] ARNOL'D . — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*,  
Editions Mir, Moscou, 1976.
- [7] BLOT (J.) . — Thèse de 3ème cycle, Université Paris IX-Dauphine (1981).
- [8] ALBIZZATTI (A.) . — *Sélection de phase par un terme d'excitation pour les solutions périodiques de certaines équations différentielles*,  
C.R.A.S. Paris, **296** (1983), pp. 259-262.
- [9] BAHRI (A.) et BERESTICKY (H.) . — *Existence of forced oscillations for some non-linear differential systems*,  
Comm. Pure and App. Math. (1983).
- [10] GAUSSENS (E.) . — Thèse d'Etat, Université Paris IX-Dauphine (1984).
- [11] AMBROSETTI (E.), COTI ZELATI (V.) et EKELAND (I.) . — *Symmetry breaking in critical point theory and applications*,  
Jour. Diff. Equat. **67** (1987), pp. 165-184.

- [12] LASSOUED (L.) . — *Homogénéisation pour des système hamiltoniens*, Cahiers de Ceremade n° 8606.
- [13] POINCARÉ (H.) . — *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, Gauthier-Villars, Paris (1899).
- [14] GREENSPAN (B.D.) et HOLMES (P.J.) . — *Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcations in forced oscillations*, Nonlinear Dynamics and Turbulence (G.I Barenblatt, G. Iooss and D.D. Joseph, eds.) Pitman, Boston-London-Melburne (1983).
- [15] MELIKOV (V.K.) . — *On the stability of the center for periodic perturbations*, Transactions of the Moscow Mathematical Society **12** (1963), pp. 1-57.
- [16] HÉNON (M.) et HEILES (C.) . — *The applicability of the third integral of motion : some numerical experiments*, Astron. J. **69** (1973).
- [17] SMALE (S.) . — *Diffeomorphisms with many periodic points*, Differential and Combinatorial Topology, S.S. Cairns (ed.), pp. 63-80. Princeton University Press, Princeton.