ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDELILAH GMIRA
NAJI YEBARI

Comportements asymptotiques des solutions d'équations paraboliques dégénénées sous des conditions optimales sur la donnée initiale

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 2 (1995), p. 243-267

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_2_243_0>

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IV, n° 2, 1995

Comportements asymptotiques des solutions d'équations paraboliques dégénénées sous des conditions optimales sur la donnée initiale(*)

ABDELILAH GMIRA et NAJI YEBARI[1]

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$ de la solution de $u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ dans $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, $p > 2$, avec une donnée initiale $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. On montre que le comportement asymptotique dépend d'une condition optimale de croissance vérifiée par la donnée initiale $u_0(x)$ à l'infini.

ABSTRACT. — The asymptotic behaviour as t tends to $+\infty$ of the solutions of $u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ in $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, $p > 2$, with the initial data $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, was studied. It was proved that the behaviour depends on the growth optimal condition when $|x| \to +\infty$, of the initial data $u_0(x)$.

0. Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique quand $t \to +\infty$ des solutions de l'équation parabolique non linéaire, où la donnée initiale est positive, et non intégrable sur $\mathbb{R}^N$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)\,,\ p > 2\,, \tag{0.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0\,, \quad u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)\,. \tag{0.2}$$

On obtient des résultats analogues à ceux obtenus par Alikakos et Rostamian pour les milieux poreux.

(*) Reçu le 12 novembre 1992

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 2121, Tetouan (Maroc)

Plus précisément, on prouve le résultat suivant.

Supposons que $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0 \geq 0$ vérifiant la condition : on peut trouver $s \in \left[0\,,\,(N + p/(p-2))\right[$ et $L \geq 0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^{N-s} u_0(\xi x) \to L\Lambda_s(x) \quad \text{quand } \xi \to +\infty \\ \qquad \text{au sens des distributions } D'(\mathbb{R}^N), \end{array}\right. \tag{c}$$

où la famille $\{\Lambda_s,\ s > 0\}$ est définie par

$$\Lambda_s(x) = \frac{s}{N\left|B_1(0)\right|^{1-s/N}}\,|x|^{s-N}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \tag{0.3}$$

$$\Lambda_0(x) = \delta(x) \quad (\text{masse de Dirac à l'origine})\,. \tag{0.4}$$

Alors pour tout $t > 0$, $u(\cdot\,, t)$ vérifie l'hypothèse (c). De plus (c) est équivalente à $\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha}\left|u(x,t) - q(x,t)\right| = 0$, uniformément sur les ensembles $E_c = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < ct^{\beta}\}$ où c est une constante arbitraire et $q(x,t)$ est la solution de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u\right) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)\,, \\ \qquad u(x,0) = L\Lambda_s(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \end{array}\right. \tag{0.5}$$

avec

$$\alpha = \frac{N-s}{p + (p-2)(N-s)} \tag{0.6}$$

$$\beta = \frac{1}{p + (p-2)(N-s)} \tag{0.7}$$

Ce papier est composé de trois parties : la partie 1 donne les résultats préliminaires. La partie 2 est consacrée à des estimations a priori; dans la partie 3, on donnera le résulat principal du comportement asymptotique.

1. Résultats préliminaires

1.1. Rappel d'un résultat d'existence

Le problème (0.1)-(0.2) admet une solution locale "au sens faible" ([3], [5], [6]) si et seulement si la condition initiale u_0 vérifie au moins pour un certain $r > 0$, $\|u_0\|_{r,1} < +\infty$, où

$$\|u_0\|_{r,1} = \sup_{R \geq r} \frac{1}{R^{N+p/(p-2)}} \int_{B_R} |u_0(x)| \, dx \tag{1.1}$$

avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$.

Il est clair que s'il existe $r_0 > 0$ pour lequel $\|u_0\|_{r_0,1}$ soit fini, il en est de même pour tout $r > 0$.

Soit $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors on définit pour tout $\mu \in (0,1)$ la norme $\|\cdot\|_{r,\mu}$ par

$$\|u_0\|_{r,\mu} = \sup_{R \geq r} \frac{1}{R^{(N+p/(p-2))\mu}} \int_{B_R} |u_0(x)| \, dx \,. \tag{1.2}$$

Il est clair aussi que s'il existe un certain $\mu \in (0,1)$ pour lequel $\|u_0\|_{r,\mu}$ soit fini, il en est de même pour $\|u_0\|_{r,1}$. Et de plus, l'application $r \longrightarrow \|u_0\|_{r,\mu}$ est décroissante. D'autre part, si on pose

$$\ell(u_0, \mu) = \lim_{r \to +\infty} \|u_0\|_{r,\mu} \,, \tag{1.3}$$

on montre que le problème (0.1)-(0.2) admet un intervalle maximal d'existence $\left[\, 0 \,, T(u_0) \,\right[$, où

$$T(u_0) = \frac{C_0}{\left[\ell(u_0, \mu)\right]^{p-2}} \,, \tag{1.4}$$

C_0 étant une constante positive dépendant de N et p.

1.2 Hypothèses et propriétés d'invariance

Dans cette étude, nous supposons que la donnée initiale vérifie des conditions optimales au sens suivant :

$$u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{avec } u_0 \geq 0 \text{ véfifiant la condition :}$$

il existe $s \in [0, K/(p-2)[$ et $L \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} \xi^{N-s} u_0(\xi x) \to L\Lambda_s(x) & \text{quand } \xi \to +\infty \\ \qquad \text{au sens des distributions } D'(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{c}$$

où Λ_s est la famille définie par (0.3)-(0.4) et $K = p + N(p-2)$. En utilisant les mêmes techniques que dans [1] pour les milieux poreux, on obtient la caractérisation suivante de la condition (c).

PROPOSITION 1.1.— *Soit $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0 \geq 0$, alors u_0 vérifie (c) si et seulement si*

$$\lim_{\xi \to +\infty} |\xi\Omega|^{-s/N} \int_{\xi\Omega} u_0(x)\, dx = L|\Omega|^{-s/N} \int_\Omega \Lambda_s(x)\, dx \tag{1.5}$$

pour tout ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, où $\xi\Omega = \{\xi x \mid x \in \Omega\}$.

Remarques

i) Dans le cas particulier $s = N$, les conditions (1.5) et (c) deviennent respectivement

$$\lim_{\xi \to +\infty} |\xi\Omega|^{-1} \int_{\xi\Omega} u_0(x)\, dx = L \quad \text{pour tout } \Omega \subset \mathbb{R}^N \tag{1.6}$$

et

$$u_0(\xi x) \to L \quad \text{quand } \xi \to +\infty \text{ au sens des distributions } D'(\mathbb{R}^N). \tag{1.7}$$

Par conséquent, il en résulte de (1.7) que la moyenne de u_0 sur la boule B_r tend vers L, lorsque r tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{r \to +\infty} |B_r|^{-1} \int_{|x|<r} u_0(x)\, dx = L\,. \tag{1.8}$$

ii) La géréralisation de (1.8) est obtenue en prenant $\Omega = B_1$ dans (1.5) ce qui permet d'écrire

$$\lim_{r \to +\infty} |B_r|^{-s/N} \int_{|x|<r} u_0(x)\, dx = L\,. \tag{c*}$$

iii) Si u_0 est à symétrie sphérique (radiale) alors les conditions (c) et (c*) sont équivalentes.

Avant de justifier l'importance des conditions (c) et (c*), on présente d'abord le résultat d'existence global suivant.

PROPOSITION 1.2.— *Soit* $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *positif vérifiant la condition (c). Alors le problème (0.1)-(0.2) admet une solution globale positive.*

Preuve

i) Il suffit de montrer qu'on peut trouver $\mu \in [0\,,\,1]$ tel que $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$. En effet, soit $r \geq 1$ et $\mu \in [0\,,\,1]$ alors

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{r,1} &= \sup_{R\geq r} \frac{1}{R^{N+p/(p-2)}} \int_{|x|<R} u_0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sup_{R\geq r} \frac{R^{(\mu-1)K/(p-2)}}{R^{\mu K/(p-2)}} \int_{|x|<R} u_0(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

où $K = p + N(p-2)$. D'où

$$\|u_0\|_{r,1} \leq r^{-(1-\mu)K/(p-2)} \|u_0\|_{r,\mu}\,. \tag{1.9}$$

Comme l'application $r \to \|u_0\|_{r,\mu}$ est décroissante alors on obtient

$$\|u_0\|_{r,1} \leq r^{-(1-\mu)K/(p-2)} \|u_0\|_{1,\mu}\,. \tag{1.10}$$

Par suite si $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$ pour un certain $\mu \in [0\,,\,1]$, on déduit que

$$\ell(u_0, 1) = \lim_{r\to+\infty} \|u_0\|_{r,1} = 0\,.$$

Par conséquent la solution u de (0.1)-(0.2) existe pour tout $t > 0$.

ii) Sachant que (c) est vérifiée pour un certain $s \in \left[0\,,\,K/(p-2)\right[$, montrons qu'on peut choisir $\mu \in [0\,,\,1]$ tel que $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$. Pour cela, prenons $\mu = s(p-2)/K$, d'où

$$\|u_0\|_{1,\mu} = \sup_{R\geq 1} \frac{1}{R^s} \int_{|x|<R} u_0(x)\,\mathrm{d}x$$

grâce à la condition (c), en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{|x|<1} R^{N-s} u_0(Rx)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} L \int_{|x|<1} \Lambda_s(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

On en déduit donc $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$.

Les conditions (c) et (c*) vérifient le principe d'invariance suivant.

PROPOSITION 1.3

i) Si u_0 vérifie (c) alors il en est de même pour la solution u de (0.1)-(0.2) pour tout $t > 0$, c'est-à-dire

$$\xi^{N-s} u(\xi x, t) \xrightarrow[\xi \to +\infty]{} L\Lambda_s(x) \quad \textit{dans } D'(\mathbb{R}^N).$$

ii) Si u_0 vérifie(c), alors la solution u de (0.1)-(0.2) satisfait la même condition pour chaque $t > 0$:*

$$|B_r|^{-s/N} \int_{|x|<r} u(x,t)\,\mathrm{d}x \longrightarrow L \quad \textit{quand } r \to +\infty.$$

Preuve

i) (c) est invariante pour tout $t > 0$. En effet, supposons que la solution u est suffisament régulière.

Soient $R > 0$, $\xi > 0$, $\tau > 0$ alors, pour tout $\tau < t$ et pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$, on a

$$\begin{aligned}
I_\xi(\tau,t) &= \int_{|x|<R} \xi^{N-s}\big[u(\xi x,t) - u(\xi x,\tau)\big]\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|<\xi R} \xi^{-s}\big[u(x,t) - u(x,\tau)\big]\varphi\Big(\frac{x}{\xi}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \xi^{-s}\int_{|x|<R\xi}\int_\tau^t \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau')\,\varphi\Big(\frac{x}{\xi}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \xi^{-s}\int_\tau^t\int_{|x|<R\xi} \operatorname{div}\Big(|\nabla u|^{p-2}\cdot\nabla u\Big)\,\varphi\Big(\frac{x}{\xi}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\xi^{-s-1}\int_\tau^t\int_{|x|<R\xi} |\nabla u|^{p-2}\cdot\nabla u(\nabla\varphi)\Big(\frac{x}{\xi}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau'.
\end{aligned}$$

D'où

$$|I_\xi(\tau,t)| \le C\xi^{-s-1}\int_\tau^t\int_{|x|<R\xi} |\nabla u|^{p-1}(x,\tau')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau',$$

où C est une constante positive qui dépend de la fonction φ.

Maintenant, on utilise l'estimation (2.14) de [3] pour

$$\rho = R\xi \geq 1 \quad \text{et} \quad t < C_0 \left[\|u_0\|_{R\xi,1} \right]^{-(p-2)} \tag{1.11}$$

on obtient

$$\int_0^t \int_{|x|<R\xi} |\nabla u|^{p-1}(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leq C_0 t^{1/K} (R\xi)^{1+K/(p-2)} \|u_0\|_{R\xi,1}^{1+(p-2)/K} \tag{1.12}$$

où $C_0 = C_0(N,p)$. Comme $t^{1/K}\|u_0\|_{R\xi,1}^{(p-2)/K} < C_1$, l'égalité (1.12) devient

$$\int_0^t \int_{|x|<R\xi} |\nabla u|^{p-1}(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau \leq C_2 (R\xi)^{1+K/(p-2)} \|u_0\|_{R\xi,1} \,. \tag{1.13}$$

D'autre part, grâce à la relation (1.10), on a pour tout $\mu' \in [\,0\,,\,\mu\,]$

$$(R\xi)^{1+K/(p-2)} \|u_0\|_{R\xi,1} \leq R^{1+\mu' K/(p-2)} \xi^{1+\mu' K/(p-2)} \|u_0\|_{1,\mu'} \,. \tag{1.14}$$

Par suite, en combinant (1.13) et (1.14) on obtient pout tout $0 < t < C_0 \left[\|u_0\|_{R\xi,1} \right]^{-(p-2)}$ l'estimation suivante

$$\left| I_\xi(0,t) \right| \leq C R^{1+\mu' K/(p-2)} \xi^{-s+\mu' K/(p-2)} \|u_0\|_{1,\mu'} \,, \tag{1.15}$$

où $C = C(N, p, \operatorname{supp}\varphi)$. En faisant tendre ξ vers $+\infty$ dans (1.15), on obtient pour tout $0 < t < C_0 \lim_{\xi\to+\infty} \left[\|u_0\|_{R\xi,1} \right]^{-(p-2)}$:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \left| \int_{|x|<R} \xi^{N-s} \left[u_0(\xi x) - u(\xi x, t) \right] \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| = 0\,; \tag{1.16}$$

or en utilisant encore une fois (1.10), on obtient

$$\left[\|u_0\|_{R\xi,1} \right]^{-(p-2)} \geq R^{(1-\mu')K} \xi^{(1-\mu')K} \|u_0\|_{1,\mu'}^{-(p-2)} \,.$$

D'où

$$\lim_{\xi\to+\infty} \left[\|u_0\|_{R\xi,1} \right]^{-(p-2)} = +\infty \,.$$

Donc (1.16) est vérifiée pour tout $t > 0$.

Dans le cas où u n'est pas régulière, il suffit d'approcher la donnée initiale u_0 par une suite régularisante.

ii) Avant d'établir que la condition (c*) reste invariante pour tout $t > 0$, montrons d'abord que (c*) assure l'existence globale du problème (0.1)-(0.2). Pour cela, il suffit de trouver $\mu \in [0, 1]$ pour lequel $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$. En effet, si u_0 satisfait la condition (c*) pour un certain $s \in [0, K/(p-2)[$, alors on vérifie que

$$R^{-s} \int_{|x|<R} u_0(x)\, dx \longrightarrow L\left(\frac{\omega_N}{N}\right)^{s/N} \quad \text{quand } R \to +\infty,$$

où ω_N est l'aire de la sphère unité de dimension $N-1$ dans $\mathbb{R}^N$.

En prenant $\mu = s(p-2)/K$, on en déduit que

$$\|u_0\|_{1,\mu} = \sup_{R \geq 1} R^{-K\mu/(p-2)} \int_{|x|<R} u_0(x)\, dx < +\infty.$$

Maintenant pour établir la propriété d'invariance de (c*) par rapport au temps $t > 0$, il suffit de montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} R^{-s} \int_{|x|<R} \left[u(x,t) - u_0(x)\right] dx = 0$$

Pour cela, on considère la famille de fonctions $\{\psi_\delta,\ \delta > 0\}$ de $C^\infty([0, +\infty[)$ définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq \psi_\delta(r) \leq 1 & \text{pour } r \geq 0 \\ \psi_\delta(r) = 1 & \text{pour } 0 \leq r \leq 1 \\ \psi_\delta(1) = 0 & \text{pour } r \geq 1 + \delta. \end{cases}$$

Puis, on pose $\varphi_\delta(x) = \psi_\delta(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Or

$$\begin{aligned} R^{-s} &\int_{R<|x|<(1+\delta)R} u_0(x)\, dx = \\ &= R^{-s} \int_{|x|<(1+\delta)R} u_0(x)\, dx - R^{-s} \int_{|x|<R} u_0(x)\, dx. \end{aligned}$$

Mais comme u_0 vérifie (c*) alors on a

$$\lim_{R \to +\infty} R^{-s} \int_{|x|<R} u_0(x)\, dx = L\left(\frac{\omega_N}{N}\right)^{s/N}.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux réels $R_1(\varepsilon) > 0$ et $\delta_1(\varepsilon) < 1$ tels que

$$R^{-s}\int_{R<|x|<(1+\delta)R}\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)u_0(x)\,\mathrm{d}x \le R^{-s}\int_{R<|x|<(1+\delta)R}u_0(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

pour tout $R > R_1(\varepsilon)$ et $0 < \delta < \delta_1(\varepsilon)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\delta \in \big(0, \delta_1(\varepsilon)\big) \subset (0, 1)$. Puisque $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$, on utilise les mêmes techniques et on aboutit à

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|<1+\delta}\varphi_\delta(x)R^{N-s}\big[u_0(Rx) - u(Rx, t)\big]\,\mathrm{d}x = 0$$

pour tout $t > 0$. Or l'expression ci-dessus est équivalente à

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-s}\int_{|y|<R(1+\delta)}\varphi_\delta\left(\frac{y}{R}\right)\big[u_0(y) - u(y,t)\big]\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Ainsi, on peut trouver $R_2(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $R > R_2(\varepsilon)$, on ait

$$\left|R^{-s}\int_{|x|<R(1+\delta)}\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\big[u_0(x) - u(x,t)\big]\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

Soit $R > \max\big(R_1(\varepsilon)\,,\ R_2(\varepsilon)\big)$ fixé, alors

$$\begin{aligned}R^{-s}\int_{|x|<(1+\delta)R} u(x,t)\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\mathrm{d}x &=\\ &= R^{-s}(1+\delta)^N\int_{|y|<R} u\big((1+\delta)y\,,\ t\big)\varphi_\delta\left(\frac{(1+\delta)y}{R}\right)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Mais comme u est continue, on a

$$(1+\delta)^N u\big((1+\delta)y\,,\ t\big)\varphi_\delta\left(\frac{(1+\delta)y}{R}\right)\xrightarrow[\delta\to 0]{} u(y,t) \quad \text{p.p. sur } B_R.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.10) de [3], on obtient pour tout $y \in B_R$ et $0 < t < C_0\left(\|u_0\|_{R,1}\right)^{-(p-2)}$

$$\sup_{\delta\in[0\,,1]}(1+\delta)^N u\big((1+\delta)y\,,\ t\big)\varphi_\delta\left(\frac{(1+\delta)y}{R}\right) \le Ct^{-N/K}R^{p/(p-2)}\|u_0\|_{R,1}^{p/K}\,.$$

Par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$R^{-s}\int_{|x|<(1+\delta)R} u(x,t)\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{d}x - R^{-s}\int_{|x|<R} u(x,t)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\,,$$

c'est-à-dire

$$R^{-s}\int_{R<|x|<(1+\delta)R} u(x,t)\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\,.$$

Ainsi, on peut trouver $\delta_2(\varepsilon,R)>0$ tel que pour tout

$$\delta\in\ \left]\,0\,,\min\big(\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon,R)\big)\right[$$

on ait

$$R^{-s}\int_{R<|x|<(1+\delta)R} u(x,t)\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left|R^{-s}\int_{|x|<R}\big[u_0(x)-u(x,t)\big]\,\mathrm{d}x\right| \le \\
&\quad\le \left|R^{-s}\int_{|x|<(1+\delta)R}\big[u_0(x)-u(x,t)\big]\,\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{d}x\right| + \\
&\qquad + \left|R^{-s}\int_{R<|x|<(1+\delta)R}\big[u_0(x)-u(x,t)\big]\,\varphi_\delta\left(\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad\le \varepsilon+2\varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}$$

pour tout $R>\max\big(R_1(\varepsilon)\,,\,R_2(\varepsilon)\big)$ et $0<t<C_0\left[\|u_0\|_{R,1}\right]^{-(p-2)}$. Ainsi, on conclut que

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-s}\int_{|x|<R}\big[u(x,t)-u_0(x)\big]\,\mathrm{d}x = 0$$

pour $0<t<C_0\lim_{R\to\infty}\|u_0\|_{R,1}^{-(p-2)}$; mais comme $\lim_{R\to\infty}\|u_0\|_{R,1}^{-(p-2)} = +\infty$ alors

$$R^{-s}\int_{|x|<R} u(x,t)\,\mathrm{d}x \longrightarrow L\left(\frac{\omega_N}{N}\right)^{s/N}$$

quand $R \to +\infty$ pour tout $t > 0$. $\square$

Remarque.— Si on peut trouver $\mu \in [0, 1]$ tel que $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$, alors (1.16) reste valable pour tout $t > 0$.

2. Estimation a priori

Le but de cette partie est de prouver que si $L > 0$ alors la solution $u(x,t)$ de (0.1)-(0.2) se comporte comme $t^{-\alpha}$ quand $t \to +\infty$.

Plus précisément, les deux propositions suivantes montrent que la solution $u(x,t)$ de (0.1)-(0.2) reste majorée et minorée par deux quantités qui se comportent comme $t^{-\alpha}$ quand $t \to +\infty$ pourvue que la donnée initiale satisfasse l'hypothèse (c).

PROPOSITION 2.1.— *Supposons que* $\|u_0\|_{1,\mu} < +\infty$ *pour un certain* $\mu \in [0, 1[$ *et soit* $s = \mu K/(p-2)$ *:*

i) si $\ell(u_0, \mu) > 0$, *alors pour tout nombre réel* $M > 1$, *il existe* $t_0 > 0$ *tel que pour tout* $t > t_0$ *on ait*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty_{(|x|<K_1 M t^\beta)}} \leq K_2 M^{\mu p/(p-2)} t^{-\alpha} \; ; \tag{2.1}$$

ii) si $\ell(u_0, \mu) = 0$, *alors*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty_{(|x|<K_3 t^\beta)}} = O(t^{-\alpha}) \tag{2.2}$$

où

$$\alpha = \frac{N-s}{p+(p-2)(N-s)}, \quad \beta = \frac{1}{p+(p-2)(N-s)}.$$

K_1 *et* K_2 *sont deux constantes positives qui dépendent de* p, N *; par contre,* K_3 *est une constante positive arbitraire.*

Preuve

i) D'après [5], si $\|u_0\|_{1,1} < +\infty$ on a pour tout $r \geq 1$ et pour tout $0 < t < C_1 \|u_0\|_{r,1}^{-(p-2)}$, u vérifie l'inégalité

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty_{(|x|<r)}} \leq C_2 t^{-N/K} r^{p/(p-2)} \|u_0\|_{r,1}^{p/K} \tag{2.3}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes dépendantes de N et p. Mais la relation (1.9) donne pour tout $\mu \in [0\,,\,1]$:

$$\|u_0\|_{r,1}^{-(p-2)} \geq r^{(1-\mu)K} \|u_0\|_{r,\mu}^{-(p-2)}. \tag{2.4}$$

Ainsi l'inégalité (2.3) a lieu en particulier pour tout

$$0 < t < C_1 r^{(1-\mu)K} \|u_0\|_{r,\mu}^{-(p-2)}. \tag{2.5}$$

D'autre part, en combinant (2.3), (2.4) et (2.5), on a

$$\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty_{(|x|<r)}} \leq C_2 t^{-N/K} r^{\mu p/(p-2)} \|u_0\|_{r,\mu}^{p/K}. \tag{2.6}$$

On se fixe une constante $M > 1$, on prend $s = \mu K/(p-2)$ et on choisit $r \geq 1$ et $t > 0$ tels que

$$t = C_1 M^{-1/\beta} r^{1/\beta} \|u_0\|_{1,\mu}^{-(p-2)}, \tag{2.7}$$

c'est-à-dire

$$r = K_1 M t^\beta \quad \text{où} \quad K_1 = C_1^{-\beta} \|u_0\|_{1,\mu}^{\beta(p-2)}. \tag{2.8}$$

Puisque l'application $r \to \|u_0\|_{r,\mu}$ est décroissante et $r \geq 1$ alors il est clair que le t défini par (2.7) vérifie bien la relation (2.5). De plus, si on pose $t_0 = (K_1 M)^{-1/\beta}$ alors $t \geq t_0$. Par conséquent (2.6) devient

$$\begin{aligned} &\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty_{(|x|<K_1 M t^\beta)}} \leq \\ &\leq C_2 K_1^{p\mu/(p-2)} M^{p\mu/(p-2)} t^{-N/K+\beta p\mu/(p-2)} \|u_0\|_{K_1 M t^\beta,\mu}^{p/K} \end{aligned} \tag{2.9}$$

en tenant compte de l'expression de β, l'inégalité (2.9) devient

$$\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty_{(|x|<K_1 M t^\beta)}} \leq C_2 K_1^{p\mu/(p-2)} M^{p\mu/(p-2)} t^{-\alpha} \|u_0\|_{K_1 M t^\beta,\mu}^{p/K}. \tag{2.10}$$

Mais comme $\ell(u_0,\mu) > 0$ et $K_1 M t^\beta \geq 1$ alors (2.10) donne

$$\|u(\,\cdot\,,t)\|_{L^\infty_{(|x|<K_1 M t^\beta)}} \leq K_2 M^{p\mu/(p-2)} t^{-\alpha} \tag{2.11}$$

où $K_2 = C_2 K_1^{p\mu/(p-2)} \|u_0\|_{1,\mu}^{p/K}$.

ii) Si $\ell(u_0, \mu) = 0$ alors le terme $\|u_0\|^{p/K}_{K_1 M t^\beta, \mu}$ tend vers zéro quand $t \to +\infty$. Par conséquent, le résultat (2.2) découle de la relation (2.10).

Remarque.— La proposition 2.1 reste valable si u_0 satisfait (c).

PROPOSITION 2.2.— *On suppose que $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ satisfait la condition (c*) pour un certain $s \in \left[0\,,\, K/(p-2)\right[$ avec $L > 0$.*

Alors, il existe t_0 dépendant de p et de u_0 tel que pour tous les x, t vérifiant

$$|x| \le C L^{(p-2)\beta} t^\beta\,, \quad t > t_0\,.$$

La solution $u(x,t)$ de (0.1)-(0.2) vérifie l'estimation

$$u(x,t) \ge C L^{p\beta} t^{-\alpha} \tag{2.12}$$

où l'on désigne par C toute constante qui dépend de N, p et s. α et β sont définies par (0.6) et (0.7).

Preuve

Comme u_0 vérifie (c*) alors le problème (0.1)-(0.2) admet une solution globale $u(x,t)$ sur $\mathbb{R}^N \times \left]0\,,\, +\infty\right[$. D'après [5] la donnée initiale u_0 vérifie l'estimation

$$\int_{|x-x_0|<R} u_0(x)\,\mathrm{d}x < C\left[R^{K/(p-2)} + u^{K/p}(x_0, 1)\right] \tag{2.13}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $R > 0$, où $K = p + N(p-2)$ et C une constante ne dépendant que de N et p. On considère la suite $(W_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$W_k(x,t) = k^\alpha u(k^\beta x\,,\, kt)\,. \tag{2.14}$$

Il est clair que W_k est solution de l'équation (0.1). De plus, elle laisse la condition (c*) invariante.

Maintenant, soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $R > 0$ vérifiant $|x_0| < R/2$. Comme $B_{R/2} \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < R\}$ et W_k vérifie (2.13) alors on obtient

$$\int_{B_{R/2}} W_k(x,0)\,\mathrm{d}x \le C\left[R^{K/(p-2)} + W_k^{K/p}(x_0, 1)\right]. \tag{2.15}$$

En utilisant (2.14), l'inégalité (2.15) devient

$$\int_{|x|<R/2} k^{\alpha} u_0(k^{\beta} x)\,\mathrm{d}x \leq C\big[R^{K/(p-2)} + k^{\alpha K/p} u^{K/p}(k^{\beta} x_0, k)\big]\,. \qquad (2.16)$$

Par un simple changement de variable et en tenant compte des expressions de α et β, on arrive à

$$\int_{|x|<R/2} k^{\alpha} u_0(k^{\beta} x)\,\mathrm{d}x = 2^{-s} R^{s} \left(k^{\beta} \frac{R}{2}\right)^{-s} \int_{|y|<k^{\beta} R/2} u_0(y)\,\mathrm{d}y\,. \qquad (2.17)$$

Posons $\rho = k^{\beta} R/2$, alors (2.17) s'écrit

$$\int_{|x|<R/2} k^{\alpha} u_0(k^{\beta} x)\,\mathrm{d}x = 2^{-s} \left|B_R\right|^{s/N} \left|B\rho\right|^{-s/N} \int_{|x|<\rho} u_0(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2.18)$$

Comme u_0 vérifie la relation (c*), on déduit de (2.18) que pour ρ assez grand on a :

$$2^{-s} \left|B_R\right|^{s/N} \frac{L}{2} \leq \int_{|x|<R/2} k^{\alpha} u_0(k^{\beta} x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2.19)$$

Les inégalités (2.16) et (2.19) donnent

$$2^{-s-1} C^{-1} \left|B_R\right|^{s/N} L - R^{K/(p-2)} \leq k^{\alpha K/p} u^{K/p}(k^{\beta} x_0\,,\, k)\,, \qquad (2.20)$$

pour k assez grand. Or

$$2^{-s-1} C^{-1} \left|B_R\right|^{s/N} L - R^{K/(p-2)} = CLR^{s} - R^{K/(p-2)} \qquad (2.21)$$

où C désigne toute constante dépendant de N, p et s. Comme $s \in \left[0\,,\, K/(p-2)\right[$ alors la fonction $R \to CLR^{s} - R^{K/(p-2)}$ atteint son unique maximum au point $\overline{R} = cL^{(p-2)\beta}$ et on a

$$CLR^{s} - R^{K/(p-2)}\Big|_{R=\overline{R}} = CL^{K\beta}\,. \qquad (2.22)$$

Fixons la valeur de R au point $\overline{R}$. On déduit des relations (2.22), (2.21) et (2.20) l'estimation

$$\left[k^{\alpha} u(k^{\beta} x_0\,,\, k)\right]^{K/p} \geq CL^{K\beta} \qquad (2.23)$$

pour k assez grand avec $|x_0| < CL^{(p-2)\beta}$. Donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $|x_0| < CL^{(p-2)\beta}$ et pour k assez grand, on obtient

$$u(k^\beta x_0\,,\,k) \geq Ck^{-\alpha}L^{p\beta}\,. \tag{2.24}$$

Finalement, le résultat souhaité est obtenu en remplaçant dans (2.24) le paramètre k par t ce qui donne

$$u(x,t) \geq Ct^{-\alpha}L^{p\beta} \tag{2.25}$$

pour t assez grand et $|x| < Ct^\beta L^{(p-2)\beta}$. □

Remarque.— Comme la condition (c*) n'est qu'un cas particulier de (c) alors l'estimation de la proposition 2.2 reste valable si u_0 vérifie (c).

3. Résultat principal du comportement asymptotique

Avant d'énoncer le théorème principal de ce travail, on s'intéresse de point de vue existence au problème modifié suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\cdot\nabla u\big) \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = L\Lambda_s(x) \tag{3.2}$$

où Λ_s est définie par (0.3), (0.4) et L étant une constante strictement positive.

PROPOSITION 3.1.— *Pour tout $s \in \big[\,0\,,\,K/(p-2)\big[$, le problème (3.1)-(3.2) admet une solution globale positive unique $q_L^s(x,t)$.*

Preuve

- Si $s = 0$, d'après [8], le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique globale (qui est la solution de Baremblatt).
- Si $s \in \big]\,0\,,\,K/(p-2)\big[$, pour prouver l'existence globale de (3.1)-(3.2) il suffit de montrer que $\|\Lambda_s\|_{r,1} < +\infty$ et $\ell(\Lambda_s) = 0$. En effet :

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} = \sup_{R\geq r}\frac{1}{R^{K/(p-2)}}\int_{|x|<R}|\Lambda_s(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

d'où

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} = \frac{s}{N|B_1(0)|^{1-s/N}} \sup_{R\geq r} \frac{1}{R^{K/(p-2)}} \int_{|x|<R} |x|^{s-N}\,\mathrm{d}x\,.$$

Le passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$ conduit à :

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} = \frac{s\omega_N}{N|B_1(0)|^{1-s/N}} \sup_{R\geq r} \frac{1}{R^{K/(p-2)}} \int_0^R r^{s-1}\,\mathrm{d}r$$

où $\omega_N = 2\pi I_{n-2} I_{n-1} \ldots I_1$, avec $I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta$. Or $|B_1(0)| = \omega_N/N$, d'où

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} = |B_1(0)|^{s/N} \sup_{R\geq r} R^{-K/(p-2)+s}\,.$$

Puisque $s \in \left]\,0\,,\, K/(p-2)\right[$, nous avons

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} \leq |B_1(0)|^{s/N} r^{-K/(p-2)+s}\,.$$

Donc

$$\|\Lambda_s\|_{r,1} < +\infty \quad \text{pour tout } r > 0\,.$$

De plus $\ell(\Lambda_s) = \lim_{r\to+\infty} \|\Lambda_s\|_{r,1} = 0$. Pour simplifier, on notera $q_L^s(x,t)$ par $q(x,t)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de présenter le résultat principal de cette étude.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $u(x,t)$ la solution de (0.1)-(0.2) où u_0 est supposée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$.*

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha |u(x,t) - q(x,t)| = 0$, *uniformément sur les ensembles* $E_c = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < Ct^\beta\}$;

ii) la condition (c) est vérifiée pour un certain $s \in \left[\,0\,,\, K/(p-2)\right[$ *et* $L > 0$, *où*

$$\alpha = \frac{N-s}{p+(N-s)(p-2)}\,, \quad \beta = \frac{1}{p+(N-s)(p-2)}$$

et C est une constante positive.

Preuve

Première partie (ii)⇒(i)

Soit $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant (c) pour un certain $s \in [0, K/(p-2)[$ et $L > 0$. On introduit encore une fois la suite des solutions autosimilaires de (0.1),

$$W_k(x,t) = k^\alpha u(k^\beta x, kt) \tag{3.3}$$

utilisée dans la preuve de la proposition 2.2. La démonstration de cette partie va se faire en trois étapes.

Étape 1 : Convergence de $\{W_k\}_{k\geq 1}$.

1) Estimation de W_k. Soit $R > 0$ fixé et $\mu = s(p-2)/K$. En tenant compte du fait que $\alpha - N\beta = -\beta s$, on obtient

$$\left\|W_k(\,\cdot\,,0)\right\|_{R,\mu} = k^\alpha \left\|u_0(k^\beta\,\cdot\,)\right\|_{R,\mu}. \tag{3.4}$$

De plus comme l'application $r \longrightarrow \left\|\cdot\right\|_{r,\mu}$ est monotone, on voit clairement que pour $k \geq 1$,

$$\left\|W_k(\,\cdot\,,0)\right\|_{R,\mu} \leq \left\|u_0\right\|_{R,\mu}. \tag{3.5}$$

Mais en utilisant le fait que $1/\beta(p-2) = (1-\mu)K/(p-2)$ et la relation (1.9), on obtient pour $R \geq 1$ fixé

$$\left\|W_k(\,\cdot\,,0)\right\|_{R,1} \leq R^{-1/(p-2)\beta}\left\|u_0\right\|_{R,\mu}. \tag{3.6}$$

Maintenant, on applique l'estimation (2.10) de [3], on obtient pour $R \geq 1$,

$$W_k(x,t) \leq Ct^{-N/K} R^{p/(p-2)} \left\|W_k(\,\cdot\,,0)\right\|_{R,1}^{p/K} \tag{3.7}$$

pour tout les x, t vérifiant :

$$|x| < R \quad \text{et} \quad 0 < t < c\left[\left\|W_k(\,\cdot\,,0)\right\|\right]^{-(p-2)} \tag{3.8}$$

où $c = c(N,p)$.

On déduit de (3.6) et (3.7) l'estimation souhaitée à savoir

$$W_k(x,t) \leq Ct^{-N/K} R^{\mu p/(p-2)} \left\|u_0\right\|_{R,\mu}^{p/K} \tag{3.9}$$

pour tous les x, t vérifiant

$$|x| < R \quad \text{et} \quad 0 < t < cR^{1/\beta}\left[\|u_0\|_{R,\mu}\right]^{-(p-2)}.$$

2) Estimation de ∇W_k. L'estimation (2.11) de [3] permet d'écrire

$$\left|\nabla W_k(x,t)\right| \leq Ct^{-(N+1)/K}R^{2/(p-2)}\|W_k(\cdot,0)\|_{R,1}^{2/K} \tag{3.10}$$

pour tous les x, t vérifiant (3.8).

On déduit de (3.6) et (3.10) l'estimation du gradient :

$$\left|\nabla W_k(x,t)\right| \leq Ct^{-(N+1)/K}R^{2\mu/(p-2)}\|u_0\|_{R,\mu}^{2/K} \tag{3.11}$$

pour tous les x, t vérifiant :

$$|x| < R \quad \text{et} \quad 0 < t < cR^{1/\beta}\left[\|u_0\|_{R,\mu}\right]^{-(p-2)}. \tag{3.12}$$

De plus, puisque W_k vérifie (0.1), on déduit de [2] l'estimation

$$\|\nabla W_k\|_{C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N\times]0,+\infty[)} \leq C \quad (0<\alpha<1) \tag{3.13}$$

où C étant une constante positive indépendante de k.

On déduit de (3.9) et (3.11) que la fonction W_k et le ∇W_k sont uniformément bornées sur tout compact de $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$.

De plus, de (3.13) on tire que $W_k \in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$.

Ainsi d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut extraire une sous-suite (éventuellement utiliser le procédé de la diagonale) notée encore $\{W_k\}$ qui converge dans $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ vers une fonction $W \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$.

De plus, en utilisant la relation (2.14) de [3] on déduit que pour tout $R \geq 1$ et pour tout $K \geq 1$, il existe une constante $C = C(N,p)$ telle que pour tout $T > 0$ assez petit, on a

$$\int_0^T \int_{B_R} |\nabla W_k|^{p-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq CT^{1/K}R^{1+K/(p-2)}\|W_k(\cdot,0)\|_{R,1}^{1+(p-2)/K}. \tag{3.14}$$

En tenant compte de (3.6), on obtient

$$\int_0^T \int_{B_R} |\nabla W_k|^{p-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq CT^{1/K}R^{\mu(1+K/(p-2))}\|u_0\|_{R,\mu}^{1+(p-2)/K}. \tag{3.15}$$

Par passage à la limite dans la relation (3.15), on obtient

$$\int_0^T \int_{B_R} |\nabla W|^{p-1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq C T^{1/K} R^{\mu(1+K/(p-2))} \|u_0\|_{R,\mu}^{1+(p-2)/K} . \tag{3.16}$$

Maintenant, on utilise le résultat de la trace initiale [6]. Soit $T > 0$ et $R > 0$ alors pour tout $t \in \,]\,0\,,\,T\,[$, on a

$$\int_{|x|<R} W_k(x,t) \, \mathrm{d}x \leq$$
$$\leq C_0 \big[R^{K/(p-2)} (T-t)^{-1/(p-2)} + (T-t)^{N/p} W_k^{K/p}(0\,,\,T-t) \big] \tag{3.17}$$

où $C_0 = C_0(N,p)$ et $W_k(0\,,\,T-t) = k^\alpha u\big(0\,,\,k(T-t)\big)$. Or on déduit de l'estimation (2.1) que

$$\big[k(T-t)\big]^\alpha u\big(0\,,\,k(T-t)\big) \leq C_1\,,$$

où $C_1 = C_1\left(N,\, p,\, \mu,\, \|u_0\|_{1,\mu}\right)$ est une constante indépendante de k, t et T, ce qui donne

$$W_k(0\,,\,T-t) \leq C_1 (T-t)^{-\alpha} . \tag{3.18}$$

En remplaçant T par $t+1$ dans les deux relations (3.17) et (3.18) on obtient

$$\int_{|x|<R} W_k(x,t) \, \mathrm{d}x \leq C_0 \big[R^{K/(p-2)} + C_1^{K/p} \big] , \tag{3.19}$$

pour tout $t > 0$ et tout $k \geq E(t_0) + 1$, où t_0 est défini comme dans la proposition 2.1. Ainsi (3.19) implique que pour tout k assez grand et $T > 0$, on a

$$\int_0^T \int_{|x|<R} W_k(x,t) \, \mathrm{d}x \leq T \cdot C \tag{3.20}$$

où

$$C = C\left(R,\, N,\, p,\, \mu,\, \|u_0\|_{1,\mu}\right) > 0 .$$

En passant à la limite dans (3.20), on obtient pour tout $T > 0$

$$\int_0^T \int_{|x|<R} W(x,t) \, \mathrm{d}x \leq C \cdot T . \tag{3.21}$$

Étape 2 : L'équation satisfaite par W. — On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ à support compact. Puisque W_k vérifie (0.1) alors pour tout $k \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{\partial W_k}{\partial t} \varphi + |\nabla W_k|^{p-2} \cdot \nabla W_k \nabla \varphi \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0 . \tag{3.22}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial W_k}{\partial t} \varphi = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W_k \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} W_k(x, 0) \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x \tag{3.22}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} W_k(x, 0) \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x = k^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} u_0(k^\beta x) \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x .$$

Comme $\alpha/(N - s) = \beta$ et u_0 vérifie (c), on déduit

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} W_k(x, t) \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x = L \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda_s(x) \varphi(x, 0) \, \mathrm{d}x . \tag{3.23}$$

On se donne maintenant $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (W_k - W) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| &\leq \\ \leq \left| \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (W_k - W) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| &+ \left| \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} W_k \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| + \\ &+ \left| \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} W \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| . \end{aligned}$$

On déduit alors de (3.20) et (3.21) que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (W_k - W) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| &\leq \\ \leq \left| \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (W_k - W) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right| &+ 2\varepsilon C \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^\infty} \end{aligned} \tag{3.24}$$

et comme W_k converge vers W dans $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty])$ en faisant tendre k vers $+\infty$ et puis ε vers zéro, on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} W_k \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial t} W \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t . \tag{3.25}$$

De la même façon, en utilisant (3.15) et (3.16), on montre que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla W_k|^{p-2}\,\nabla W_k\,\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &=\\ =\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla W|^{p-2}\,\nabla W\,\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.&\end{aligned}\tag{3.26}$$

En passant à la limite sur k dans (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}-\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}W\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla W|^{p-2}\,\nabla W\,\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &=\\ =L\int_{\mathbb{R}^N}\Lambda_s(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\,.&\end{aligned}\tag{3.27}$$

Par conséquent W est solution de (0.1) admettant comme donnée initiale $W(x,0)=L\Lambda_s(x)$. Or comme $q(x,t)$ est solution unique de (0,1) telle que $q(x,0)=L\Lambda_s(x)$, on en déduit que $W=q$.

Étape 3. — D'après ce qui précède, $W_k(x',t')=k^\alpha u(k^\beta x',kt')$ converge vers $q(x',t')$ quand k tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N\times\,]0\,,+\infty[$.

Si on prend $t'=1$ et on remplace k par t, on déduit que $t^\alpha u(t^\beta x'\,,\,t)$ converge vers $q(x',1)$ quand t tend vers $+\infty$, uniformément en $|x'|\le C$.

En posant $x=t^\beta x'$, alors on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\left[t^\alpha\left\{u(x,t)-t^{-\alpha}q(t^{-\alpha}x,1)\right\}\right]=0\tag{3.28}$$

uniformément sur $E_C=\left\{x\in\mathbb{R}^N\mid |x|\le Ct^\beta\right\}$.

Pour achever la preuve de la première partie, il suffit de remarquer que $q(x,t)=t^{-\alpha}q(t^{-\beta}x\,,\,1)$.

Deuxième partie (i)⇒(ii)

On se donne $u(x,t)$ solution de (0,1), où la donnée initiale est positive appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$.

On suppose qu'il existe $s\in\left[0\,,\,K/(p-2)\right[\,,\,R>0$ et $L>0$ tels que

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{|x|<Rt^\beta}t^\alpha\left|u(x,t)-q(x,t)\right|=0\,.\tag{3.29}$$

La preuve de cette partie va aussi se faire en trois étapes.

Étape 1.— On utilise de nouveau la suite des solutions autosimilaires de (0.1),

$$W_k(x,t) = k^\alpha u(k^\beta x, kt)\,, \quad k > 1\,.$$

Soit $T > 0$ fixé. Alors pour tout $\tau \in (0,T)$, on montre que W_k converge vers q quand $k \to +\infty$ sur l'ensemble

$$Q_{\tau,T,R\tau^\beta} = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\tau^\beta\right\} \times (\tau, T)\,,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{(x,t)\in Q_{\tau,T,R\tau^\beta}} \left|W_k(x,t) - q(x,t)\right| = 0\,. \tag{3.30}$$

En effet d'après (3.29), soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $t(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\sup_{|x|<Rt^\beta} t^\alpha \left|u(x,t) - q(x,t)\right| < \varepsilon\,, \quad \text{pour tout } t > t(\varepsilon)\,.$$

Cependant pour chaque $k > 0$, on a

$$\sup_{|k^\beta x|<R(kt)^\beta} (kt)^\alpha \left|u(k^\beta x\,,\, kt) - q(k^\beta x\,,\, kt)\right| < \varepsilon\,,$$

pourvu que $kt > t(\varepsilon)$. Puisque $k^\alpha q(k^\beta x\,,\, kt) = q(x,t)$ on obtient, pour tout $t \in (\tau, T)$,

$$\sup_{|x|<R\tau^\beta} \left|W_k(x,t) - q(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{\tau^\alpha} \tag{3.31}$$

pourvu que $k > (1/\tau)t(\varepsilon)$, ce qui prouve (3.30).

Étape 2.— Pour tout $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, il existe $\tau(\varepsilon, R)$ indépendant de k, tel que

$$\int_0^{\tau(\varepsilon,R)} \int_{|x|<R} W_k(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \varepsilon \tag{3.32}$$

et

$$\int_0^{\tau(\varepsilon,R)} \int_{|x|<R} \left|\nabla W_k\right|^{p-1}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t < \varepsilon\,, \tag{3.33}$$

pour tout $k \geq (1/\tau)\,t(\varepsilon)$.

En effet, en utilisant les inégalités (2.1) et (3.31) on vérifie que

$$W_k(0,t) \leq \tau^{-\alpha}\big(\varepsilon + K_2 M^{\mu p/(p-2)}\big)\,, \tag{3.34}$$

pour tout $t \in (\tau, T)$ et tout $k > (1/\tau)\, t(\varepsilon)$, où K_2 et M sont définies comme dans la proposition 2.1,

$$K_2 = K_2\left(N,\, p,\, \mu,\, L\big\|\Lambda_s\big\|_{1,\mu}\right)\,.$$

Maintenant, on utilise (3.17) avec $t = 0$ et $T = \tau$. On obtient

$$\int_{|x|<R} W_k(x,0)\,\mathrm{d}x \leq C_0\big[R^{K/(p-2)}\tau^{-1/(p-2)} + \tau^{N/p} W_k^{K/p}(0,\tau)\big]\,. \tag{3.35}$$

On combine les deux relations (3.34) et (3.35) et on arrive à :

$$\sup_{R\geq 1} R^{-K/(p-2)} \int_{|x|<R} W_k(x,0)\,\mathrm{d}x \leq C_0\big[\tau^{-1/(p-2)} + \tau^{(N-\alpha K)/p}\big] < +\infty\,,$$

c'est-à-dire

$$\big\|W_k(\,\cdot\,,0)\big\|_{R,1} \leq C < +\infty\,, \quad \forall\, k > \frac{1}{\tau}\, t(\epsilon) \tag{3.36}$$

où C est indépendante de k. Or (3.34) et (3.36) sont suffisantes pour obtenir respectivement les estimations (3.20) et (3.15), c'est bien ce qu'il faut pour justifier l'écriture des relations (3.32) et (3.33).

Par les mêmes arguments on montre que les relations (3.32) et (3.33) sont aussi vérifiées pour $q(x,t)$.

Étape 3. — Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On prend $\tau = \min\{1\,,\, \tau(\varepsilon, R)\}$. Pour $T > 1$ arbitraire, on pose :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\tau^{\beta}\big\} \times (0,T)\,,\\ Q_1 &= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\tau^{\beta}\big\} \times (0,\tau)\,,\\ Q_2 &= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\tau^{\beta}\big\} \times (\tau,T)\,. \end{aligned}$$

Soit $\phi \in C^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)\big)$ qui s'annule dans un voisinage du bord du cylindre Q_0 sauf à la base $t = 0$.

Puisque W_k et q sont les solutions faibles du problème (0.1), alors on a

$$\int_{Q_0} \frac{\partial\phi}{\partial t}\,(W_k - q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{Q_0} \nabla\phi\,\Big[\big|\nabla W_k\big|^{p-2}\nabla W_k - \big|\nabla q\big|^{p-2}\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\, + \\ + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x,0)\big[W_k(x,0) - q(x,0)\big]\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{3.37}$$

Comme $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$, on peut majorer les deux premières intégrales dans (3.37) par une fonction de ε en choisissant k assez grand et en utilisant les deux étapes précédentes.

Par conséquent, le dernier terme de (3.37) tend vers zéro quand $k \to +\infty$ pour tout ϕ convenablement choisie.

Soit $\varphi(x) = \phi(x, 0)$. En remplaçant $W_k(x, 0)$ et $q(x, 0)$ par leurs valeurs respectives, on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \big[k^\alpha u_0(k^\beta x) - L\Lambda_s(x)\big] \, dx = 0 .$$

Posons $\xi = k^\beta$, alors $k^\alpha = \xi^{N-s}$. Par conséquent l'hypothèse (c) est bien vérifiée pour u_0. □

Remarques (cas particuliers du théorème 3.1.)

• Si $s = N$, le théorème 3.1 s'écrit sous la forme suivante.

PROPOSITION 3.2. — *Soit $u(x,t)$ la solution de (0.1) où la donnée initiale u_0 est positive et dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = L$ uniformément sur les ensembles*

$$E_C = \left\{x \in \mathbb{R}_N \mid |x| < ct^{1/p}\right\}$$

si et seulement si :

$$\lim_{\xi \to +\infty} u_0(\xi x) = L \quad \textit{au sens de } D'(\mathbb{R}^N) .$$

• Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors (c) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^N u_0(\xi x) \to L\delta_0 \quad \text{quand } \xi \to +\infty \\ \text{au sens des distributions } D'(\mathbb{R}^N) \end{array}\right. \tag{c_0}$$

où $L = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \, dx$ et dans ce cas, $q(x,t)$ est la solution de Baremblatt ayant comme donnée initiale $L\delta_0$. Ainsi, on retrouve les résultats de [5] et [8] qui sont aussi valables pour les milieux poreux [4]. Dans ce cas particulier, le théorème 3.1 se réduit à la proposition 3.3.

PROPOSITION 3.3. — *Soit $u(x,t)$ la solution de (0.1)-(0.2) où $u_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ avec $u_0 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$, alors*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{N/K} \left| u(x,t) - q(x,t) \right| = 0$$

uniformément sur les ensembles $E_C = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < Ct^{1/K} \right\}$ si et seulement si (c_0) est vérifiée pour $L = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\mathrm{d}x$, où C est une constante positive arbitraire.

Références

[1] ALIKAKOS (N.D.) et ROSTAMIAN (R.) . — *On the uniformization of the solutions the porous medium equation in* $\mathbb{R}^N$, ISR. J. Math. **47** (1984), pp. 270-290.

[2] DIBENEDETTO (E.) et FREIDMAN (A.) . — *Hölder estimates of non linear degenerate parabolic system*, Jour. Für die Riene and Angew. Math. **357** (1985), pp. 1-22.

[3] DIBENEDETTO (E.) et HERRERO (M.A.) . — *On the Cauchy and initial traces for a degenerate parabolic equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), pp. 187-224.

[4] FREIDMAN (A.) et KAMIN (S.) . — *The asymptotic behavior of gas in an n-dimensional porous medium*, Trans. Am. Math. Soc. **262** (1980), pp. 551-563.

[5] GMIRA (A.) . — *Comportements asymptotiques et singularités des solutions de problèmes quasilinéaires*, Thèse d'État, Université François-Rabelais, Tours (1989).

[6] GMIRA (A.) . — *Existence de la trace initiale pour les solutions d'une équation parabolique dégénérée*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, **8**, n° 3, (1986-1987), pp. 315-329.

[7] KAMIN (S.) . — *Similar solution and the asymptotics of filtration equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1976), pp. 171-183.

[8] KAMIN (S.) et VAZQUEZ (J.-L.) . — *Fundamental solutions and asymptotic behavior for the p-Laplacien equation*, Rev. Mat. Iberoamericana **4** (1988), pp. 339-352.