ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.-J. STIELTJES

Chapitre VII. Démonstration du théorème fondamental

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 4, nº 3 (1995), p. J76-J122

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_3_J76_0>

CHAPITRE VII.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

40. Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres; nous supposerons que ces nombres sont limités supérieurement et inférieurement.

Il en sera de même alors des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad u_{n+3}, \quad \ldots,$$

et ces nombres admettent donc un maximum, ou limite supérieure L_n, et également un minimum, ou limite inférieure l_n. Ce nombre L_n jouira alors des propriétés suivantes :

1° Aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne peut être plus grand que L_n.

2° Au moins un de ces nombres est égal à L_n, ou, si cela n'a pas lieu, on pourra en trouver au moins un qui surpasse $L_n - \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque. Lorsque n augmente, L_n ne peut que diminuer, de même l_n ne peut qu'augmenter. Dès lors il est clair que, pour $n = \infty$, on aura

$$\lim L_n = L,$$
$$\lim l_n = l,$$
$$L \geqq l.$$

Voici maintenant les propriétés du nombre L :

I. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous inférieurs à $L + \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

En effet, puisque L_n tend vers L en diminuant, on peut toujours déterminer n de façon que L_n soit plus petit que $L + \varepsilon$; or aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne surpasse L_n, ils sont donc aussi *tous* $< L + \varepsilon$.

Parmi les nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

il y en a toujours un qui est, soit $= L_1$, soit $> L_1 - \varepsilon$. Soit u_k ce nombre, il est visiblement plus grand que $L - \varepsilon$ puisque $L_1 \geqq L$.

Ensuite, parmi les nombres

$$u_{k+1}, \quad u_{k+2}, \quad u_{k+3}, \quad \ldots$$

il y en aura un qui est, soit $= L_{k+1}$, soit $> L_{k+1} - \varepsilon$.

Soit u_l ce nombre, il sera encore plus grand que $L - \varepsilon$.

De même, parmi les nombres

$$u_{l+1}, \quad u_{l+2}, \quad u_{l+3}, \quad \ldots$$

il y en aura toujours un u_m, qui est plus grand que $L_{l+1} - \varepsilon$, et, par conséquent, aussi plus grand que $L - \varepsilon$.

En continuant ainsi, il est clair que, dans la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

on peut trouver une infinité de nombres

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots$$

qui sont tous plus grands que $L - \varepsilon$. Les indices k, l, m, ... vont en augmentant; or nous savons déjà que *tous* les nombres de la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont inférieurs à $L + \varepsilon$.

Il en sera de même pour la suite

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots,$$

et nous arrivons à ce résultat :

II. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre $L - \varepsilon$ *et* $L + \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

On verra de la même façon

I°. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous supérieurs à $l - \varepsilon$.

II°. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre $l - \varepsilon$ *et* $l + \varepsilon$.

La considération de ces nombres L et l est due à M. du Bois-Reymond, qui l'a exposée dans un livre paru en 1882 et qui a été traduit en français par MM. Milhaud et Girot. M. du Bois-Reymond appelle L et l les *limites d'indétermination des nombres* u_n; on voit en effet que, pour n infini, u_n finit par osciller entre ces limites. Et il est évident aussi que les nombres u_n ne tendent vers une limite déterminée que lorsqu'on a $L = l$.

La première application qu'on a faite de cette considération nous paraît due à M. Hadamard qui a remarqué que, dans le cas

$$u_n = \sqrt[n]{|c_n|},$$

le rayon de convergence de la série

$$\sum_0^\infty c_n z^n$$

est égal à $1 : L$.

41. Je reviens maintenant à la fonction $\varphi_n(u)$ définie au n° 36. C'est une fonction croissante qui est bien déterminée, même aux points de discontinuité.

Elle ne varie qu'entre les limites

$$\varphi_n(0) = 0, \qquad \varphi_n(\infty) = \frac{1}{a_1}.$$

Soit maintenant u un nombre fixe, positif ou nul, et considérons la suite infinie

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \varphi_3(u), \quad \ldots.$$

Ces nombres sont limités; je désignerai les limites correspondantes L et l par

$$L = \psi(u),$$
$$l = \chi(u),$$

en sorte qu'on aura

$$\psi(u) \geqq \chi(u).$$

Il est clair du reste que $\psi(0) = \chi(0) = 0$, et si pour quelque valeur particulière de u on a

$$\psi(u) = \chi(u),$$

nous pourrons en conclure, d'après ce qui précède, que, pour $n = \infty$,

$$\lim \varphi_n(u) = \psi(u) = \chi(u).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ étant croissante, on reconnaît immédiatement que les fonctions $\psi(u)$ et $\chi(u)$ sont aussi croissantes.

Ainsi, sous la condition $a < b$, on aura

$$\psi(a) \leqq \psi(b), \tag{1}$$
$$\chi(a) \leqq \chi(b). \tag{2}$$

A ces inégalités, nous allons en ajouter une autre d'une très grande importance : c'est celle-ci

$$\psi(a) \leqq \chi(b). \tag{3}$$

Mais la démonstration de cette inégalité exige quelques préparatifs.

42. Calculons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k \, du.$$

Sa valeur est évidemment

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k+1}(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n)\; x_1^{k+1} \\
&\quad + \frac{1}{k+1}(M_2 + M_3 + \ldots + M_n)(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) \\
&\qquad + \frac{1}{k+1}(M_3 + \ldots + M_n)(x_3^{k+1} - x_2^{k+1}) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{k+1} M_n\,(x_n^{k+1} - x_{n-1}^{k+1}),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{k+1}(M_1 x_1^{k+1} + M_2 x_2^{k+1} + M_3 x_3^{k+1} + \ldots + M_n x_n^{k+1});$$

ainsi

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

On aura de même

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_{n+n'}(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n+2n'-2)$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty [\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)]\, u^k\,du = 0 \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

D'après un raisonnement bien connu, dû à Legendre, on en conclut que la fonction

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe *au moins* $2n-1$ fois. Or, $\varphi_n(u)$ et $\varphi_{n+n'}(u)$ sont des fonctions croissantes l'une et l'autre, puis $\varphi_n(u)$ est constant dans chacun des intervalles

$$(x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, x_n).$$

Dans chacun de ces intervalles, $\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$ peut changer de signe *une fois* au plus. Ensuite, il peut y avoir un changement de signe pour les points de discontinuité $x_1, \ldots, x_n$, cela donne au plus n changements de signe; en tout on en a ainsi $2n-1$ *au plus*. Mais, à cause de

$$\varphi_n(0) = \varphi_{n+n'}(0) = 0,$$
$$\varphi_n(\infty) = \varphi_{n+n'}(\infty) = \frac{1}{a_1},$$

on reconnaît immédiatement qu'il ne peut pas y avoir d'autres changements de signe. Donc, effectivement, il doit y avoir un changement de signe dans chaque intervalle

$$(x_1, x_2), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, x_n),$$

et un changement de signe pour

$$u = x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour une valeur $u = x_k$, il faut donc que l'on ait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}),$$

et même dans le cas où la fonction $\varphi_{n+n'}(u)$ aurait aussi une discontinuité pour $u = x_k$ (ce qui peut arriver exceptionnellement lorsque les équations

$$Q_{2n}(z) = 0, \qquad Q_{2n+2n'}(z) = 0$$

ont des racines communes), on aurait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{+}{x_k}) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}).$$

Remarquons ensuite que, puisque

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}) et que $\varphi_n(u)$ est constant dans cet intervalle, $\varphi_{n+n'}(u)$ doit effectivement *croître* dans cet intervalle. Or, cette fonction ne croît que par sauts brusques, les points de discontinuité étant les racines de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0.$$

On en conclut que, dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), il doit y avoir au moins une racine de cette équation.

On retrouve ainsi une proposition que nous avons déjà obtenue d'une façon plus complète (*voir* n° 5).

43. Pour démontrer maintenant l'inégalité (3), plaçons-nous dans l'hypothèse contraire; supposons qu'on ait

$$\psi(a) > \chi(b),$$

on pourra trouver un nombre positif ε tel que

$$\psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Cela étant, d'après les propriétés des limites d'indétermination, nous savons qu'il existe une infinité d'indices croissants

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_k, \quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(a)$ pour $n = \nu_k$ est toujours $> \psi(a) - \varepsilon$. Et il existera aussi une seconde suite d'indices croissants

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \nu'_3, \quad \ldots, \quad \nu'_k, \quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(b)$ pour $n = \nu'_k$ est toujours $< \chi(b) + \varepsilon$.

Je dis maintenant que, pour $n = \nu_k$ et aussi pour $n = \nu'_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne pourra jamais avoir une racine comprise entre a et b. En effet, supposons que pour $n = \nu_k$ cette équation ait une racine c comprise entre a et b. Alors la fonction $\varphi_n(u)$ aura encore une discontinuité pour $u = c$, et, puisque $\varphi_n(a)$ est déjà supérieur à $\psi(a) - \varepsilon$, on aura

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) > \psi(a) - \varepsilon,$$

$$\varphi_n(\overset{+}{c}) > \psi(a) - \varepsilon.$$

Or, dans la suite

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \ldots, \quad \nu'_k, \quad \ldots,$$

nous pourrons toujours trouver un nombre $\nu'_r = n'$ *supérieur* à $n = \nu_k$. Dès lors, on devrait avoir

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) < \varphi_{n'}(c) < \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Mais c'est là évidemment une absurdité, car

$$\varphi_{n'}(c) \leqq \varphi_{n'}(b) < \chi(b) + \varepsilon,$$

tandis que

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) > \psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Il est ainsi prouvé que l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir aucune racine entre a et b lorsque $n = \nu_k$, et l'on verra de la même façon que cela est vrai encore pour $n = \nu'_k$.

Puisque donc, pour une infinité de valeurs $n = \nu_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

n'admet aucune racine entre a et b, nous savons (*voir* n^{os} 35, 36) que la fonction $F(z)$ admet un développement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

convergent pour $a<|z|<b$, et la valeur de c_{-1} est la limite de $\varphi_n(c)$, c étant un nombre fixe entre a et b, n parcourant les valeurs

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots.$$

Mais on peut appliquer le même raisonnement en faisant parcourir à n les valeurs

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \nu'_3, \quad \ldots,$$

et puisque, dans les deux cas, la fonction $F(z)$ est la même, on devrait avoir

$$c_{-1} = \lim \varphi_{\nu_k}(c) = \lim \varphi_{\nu'_k}(c).$$

Or cela est une absurdité évidente, car tous les nombres $\varphi_{\nu_k}(c)$ surpassant $\psi(a) - \varepsilon$ et tous les nombres $\varphi_{\nu'_k}(c)$ sont inférieurs à

$$\chi(b) + \varepsilon < \psi(a) - \varepsilon.$$

La contradiction qui se manifeste ici montre que l'hypothèse d'où on l'a déduite, et qui consistait à admettre que

$$\psi(a) > \chi(b),$$

doit être rejetée. L'inégalité (3) se trouve démontrée.

44. Ce point important établi, nous pourrons introduire une fonction qui joue le rôle principal dans notre théorème fondamental. Posons

$$\Phi(u) = \frac{\psi(u) + \chi(u)}{2},$$

il résulte immédiatement des inégalités (1), (2), que c'est là une fonction *croissante;* on a d'ailleurs $\Phi(0) = 0$, et la fonction ne peut pas croître au delà de $\frac{1}{a_1}$ comme $\psi(u)$ et $\chi(u)$. Il est clair que

$$\Phi(u+\varepsilon) \geqq \chi(u+\varepsilon) \geqq \psi(u),$$

donc

$$\Phi(\overset{+}{u}) \geqq \psi(u).$$

De même,

$$\Phi(\bar{u}) \leqq \chi(u).$$

Ainsi, lorsqu'on a $\psi(u) > \chi(u)$, $\Phi(u)$ est discontinue et la mesure de la discontinuité n'est pas moindre que $\psi(u) - \chi(u)$, mais elle peut être plus grande. Aussi $\Phi(u)$ peut être discontinue même en des points pour lesquels $\psi(u) = \chi(u)$. Mais, $\Phi(u)$ étant une fonction croissante, nous savons qu'elle a des points de continuité dans tout intervalle.

Or, si l'on a

$$\Phi(\overset{+}{u}) = \Phi(\bar{u}),$$

on conclut $\psi(u) = \chi(u) = \lim \varphi_n(u)$ pour $n = \infty$. Donc, dans tout intervalle, il y a des points u tels que $\varphi_n(u)$ tend vers une limite finie pour $n = \infty$.

Voici maintenant une propriété de la fonction $\Phi(u)$ qui nous sera très utile. Considérons la fonction $\varphi_n(u)$; elle est discontinue pour $u = x_k$ et pour $n' > n$: on a

$$\varphi_n(\bar{x}_k) < \varphi_{n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

Il s'ensuit évidemment que $\psi(x_k)$ et $\chi(x_k)$, les limites d'indétermination des $\varphi_{n'}(x_k)$ pour $n' = \infty$, sont aussi comprises entre $\varphi_n(\bar{x}_k)$ et $\varphi_n(\overset{+}{x}_k)$: donc

$$\varphi_n(\bar{x}_k) \leqq \Phi(x_k) \leqq \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

45. Considérons maintenant les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et un intervalle quelconque (a, b),

$$0 \leqq a < b.$$

Deux cas peuvent se présenter :

Ou bien les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

pour lesquelles il n'y a aucune racine *entre* a et b, sont en nombre fini;

Ou bien ces équations sont en nombre infini.

Dans le premier cas, nous dirons que l'intervalle (a, b) est de *première espèce;* dans le second cas, il est de *seconde espèce.*

Lorsque l'intervalle (a, b) est de première espèce, il existe un nombre ν, tel que pour $n > \nu$ l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a toujours au moins une racine entre a et b, et cette propriété est évidemment caractéristique pour un intervalle de première espèce. Ainsi, lorsque, pour une valeur particulière de n, l'équation a *deux* racines entre a et b, l'intervalle est toujours de première espèce, car les équations suivantes de degrés supérieurs auront toujours au moins une racine entre ces deux racines-là.

Supposons que l'intervalle (a, b) soit de seconde espèce et, en outre, que les points a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Il résulte de cette dernière hypothèse que :

$$\Phi(a) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(a),$$

$$\Phi(b) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(b).$$

Je dis qu'on a nécessairement $\Phi(a) = \Phi(b)$. En effet, supposons

$$\Phi(a) < \Phi(b),$$

on pourra déterminer un nombre positif ε tel que

$$\Phi(a) + \varepsilon < \Phi(b) - \varepsilon.$$

D'autre part, pour toutes les valeurs de n au-dessus d'une certaine limite $n > \nu$, on a

$$|\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon,$$

$$|\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que, pour ces mêmes valeurs de n, on a

$$\varphi_n(a) < \varphi_n(b).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ doit donc augmenter effectivement lorsque u croît de a jusqu'à b. Cela n'est possible que si l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine entre a et b. Comme cela doit arriver pour *toutes* les valeurs de n qui surpassent ν, on en conclut que l'intervalle (a, b) est de *première espèce*, contrairement à l'hypothèse admise. On a donc bien

$$\Phi(a) = \Phi(b).$$

Pour $n > \nu$, on aura toujours

$$|\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon;$$

mais, puisque $\Phi(a) = \Phi(b)$, il est évident qu'il s'ensuit

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs

$$a \leqq u \leqq b.$$

C'est là un résultat important; il suppose que l'intervalle (a, b) soit de *seconde* espèce et que a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Dans le cas $a = 0$, l'intervalle $(0, b)$ peut être de seconde espèce, mais voici dans quelles circonstances seulement. L'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne doit jamais avoir une racine égale ou plus petite que b; car, si cela arrive, l'équation

$$Q_{2n'}(-z) = 0$$

a toujours pour $n' > n$ une racine dans l'intervalle $(0, b)$, qui serait ainsi de première espèce. Donc, si l'intervalle $(0, b)$ est de seconde espèce, on a toujours

$$\varphi_n(b) = 0,$$

et par conséquent $\Phi(b) = 0$. Les fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ sont identiquement nulles dans tout l'intervalle

$$0 \leqq u \leqq b.$$

46. Soit L un nombre positif quelconque et considérons l'intégrale

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Entre o et L, j'intercale $k - 1$ nombres $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$

$$u_0 = 0 < u < u_2 < \ldots < u_{k-1} < u_k = L,$$

d'une façon quelconque. Je désigne par ε l'étendue du plus grand des intervalles (u_{i-1}, u_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Pour simplifier un peu les raisonnements, je supposerai qu'aucun point $u_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ ne soit racine d'une équation

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

ou un point de discontinuité de $\Phi(u)$. Puisque l'ensemble des racines et des points de discontinuité de $\Phi(u)$ peut se ranger sous la forme d'une suite infinie, il existe de tels points u_i dans tout intervalle. Le point $u_0 = 0$ n'est pas une racine, mais il peut être un point de discontinuité pour $\Phi(u)$. Cependant, cela ne peut jamais arriver lorsque l'intervalle (u_0, u_1) est de seconde espèce, car alors $\Phi(u)$ est nulle dans tout l'intervalle.

A chaque intervalle (u_{i-1}, u_i) j'associe maintenant un nombre entier ν_i de la façon suivante. Si l'intervalle est de première espèce, je suppose que le nombre ν_i est tel que, pour $n > \nu_i$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine dans l'intervalle.

Si l'intervalle est de seconde espèce, je suppose que, pour $n > \nu_i$ et

$$u_{i-1} \leqq u \leqq u_i,$$

on ait

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$

ε' étant un nombre positif arbitraire, le même pour tous les intervalles de seconde espèce.

Cela étant, soit N le plus grand des nombres

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_k,$$

je supposerai désormais $n > N$, et je cherche une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Pour cela, je la décompose dans une somme de k intégrales

$$\sum_1^k \int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de première espèce, la fonction $\varphi_n(u)$ aura au moins un saut brusque dans l'intervalle pour $u = c$ et

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) \leqq \Phi(c) \leqq \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Les deux intervalles

$$[\varphi_n(u_{i-1}), \varphi_n(u_i)] \qquad \text{et} \qquad [\Phi(u_{i-1}), \Phi(u_i)]$$

auront donc au moins un point de commun, par conséquent

$$\varphi_n(u_i) \geqq \Phi(u_{i-1}),$$
$$\Phi(u_i) \geqq \varphi_n(u_{i-1}).$$

Dans tout l'intervalle, on a évidemment

$$\varphi_n(u_{i-1}) - \Phi(u_i) \leqq \varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$

et à plus forte raison

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$
$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \geqq \varphi_n(u_{i-1}) - \varphi_n(u_i) + \Phi(u_{i-1}) - \Phi(u_i),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}).$$

On en conclut

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du \leqq \varepsilon \{\varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})\}.$$

Le facteur qui multiplie ε est la somme des variations des fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ dans l'intervalle (u_{i-1}, u_i). La somme de toutes les intégrales

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du,$$

pour lesquelles (u_{i-1}, u_i) est un intervalle de première espèce, a donc pour limite supérieure

$$\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2),$$

σ_1 étant la somme des variations de $\varphi_n(u)$ dans ces intervalles, σ_2 la somme des variations de $\Phi(u)$. Il est clair que σ_1 est inférieur à la variation totale de $\varphi_n(u)$, c'est-à-dire à

$$\varphi_n(\infty) - \varphi_n(0) = \frac{1}{a_1}.$$

De même σ_2 est inférieure à la variation totale de $\Phi(u)$ qui, elle aussi, ne peut pas surpasser $\frac{1}{a_1}$. On peut donc adopter pour limite supérieure de la somme considérée l'expression $\frac{2\varepsilon}{a_1}$.

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de seconde espèce, on aura dans tout l'intervalle, à cause de la valeur de $n > N \geqq \nu_i$,

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \varepsilon'(u_i - u_{i-1}).$$

La somme de toutes les intégrales de cette espèce sera donc inférieure à $L\varepsilon'$, puisque la somme des intervalles est évidemment inférieure à L.

D'après cela, il est clair que nous pouvons énoncer la proposition suivante :

L, ε, ε' *étant des nombres positifs arbitraires, il existe un nombre entier* N *tel que, pour* $n > N$,

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'.$$

47. Il est évident que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi_n(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u)\, du}{(z+u)^2},$$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u) - \Phi(u)}{(z+u)^2}\, du,$$

z étant un point quelconque non sur la coupure. On en conclut

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2}\right| < \int_0^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

La limite supérieure peut s'écrire

$$\int_0^L \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du + \int_L^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

Adoptons deux nombres positifs ε, ε' et déterminons N comme dans le n° 46, on aura, pour $n > N$,

$$\int_0^L \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2} du < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right),$$

(z) étant, comme au n° 33, le minimum de $|z+u|$, lorsque u varie de o à ∞.

Pour l'intégrale entre limites L et ∞, j'observe que

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \frac{1}{a_1},$$

et pour $z = \alpha + \beta i$,

$$|z+u|^2 = (u+\alpha)^2 + \beta^2 \geqq (u+\alpha)^2,$$

donc

$$\int_L^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \varphi(u)|}{|z+u|^2} du < \frac{1}{a_1}\int_L^\infty \frac{du}{(u+\alpha)^2} = \frac{1}{a_1(L+\alpha)},$$

en supposant que $L + \alpha$ soit positif.

Il vient donc

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2}\right| < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right) + \frac{1}{a_1(L+\alpha)}.$$

Or les nombres L, ε, ε' étant arbitraires (ou à peu près), il est clair que la limite supérieure peut être rendue aussi petite qu'on le voudra.

Il est ainsi démontré que pour tout point z non sur la coupure, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Nous savions déjà que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

tend vers une fonction holomorphe $F(z)$; nous voyons maintenant que cette fonction peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Quant à l'uniformité de la convergence, il résulte de la limitation obtenue que la convergence est uniforme dans tout domaine S où la partie réelle de $-z$ et $\frac{1}{(z)}$ sont limités supérieurement. Un tel domaine peut s'étendre à l'infini.

48. De la même façon que nous avons étudié les réduites d'ordre pair, on peut étudier les réduites d'ordre impair, et l'on trouvera

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u},$$

$\Phi_1(u)$ étant encore une fonction croissante qui caractérise une certaine distribution de masse sur un axe OX.

Mais il est à peine nécessaire de faire cette recherche, car le seul cas qui nous intéresse est celui où la série

$$\sum_1^{\infty} a_n$$

est *divergente;* mais alors nous savons que $F(z) = F_1(z)$, et il devient inutile de faire une recherche spéciale pour obtenir une forme analytique plus explicite de $F_1(z)$. Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ caractérisent alors nécessairement la même distribution d'après le théorème du n° 39.

Dans le cas où la série

$$\sum_1^{\infty} a_n$$

est convergente, il est clair que les distributions de masse caractérisées par les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ sont celles données par les systèmes

$$(\mu_i, \lambda_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$(\nu_i, \theta_i), \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

considérées au n° 24. Les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}$$

se réduisent alors aux séries

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}, \qquad \sum_0^{\infty} \frac{\nu_i}{z+\theta_i}.$$

Nous avons vu (n° 15) que x étant réel positif, on a

$$(1) \qquad F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{\xi c_n}{x^{n+1}} \; (0 < \xi < 1);$$

or, on a

$$x F(x) = \int_0^\infty \frac{x}{x+u} d\Phi(u).$$

Il est aisé de voir que, pour $x = +\infty$, le second membre a pour limite

$$\int_0^\infty d\Phi(u) = \Phi(\infty).$$

En effet, cette intégrale ayant une valeur finie, on peut choisir un nombre L de façon que

$$\int_L^\infty d\Phi(u) = \varepsilon_1,$$

ε_1 étant plus petit qu'un nombre arbitraire ε. On aura alors

$$\int_L^\infty \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \varepsilon'_1,$$

ε'_1 étant plus petit que ε. Ensuite il est clair qu'on peut prendre x assez grand pour que

$$\int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^L d\Phi(u) - \varepsilon''_1,$$

ε''_1 étant plus petit que ε. On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^L d\Phi(u) + \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1 = \int_0^\infty d\Phi(u) - \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1;$$

or, d'après la formule (1), on a

$$\lim_{x=\infty} x F(x) = c_0 = \frac{1}{a_1},$$

donc

$$\int_0^\infty d\Phi(u) = c_0.$$

Ce point établi, nous pouvons écrire

$$F(x)=\int_0^\infty\left[\frac{1}{x}-\frac{u}{x(x+u)}\right]d\Phi(u)=\frac{c_0}{x}-\frac{1}{x}\int_0^\infty\frac{u}{x+u}d\Phi(u),$$

$$(2)\qquad x^2\left[F(x)-\frac{c_0}{x}\right]=-\int_0^\infty\frac{x}{x+u}u\,d\Phi(u).$$

Nous savons que, pour $x=\infty$,

$$\lim x^2\left[F(x)-\frac{c_0}{x}\right]=-c_1.$$

On peut en conclure que l'intégrale

$$(3)\qquad \int_0^\infty u\,d\Phi(u)$$

a une valeur finie et que cette valeur est c_1. En effet, si

$$\int_0^L u\,d\Phi(u)$$

croît au delà de toute limite avec L; le second membre de (2) croîtrait aussi au delà de toute limite pour $x=\infty$, ce qui ne doit pas avoir lieu. L'intégrale (3) a donc une valeur finie, et pour obtenir cette valeur il suffit de faire croître x indéfiniment dans la formule (2). En continuant ces raisonnements, on voit que généralement

$$\int_0^\infty u^k\,d\Phi(u)=c_k.$$

La distribution de masse caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ constitue donc une solution du *problème des moments*.

Dans le cas où la série

$$\sum_0^\infty a_n$$

est divergente, nous n'obtenons ainsi qu'une solution de ce problème, et, en effet, nous démontrerons bientôt que ce problème n'en admet pas d'autres dans ce cas.

Nous avons vu (n° 42) que

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-2)],$$

et du résultat que nous venons d'obtenir on conclut aisément

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \Phi(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

on en conclut que

$$\varphi_n(u) - \Phi(u)$$

doit changer de signe au moins $2n-1$ fois. Soit x_k un point de discontinuité de $\varphi_n(u)$; il est facile de conclure

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \Phi(\overset{-}{x_k}) \leqq \overset{+}{\Phi}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}).$$

Ce résultat précise celui obtenu à la fin du n° 44.

Il est clair aussi que, dans un intervalle où la fonction $\Phi(u)$ est constante, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir plus d'*une* racine.

49. Je reviens à la proposition du n° 46; pour $n > N$ on a

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'.$$

Nous venons de voir que $\Phi(\infty) = \varphi_n(\infty) = c_0$, par conséquent

$$c_0 - \varphi_n(u) \quad \text{et} \quad c_0 - \Phi(u)$$

ne sont jamais négatifs, et à cause de

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) = c_0 - \Phi(u) - [c_0 - \varphi_n(u)],$$

on aura

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq |c_0 - \Phi(u)| + |c_0 - \varphi_n(u)|;$$

or il est facile de voir que

$$|c_0 - \varphi(u)| < \frac{c_2}{u^2},$$

$$|c_0 - \Phi(u)| < \frac{c_2}{u^2}.$$

En effet, considérons la distribution de masse caractérisée par $\Phi(u)$ [ou $\varphi_n(u)$]. Le moment du second ordre est c_2, la masse totale comprise dans le segment de u à ∞ est $c_0 - \Phi(u)$, le moment du second ordre de cette masse est inférieur à c_2; si l'on concentre cette masse au point u, on diminue encore le moment du second ordre; donc

$$u^2 | c_0 - \Phi(u) | < c_2.$$

Il vient donc

$$| \varphi_n(u) - \Phi(u) | < \frac{2c_2}{u^2}$$

et

$$\int_L^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | du < \frac{2c_2}{L},$$

puis

$$\int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | \, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon' + \frac{2c_2}{L}.$$

Par un choix convenable de L, ε, ε' on peut rendre la limite supérieure plus petite qu'un nombre donné, par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | du = 0.$$

50. Voici comment on peut interpréter ce résultat.

Désignons par les symboles D_n et D les distributions de masse caractérisées par les fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$. On peut passer de la distribution D_n à la distribution D par un certain transport de masses. Convenons de dire que le transport d'une masse m sur une longueur l exige un *travail* mesuré par ml. Alors on voit, sans difficulté, que le travail total minimum nécessaire pour passer de D_n à D (ou réciproquement) est mesuré par

$$\int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | du.$$

Nous désignerons ce travail minimum aussi par $\{ D_n, D \}$, et il semble naturel de dire que la distribution D_n diffère infiniment peu de D lorsque $\{ D_n, D \}$ est infiniment petit.

Ainsi D peut être considérée comme la limite de D_n.

En général, lorsqu'on a une suite infinie de distributions

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots,$$

et qu'il existe une distribution D telle que

$$\{ D_n, D \}$$

devienne inférieure à ε dès que n surpasse une certaine limite, on dira que D est la limite de D_n.

On peut reprocher à cette définition de faire intervenir la limite D elle-même, et puisque

$$\{D_n, D_{n+n'}\} \leqq \{D_n, D\} + \{D, D_{n+n'}\} < 2\varepsilon,$$

on serait porté à adopter la définition suivante : la suite

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots$$

tend vers une limite s'il existe un nombre n tel que

$$\{D_n, D_{n+n'}\} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

Mais il est clair que cette définition manque de sens précis, tant qu'on n'aura pas démontré qu'il existe effectivement une distribution D telle que $\{D_n, D\}$ devienne infiniment petit. Nous avons voulu indiquer seulement cette question, que nous n'examinerons pas ici.

Puisque

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_i}{z + x_i},$$

on voit qu'on peut considérer cette réduite elle-même comme une espèce de *moment paramétrique* (dépendant du paramètre z) de la distribution D_n. Et le résultat principal de nos recherches revient donc à ce que le moment paramétrique de D_n a pour limite le moment paramétrique de D.

Or, si l'on considère l'intégrale définie par laquelle s'exprime le moment paramétrique de D, et si l'on se rappelle la définition d'une intégrale définie comme limite d'une certaine somme, on verra que, pour cette somme, on peut justement prendre le moment paramétrique de D_n, c'est-à-dire la $2n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue. On peut donc dire que la fraction continue est une *transformation identique* de l'intégrale définie. Cette singulière réduction l'une à l'autre de deux expressions analytiques si différentes, une intégrale définie et une fraction continue, nous l'avons remarquée pour la première fois dans le cas particulier où $Q_{2n}(z)$ est un polynome X_n de Legendre. (Voir *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 508; 1884).

C'est le désir de généraliser ce résultat qui nous a fait entreprendre les recherches que nous exposons ici.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$.

51. Soit $\psi(u)$ une fonction croissante quelconque $[\psi(o)=o]$, nous supposerons seulement que la distribution de masse qu'elle représente a des moments finis d'ordre quelconque, et nous poserons

$$c_k = \int_0^\infty u^k d\psi(u).$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

qui représente une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la coupure. Si la fonction $\psi(u)$ est constante à partir de $u=a$, l'intégrale se réduit à

$$\int_0^a \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

et la coupure ne s'étend que de $u=o$ jusqu'à $u=-a$. Tous les moments sont alors finis dès que cela est le cas pour $c_0=\psi(a)$. L'intégrale admet évidemment un développement asymptotique

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots,$$

qui est divergent en général et convergent pour $|z|>a$ dans le cas particulier que nous venons de mentionner.

Mais on a toujours, lorsque $z=x$ est réel positif,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}=\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n}+(-1)^n\frac{\xi c_n}{x^{n+1}} \quad (o<\xi<1).$$

Le développement en fraction continue de cette intégrale, ou, à proprement parler, de son développement asymptotique, a fait l'objet des recherches de Tchebicheff, Heine, Darboux.

Nous allons reprendre ici cette étude, en nous attachant surtout à la question de la convergence, qui n'a guère été considérée dans les travaux antérieurs que nous venons de rappeler, et dans lesquels on a pris toujours la fraction continue sous la forme (I^d) (*voir* l'Introduction).

Pour réduire la série en fraction continue, on n'a qu'à appliquer les formules du n° 11, les déterminants A_n et B_n seront positifs comme déterminants des formes quadratiques positives

$$\int_0^\infty (X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u),$$

$$\int_0^\infty u(X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u).$$

On trouvera donc une fraction continue du type que nous avons étudié, les a_i étant positifs.

Dès lors, nous pouvons appliquer les résultats obtenus par l'étude directe de la fraction continue.

Deux cas sont à distinguer :

1° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est convergente.*

Dans ce cas on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_0^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}.$$

2° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente.*

Dans ce cas, on a

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Mais quels rapports ont ces limites avec l'intégrale $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$ qui a été l'origine de la fraction continue?

52. Pour répondre à cette question, supposons d'abord $z = x$ réel et positif. On a alors ce théorème (voir *Comptes rendus*, t. CVIII, p. 1297; 1889) :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}[1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n]^2$$

est égal à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} > \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}.$$

La vérification est facile; posons

$$\mathfrak{L} = 1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n;$$

les conditions du minimum sont

$$(1) \qquad \int_0^\infty (x+u)^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Ces relations sont visiblement équivalentes à celles-ci

$$\int_0^\infty u^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

ou bien, si l'on se souvient, le symbole S introduit au n° 11,

$$S\{u^k \mathfrak{L}\} = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

D'après la formule (3) du n° 11, le polynome $\mathfrak{L}$, dans le cas du minimum, ne diffère donc que par un facteur constant de $Q_{2n}(-u)$, et, puisque $\mathfrak{L}$ se réduit à l'unité pour $u = -x$, on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}.$$

Le minimum est

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}^2 = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}[1 + X_1(x+u) + \ldots + X_n(x+u)^n],$$

ce qui, à cause des formules (1), se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{1}{Q_{2n}(x)}\int_0^\infty \frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u}\,d\psi(u).$$

La dernière intégrale est évidemment égale à

$$S\left[\frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u}\right] = P_{2n}(x),$$

ce qui achève la démonstration.

On vérifiera aussi aisément ce second théorème :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{x(x+u)}[1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n]^2\,du$$

est égal à

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} - \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} > \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}.$$

A ces théorèmes, j'ajouterai la remarque suivante :

Dans le cas du premier théorème, $\mathfrak{L}$ est le polynome en u le plus général qui se réduit à l'unité pour $u = -x$. Or $\left(\frac{-u}{x}\right)^n$ est aussi un tel polynome; on aura donc

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{u^{2n}\,d\psi(u)}{x^{2n}(x+u)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} > \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots - \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}},$$

et l'on trouvera de même

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} < \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_{2n}}{x^{2n+1}}.$$

Ces inégalités, nous les avions obtenues déjà (n° 15), mais rapprochons-les maintenant de celles-ci

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)}.$$

Pour calculer numériquement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u},$$

on peut se servir de la série (même divergente)

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots;$$

la somme d'un nombre pair de termes donnera toujours une limite inférieure, la somme d'un nombre impair de termes une limite supérieure.

Mais on peut aussi réduire la série en fraction continue : les réduites successives donneront encore alternativement des limites supérieures et inférieures.

Nous voyons maintenant qu'*il y a toujours avantage à réduire la série en fraction continue :* les limites données par les réduites sont *plus rapprochées* que celles données par la série.

La limite de l'approximation que peut donner la fraction continue est caractérisée par ces inégalités

$$F(x) \leqq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq F_1(x).$$

53. Il est facile maintenant de répondre à la question posée à la fin du n° 51.

Dans le premier cas, lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente, nous savons que le problème des moments est *indéterminé* (n° 24). C'est dire qu'il existe une infinité d'intégrales

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}, \quad \int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}, \quad \int_0^\infty \frac{d\psi_2(u)}{z+u}, \quad \ldots,$$

qui sont des fonctions holomorphes *distinctes* de z, qui donnent le *même développement asymptotique*

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

et, par conséquent, aussi la *même fraction continue.*

Le calcul des réduites de cette fraction continue conduit à deux limites

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i};$$

mais on ne peut établir évidemment aucun lien précis entre ces deux fonctions parfaitement déterminées et une intégrale telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

puisque cette fonction est susceptible de varier.

La seule chose qu'on peut affirmer c'est que, pour $z = x$, on aura toujours

$$\frac{p(x)}{q(x)} \leqq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq \frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ figurent d'ailleurs aussi parmi les déterminations possibles de $\psi(u)$.

On ne peut pas avoir, pour une valeur particulière $x = x_0$,

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u},$$

sans qu'on ait identiquement dans tout le plan

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et les fonctions $\psi(u)$, $\Phi(u)$ peuvent être considérées comme identiques, puisqu'elles caractérisent la même distribution de masse.

En effet, nous avons vu que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u} - \frac{P_{2n}(x_0)}{Q_{2n}(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}\left[\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x_0)}\right]^2.$$

Or, si le second membre tend vers zéro pour $n=\infty$, comme nous le supposons ici, cela aura lieu à plus forte raison lorsqu'on remplace x_0 par un nombre plus grand. Par conséquent, on aura

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

dès que z est réel, positif, plus grand que x_0.

Mais alors cette égalité aura lieu dans tout le plan.

On verra de même que l'égalité

$$\frac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}$$

entraîne l'identité

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}.$$

Tant que la distribution de masse, caractérisée par $\psi(u)$ n'est pas identique à une de celles représentées par $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$, on aura

$$\frac{p(x)}{q(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

l'égalité étant exclue.

54. Dans le second cas, la fraction continue est convergente et l'on aura, pour $z=x$,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{x+u};$$

car, dans ce cas, $F(x) = F_1(x)$. Il s'ensuit que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u};$$

car cette égalité ne peut avoir lieu pour $z = x$ sans avoir lieu dans tout le plan. Les fonctions $\psi(u)$ et $\Phi(u)$ seront identiques ou elles représenteront au moins la *même* distribution de masse.

On voit aussi que le problème des moments est *déterminé* dans le cas actuel, et qu'il n'admet pas d'autre solution que celle caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ ou $\psi(u)$. En effet, si le problème avait une autre solution caractérisée par $\psi_1(u)$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}$$

donnerait toujours la même fraction continue, et il s'ensuivrait

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Il est à remarquer que ce second cas peut arriver, même lorsque le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

est toujours *divergent*. En effet, la série est dans ce cas lorsque

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

croît au delà de toute limite. Nous savons que, pour cela, il faut et il suffit que les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ne soient pas limités supérieurement. Or, il est clair que cela n'empêche nullement la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

d'être *divergente*. On pourrait, par exemple, prendre arbitrairement tous les a_i, exceptés ceux d'une certaine suite infinie

$$a_p, \quad a_q, \quad a_r, \quad a_s, \quad \dots,$$

et déterminer ensuite ceux-ci de façon que les nombres

$$\frac{1}{a_p a_{p+1}}, \qquad \frac{1}{a_q a_{q+1}}, \qquad \frac{1}{a_r a_{r+1}}, \qquad \dots$$

croissent au delà de toute limite.

55. Pour donner un exemple de la théorie que nous venons d'exposer, considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{[1+\lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{z+u}\, du$$

où $-1 \leqq \lambda \leqq 1$. Puisque

$$d\psi(u) = [1+\lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du,$$

nous avons affaire ici à une distribution de masse à *densité finie*. Cette distribution varie d'ailleurs avec le paramètre λ. Mais, si l'on calcule les moments, on trouve

$$c_k = \int_0^\infty u^k e^{-\sqrt[4]{u}}\, du \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

ils ne dépendent pas du paramètre λ; en effet, on vérifie sans peine que les intégrales

$$\int_0^\infty u^k \sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du = 4\int_0^\infty u^{4k+3} \sin u\, e^{-u}\, du \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

sont *toutes nulles*. Le problème des moments a donc manifestement une infinité de solutions; nous sommes dans le cas indéterminé, et il est certain que les valeurs des a_i seront telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. La fraction continue donnera deux limites

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}, \qquad \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i},$$

et les distributions de masse (μ_i, λ_i), (ν_i, θ_i) constitueront encore deux solutions particulières du problème des moments. Mais on ne peut établir aucun lien *précis* entre la valeur de l'intégrale et les limites fournies par la fraction continue. Toutefois, lorsque $z = x$ est réel positif, on pourra toujours obtenir des limites supérieures et inférieures de l'intégrale en calculant les réduites. Mais, puisque les c_k et les a_k ne dépendent point de λ, on voit qu'on ne tient aucun compte de la partie

$$\lambda \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{x+u}\, du = \pi\lambda\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

Puisque λ peut varier de -1 et $+1$, on en conclut nécessairement

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} > 2\pi\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

La fraction continue ne peut donner qu'une approximation limitée, comme c'est le cas aussi du développement en série. En calculant a_1, $a_2, \ldots$, on voit que ces nombres suivent une loi très compliquée, en sorte qu'on ne peut pas vérifier directement la convergence de la série

$$\sum_1^\infty a_n.$$

56. Je donnerai encore un autre exemple dans lequel cette vérification peut se faire.

Soit $f(u)$ une fonction *impaire et périodique* de u,

$$f(u+\tfrac{1}{2}) = \pm f(u),$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty u^k u^{-\log u} f(\log u)\, du,$$

où k est un entier quelconque, positif, nul ou négatif, est toujours nulle.

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} f(v)\, dv = 0$$

et de faire la substitution

$$v = -\frac{k+1}{2} + \log u.$$

Ainsi, dans le cas $f(u) = \sin(2\pi u)$,

$$\int_0^\infty u^k u^{-\log u} \sin(2\pi \log u)\, du = 0.$$

Je considère maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1+\lambda\sin(2\pi\log u)}{z+u}\,u^{-\log u}\,du,$$

où

$$-1 \leqq \lambda \leqq +1.$$

On voit que les choses se passent comme dans l'exemple précédent; la valeur de

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^k u^{-\log u}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+(k+1)u}\,du = e^{\frac{1}{4}(k+1)^2}$$

est *indépendante* du paramètre λ.

La fraction continue doit donc être oscillante; cela se vérifie ici directement, puisqu'on a

$$a_{2n} = \left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n-1}{2}}\right)e^{-\frac{n}{2}},$$

$$a_{2n+1} = \frac{e^{-\frac{2n+1}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n}{2}}\right)}.$$

A cause de $e>1$, la convergence des séries

$$\sum a_{2n}, \quad \sum a_{2n+1}$$

est manifeste. Pour abréger, je supprime le calcul qui donne les valeurs de s a_n (et qui reste valable sans qu'on ait besoin de supposer que e ait la valeur particulière 2,71828...).

Dans le cas actuel, la différence

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)}$$

doit surpasser nécessairement

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\log u)}{x+u}\,u^{-\log u}\,du = 2e^{-\pi^2}\sqrt{\pi}\,x^{-\log x}.$$

57. Comme exemple du cas déterminé, je rappellerai d'abord la fraction continue étudiée par Laguerre, dont nous avons parlé dans l'Introduction. Puisque, dans ce cas,

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n},$$

la fraction continue est *convergente* et représente dans tout le plan, excepté sur la coupure, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

La masse s'étend ici à l'infini, et, en effet, les nombres $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ne sont pas limités supérieurement.

Dans le cas où la masse ne s'étend pas à l'infini, la fraction continue est naturellement toujours convergente, car le développement en série est alors même convergent pour des valeurs suffisamment grandes de z.

Comme exemple de ce cas, considérons une fraction continue *périodique* telle que

$$b_{2n} = p, \qquad b_{2n-1} = q.$$

On connaît, dans ce cas, immédiatement la fonction $F(z)$

$$F(z) = \frac{\sqrt{z^2+2(p+q)z+(p-q)^2} - z + p - q}{2z}$$

et

$$a_{2n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n;$$

l'une des deux séries

$$\sum_1^\infty a_{2k}, \quad \sum_0^\infty a_{2k+1}$$

sera toujours divergente. Mais la fonction $F(z)$ doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et l'on a vu, dans le n° 39, comment on peut mettre $F(z)$ sous cette forme, si l'expression explicite de $F(z)$ est connue.

Ce calcul conduit ici aux résultats suivants. Deux cas sont à distinguer selon que $p \gtrless q$.

Premier cas : $p > q$.

Posons

$$\alpha = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2,$$
$$\beta = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2,$$

on aura

$$F(z) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} + \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u}\,\frac{du}{z+u}.$$

Ainsi il y a, à l'origine, une concentration de masse égale à $\sqrt{\alpha\beta} = p - q$, puis une distribution continue de masse dans l'intervalle (α, β).

Second cas : $p < q$.

On trouve simplement

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u}\,\frac{du}{z+u};$$

la masse concentrée à l'origine du premier cas a disparu. Dans le cas particulier : $p = q$, on a $\alpha = 0$, et l'on peut appliquer l'une ou l'autre des formules trouvées. Il n'y a pas de masse concentrée à l'origine, mais la *densité* y devient infinie.

Dans le premier cas, la série

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est convergente, et sa somme est $1 : (p - q)$.

58. Nous allons montrer que, toujours dans le cas déterminé, la masse concentrée à l'origine est

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1};$$

elle est nulle lorsque la série est divergente.

Dans le cas indéterminé,

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est le *maximum* de la masse qui peut être concentrée à l'origine; elle s'y trouve, en effet, dans la distribution

$$(\nu_i, \theta_i),$$

puisque

$$\theta_0 = 0, \qquad \nu_0 = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1};$$

mais, dans toute autre distribution, la masse concentrée à l'origine est *moindre*.

Je rappelle la limitation

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq F_1(x),$$

nous savons (nº 15) que

$$\lim_{x=0} x\,F_1(x) = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{x=0} \int_0^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \lim_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon) = \mu,$$

en désignant par μ la masse concentrée à l'origine.

En effet,

$$\int_0^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \int_0^{x^2} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} + \int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u},$$

et il est évident que

$$\int_0^{x^2} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \frac{\psi(x^2)}{1+\xi x} \qquad (0<\xi<1),$$

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} < \psi(\sqrt{x}) - \psi(x^2),$$

$$\int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} < \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}[\psi(\infty) - \psi(\sqrt{x})];$$

la première intégrale tend vers μ, les deux autres vers zéro. Dans le cas déterminé, on a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = F_1(x);$$

il vient donc

$$\mu = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Dans le cas indéterminé, on peut conclure seulement

$$\mu \leqq 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1},$$

et cela pour toutes les distributions équivalentes qui donnent les mêmes moments et la même fraction continue.

Nous savons d'ailleurs que, pour la distribution caractérisée par $\Phi_1(u)$, on a

$$\mu = \nu_0 = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Je dis maintenant que, pour toute autre solution du problème des moments, on a

$$\mu < 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

En effet, admettons que, pour $\Phi_1(u)$ et $\Psi(u)$, on ait

$$\mu = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Si, dans chacune de ces deux distributions (supposées différentes), on *enlève* la masse μ concentrée à l'origine, il restera deux systèmes de masses donnant encore les mêmes moments, c'est-à-dire équivalentes. Il existe alors une troisième distribution de masse, équivalente à ces deux-là et qui a, à l'origine, une masse finie μ'. Cette distribution est caractérisée par une fonction $\Phi'_1(u)$ analogue à $\Phi_1(u)$. En rétablissant maintenant la masse μ, on aurait une solution du problème des moments primitifs, avec une masse $\mu + \mu'$ à l'origine qui serait supérieure à

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Cela est impossible, d'où la proposition énoncée.

59. Dans le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

est divergente, nous avons vu que la fraction continue est convergente et que la limite des réduites est

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\,\Phi(u)}{z+u}.$$

Il est clair maintenant que la fonction $\Phi(u)$ qui figure ici n'est assujettie dans un intervalle quelconque (a, b), à aucune autre condition restrictive que celle d'être croissante. Il s'ensuit qu'en général la coupure est bien une ligne *singulière* à travers laquelle il est impossible de continuer analytiquement la fonction $F(z)$. En effet, pour que cette continuation analytique soit possible à travers l'intervalle $(-a, -b)$ de la coupure, il faut que la fonction $\Phi(u)$ soit une fonction *analytique* de u dans l'intervalle (a, b). Or c'est là une condition très restrictive qui ne sera point satisfaite en général.

Mais, si l'on veut donner des exemples particuliers, on ne peut guère commencer par se donner les a_k, ou cela n'est possible que dans des cas très restreints. Il faudra bien se résigner à prendre pour $\Phi(u)$ quelque fonction analytique; ainsi s'explique qu'en réalité nous n'avons pu donner aucun exemple du cas général dans lequel la coupure est une ligne singulière. Dans tous nos exemples, la coupure est seulement une coupure artificielle.

60. La fonction $\psi(u)$ étant donnée, ou la distribution de masse qu'elle représente, comment peut-on savoir si la fraction continue pour

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

est convergente ou divergente? C'est là un problème qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale; tout ce qu'on peut faire, c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. Lorsque la fraction continue est convergente, le problème des moments n'admet qu'une seule solution; nous dirons aussi, dans ce cas, que la distribution de masse représentée par $\psi(u)$ est déterminée. On ne peut guère faire varier cette distribution, sans introduire des masses négatives, si l'on veut conserver les moments. Or les masses négatives seront toujours exclues. La distribution de masse est indéterminée, au contraire, lorsque la fraction continue n'est pas convergente, mais oscillante.

Voici d'abord quelques remarques qui sont à peu près évidentes. Si, à une distribution de masse indéterminée, on ajoute de nouvelles masses, on restera toujours dans le cas indéterminé. Si, à une distribution déterminée on enlève une partie de la masse (toujours sans introduire des masses négatives), on restera dans le cas déterminé.

Dès qu'on trouve deux distributions équivalentes qui ne sont pas identiques, on est certainement dans le cas indéterminé.

Qu'on veuille bien se reporter maintenant aux formules (8) et (11) des nos 11, 12, par lesquelles les sommes

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$

s'expriment au moyen des c_k.

On trouve facilement que,

$$\sum_0^n \sum_0^n \mathrm{C}_{i,k} \mathrm{X}_i \mathrm{X}_k = \mathfrak{F}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$$

étant une forme quadratique définie et positive, le minimum de

$$\mathfrak{F}(1, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$$

s'exprime par

$$\begin{vmatrix} \mathrm{C}_{0,0} & \mathrm{C}_{0,1} & \ldots & \mathrm{C}_{0,n} \\ \mathrm{C}_{1,0} & \mathrm{C}_{1,1} & \ldots & \mathrm{C}_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{C}_{n,0} & \mathrm{C}_{n,1} & \ldots & \mathrm{C}_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathrm{C}_{1,1} & \ldots & \mathrm{C}_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{C}_{n,1} & \ldots & \mathrm{C}_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Dès lors, on reconnaît que le *minimum* de

$$\int_0^\infty (1 + \mathrm{X}_1 u + \ldots + \mathrm{X}_n u^n)^2 \, d\psi(u)$$

est égal à

$$1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}),$$

et le *maximum* de

$$\int_0^\infty [1 - (1 + \mathrm{X}_1 u + \mathrm{X}_2 u^2 + \ldots + \mathrm{X}_n u^n)^2] \frac{d\psi(u)}{u}$$

est égal à

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

On trouve, du reste, facilement que, dans le premier cas, on a

$$1 + \mathrm{X}_1 u + \ldots + \mathrm{X}_n u^n = \frac{\mathrm{Q}_{2n+1}(-u)}{-u\,\mathrm{Q}'_{2n+1}(0)}$$

et, dans le second,

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = Q_{2n}(-u).$$

Pour abréger, nous écrivons le premier résultat ainsi

$$\{d\psi(u)\}_n = 1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}).$$

Remarquons que l'intégrale, dont $\{d\psi(u)\}_n$ est le minimum, a, pour $u = 0$, un élément égal à la masse μ concentrée à l'origine; on a donc

$$\mu < \{d\psi(u)\}_n,$$

en sorte qu'on retrouve, de cette façon, la limitation

$$\mu \leqq 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Lorsque n augmente, $\{d\psi(u)\}_n$ ne peut que diminuer; pour $n = \infty$, cette expression tend vers une limite positive ou nulle que nous représenterons par

$$\{d\psi(u)\}_\infty = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

61. Considérons d'abord le cas où il n'y a point de masse concentrée à l'origine. Nous savons que, dans le cas déterminé, la masse concentrée à l'origine est égale à

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1},$$

donc

$$\{d\psi(u)\}_\infty = 0.$$

Mais, dans le cas indéterminé, la série

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est convergente et par conséquent

$$\{d\psi(u)\}_\infty > 0.$$

Ainsi, *s'il n'y a point de concentration de masse à l'origine, la frac-*

tion continue sera convergente ou oscillante selon que

$$\{d\psi(u)\}_\infty$$

est nul ou positif.

Si la distribution $\mathfrak{D}$ représentée par $\psi(u)$ a, à l'origine, une masse μ, enlevons cette masse et soit $\mathfrak{D}'$ la distribution ainsi modifiée. Supposons que, d'une manière ou d'autre (par exemple, à l'aide de la proposition précédente), on sache si la distribution $\mathfrak{D}'$ est déterminée ou indéterminée, qu'est-ce qu'on en peut conclure pour $\mathfrak{D}$?

Si la distribution $\mathfrak{D}'$ est indéterminée, $\mathfrak{D}$ est aussi indéterminée. Si, au contraire, $\mathfrak{D}'$ est déterminée, je dis que $\mathfrak{D}$ est aussi déterminée, en général; il faut faire exception seulement pour un cas singulier que nous indiquerons. En effet, voici comment on peut conclure dans le cas où $\mathfrak{D}$ serait indéterminée, $\mathfrak{D}'$ déterminée. Soit $\mathfrak{D}_1$ la distribution équivalente à $\mathfrak{D}$, mais qui a, à l'origine, la plus grande concentration de masse possible, cette masse étant μ_1. Elle est donnée par une fonction Φ_1

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i},$$

et $\nu_0 = \mu_1$. Tant que $\mathfrak{D}$ n'est pas identique à $\mathfrak{D}_1$, on a

$$\mu_1 > \mu.$$

Enlevons à $\mathfrak{D}_1$ la masse μ (ce qui peut se faire sans introduire une masse négative), on aura une distribution $\mathfrak{D}'_1$ équivalente à $\mathfrak{D}'$. Donc, si $\mathfrak{D}'$ est *déterminée*, $\mathfrak{D}'_1$ et $\mathfrak{D}'$ doivent être *identiques*, et, par exemple, aussi $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$.

On peut donc dire, si $\mathfrak{D}'$ est déterminée, $\mathfrak{D}$ l'est aussi en général; il y a exception seulement lorsque $\mathfrak{D}$ est une distribution du type (ν_i, θ_i).

62. Je vais supposer maintenant, comme cela arrive dans les exemples particuliers qu'on peut traiter,

$$d\psi(u) = f(u)\,du,$$

$f(u)$ étant une fonction positive et généralement continue. On a ici

$$\{f(u)\,du\}_n = \text{minimum de} \int_0^\infty f(u)\{1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n\}^2\,du.$$

D'abord, dans certains cas particuliers, on sait calculer ce minimum, ou obtenir la fraction continue. Ainsi, par exemple, dans le cas

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{u^{a-1}e^{-bu}}{z+u}\,du,$$

on trouve

$$a_1 = 1, \qquad a_{2n+1} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n},$$

$$a_2 = \frac{b}{a}, \qquad a_{2n} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)b}{a(a+1)\ldots(a+n-1)},$$

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{1.2\ldots n}.$$

Puisque $a > 0$, on voit que la série $\sum_0^\infty a_{2k+1}$ est divergente, donc

$$\{u^{a-1}e^{-bu}\,du\}_\infty = 0.$$

Il est clair que, c étant une constante positive, on a

$$\{f(cu)\,du\}_n = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_n,$$

$$\{f(cu)\,du\}_\infty = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_\infty.$$

D'autre part, si

$$f_1(u):f(u)$$

reste inférieur à un nombre fixe, on aura

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0.$$

Si, au contraire, le rapport

$$f_1(u):f(u)$$

est constamment supérieur à un nombre positif, on aura certainement

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty > 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty > 0.$$

63. On peut aller plus loin dans cette voie, et nous démontrerons cette proposition.

Supposons que

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0,$$

et que le rapport $f_1(u):f(u)$ a un maximum fini M_α dans l'intervalle (α, ∞) (ce nombre M_α pouvant d'ailleurs croître indéfiniment lorsque α tend vers zéro), alors, je dis qu'on aura aussi

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0.$$

Pour le démontrer, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra. Je détermine d'abord un nombre positif α par cette condition

$$\int_0^\alpha f_1(u)\,du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit ensuite $f(\bar{u})$ une fonction qui est nulle dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et égale à $f(u)$ pour $u > \alpha$.

On aura

$$\{f(\bar{u})\,du\}_n = \int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du,$$

$\mathfrak{L}(\bar{u})$ étant un certain polynome du degré n en u et qui se réduit à l'unité pour $u = 0$.

D'autre part, si l'on a

$$\{f(u)\,du\}_n = \int_0^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(u)^2\,du,$$

on aura

$$\{f(\bar{u})\,du\}_n < \int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(u)^2\,du = \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(u)^2\,du < \{f(u)\,du\}_n.$$

Donc, puisque nous supposons

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0,$$

on aura aussi

$$\{f(\bar{u})\,du\}_\infty = 0.$$

J'observe ensuite que

$$\{f_1(u)\,du\}_n < \int_0^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \int_0^\alpha f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du + \int_\alpha^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du.$$

Or, le polynome $\mathfrak{L}(\bar{u})$ est déterminé à un facteur près par les conditions

$$\int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0 \qquad (k = 1.2, \ldots n),$$

ou

$$\int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0.$$

Il s'ensuit que toutes les racines de

$$\mathfrak{L}(\bar{u}) = 0$$

sont positives, plus grandes que α. Et puisque $\mathfrak{L}(\bar{0}) = 1$, on voit que, dans l'intervalle $(0, \alpha)$, on a

$$0 < \mathfrak{L}(\bar{u}) \leqq 1,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\alpha f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \int_0^\alpha f_1(u)\,du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ensuite

$$\int_\alpha^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \mathrm{M}_\alpha \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \mathrm{M}_\alpha \{f(\bar{u})\,du\}_n,$$

donc

$$\{f_1(u)\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon + \mathrm{M}_\alpha \{f(\bar{u})\,du\}_n.$$

Or, il existe un nombre ν tel que, pour $n > \nu$, on a

$$\mathrm{M}_\alpha \{f(\bar{u})\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

et il est clair d'après cela qu'on a

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas

$$f(u) = \frac{4}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}},$$

la fraction continue (*voir* plus loin n° 86) s'obtient avec des valeurs simples des a_k

$$a_k = \frac{4}{k},$$

par conséquent

$$\left\{\frac{4\,du}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0,$$

et aussi, c étant une constante positive

$$\left\{\frac{du}{e^{c\sqrt{u}}-e^{-c\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0.$$

Cela étant, posons

$$f_1(u) = u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u),$$

$$f(u) = \frac{1}{e^{c\sqrt{u}}-e^{-c\sqrt{u}}},$$

où $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \geqq \frac{1}{2}$, tandis que nous supposons $c < b$. Ensuite $\mathcal{G}(u)$ sera une fonction positive de u, qui dans tout intervalle (α, ∞) reste inférieur à un nombre fixe. On a

$$f_1(u):f(u) = u^{a-1}\mathcal{G}(u)\,e^{-bu^\lambda+c\sqrt{u}}(1-e^{-2c\sqrt{u}}),$$

et l'on voit que ce rapport tend vers zéro pour $u = \infty$.

Nous pouvons appliquer la proposition démontrée et conclure

$$\{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u)\}_\infty = 0.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u)}{z+u}\,du$$

donne une fraction continue *convergente*, tant que $\lambda \geqq \frac{1}{2}$. Supposons $\mathcal{G}(u) = 1$, la fraction continue sera *oscillante* pour $\lambda < \frac{1}{2}$; pour abréger, je supprime la démonstration.

64. Appliquons ce résultat à la série de Stirling.

On sait qu'en posant

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \mathrm{J}(z),$$

on a

$$\mathrm{J}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi u}}\right)$$

ou

$$\mathrm{J}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{zu^{-\frac{1}{2}}\,du}{z^2+u}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right).$$

C'est là une intégrale telle que nous l'avons étudiée; on a seulement remplacé z par z^2 et multiplié par z. Le développement en série prend ainsi la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{B_1}{1.2.z} - \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6.z^5} - \ldots,$$

et la fraction continue devient

$$\text{(B)} \qquad \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z + \cfrac{1}{a_3 z + \ldots}}}$$

On a ici

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi\sqrt{u}} \mathcal{G}(u),$$

$$\mathcal{G}(u) = e^{2\pi\sqrt{u}} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right);$$

$\mathcal{G}(u)$ tend ici vers l'unité pour $u = \infty$ et satisfait ainsi à la condition imposée à cette fonction dans notre énoncé. *Il suffit donc de transformer la série de Stirling* (A) *dans la fraction continue* (B), *pour avoir une expression convergente qui représente* $J(z)$ *tant que la partie réelle de z est positive.*

La fraction continue change de signe avec z comme l'intégrale de Binet, dont elle est une transformation identique; mais, lorsqu'on change ainsi le signe de z, ces expressions donnent $-J(z)$, mais pas $J(-z)$; l'axe imaginaire est une coupure, aussi bien pour l'intégrale que pour la fraction continue.

Le calcul des a_k est très pénible; on trouve

$$a_1 = 12, \qquad a_2 = \frac{5}{2}, \qquad a_3 = \frac{84}{53}, \qquad a_4 = \frac{2809}{2340}, \qquad a_5 = \frac{1003860}{1218947}, \qquad \ldots;$$

la loi de ces nombres paraît extrêmement compliquée.

65. Nous terminons ici cette étude de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

par l'énoncé des propositions suivantes, dont la démonstration se déduit aisément des formules que nous donnerons plus loin (nos 76, 77, 78).

I. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, on aura de même une fraction continue convergente pour

$$\frac{\mu}{z} + \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

μ *étant une constante positive, excepté dans un cas singulier.* Ce cas singulier se présente lorsque la distribution de masse caractérisée par $\psi(u)$ est identique à celle donnée par une fonction $\Phi_1(u)$

$$(\nu_i, \theta_i)$$

à laquelle on aurait enlevé la masse ν_0 concentrée à l'origine.

II. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{z+u}$$

donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.

Le cas singulier exceptionnel est le même que pour la proposition (I).

III. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\psi(u-\lambda)}{z+u},$$

où λ *est une constante positive, donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.*

Ce cas singulier a lieu lorsque la distribution de masse caractérisée par

$\psi(u)$ est celle-ci

$$(\mu_i, \lambda_i - \lambda_1) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

c'est-à-dire si cette distribution s'obtient en rapprochant de la quantité λ_1, de l'origine, les masses d'une distribution (μ_i, λ_i) provenant d'une fonction $\Phi(u)$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z + \lambda_i},$$

(*A suivre.*)

ERRATA.

Page J.85, ligne 11, en descendant, après « de $\Phi(u)$ » ajouter « et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$ ».

Page J.86, ligne 11, en descendant, après « de $\Phi(u)$ » ajouter « et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$ ».