Pierrette Cassou-Noguès
Ha Huy Vui

Théorème de Kuiper-Kuo-Bochnak-Lojasiewicz à l'infini

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 3 (1996), p. 387-406
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_3_387_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 3, 1996

Théorème de Kuiper–Kuo–Bochnak–Lojasiewicz à l'infini(*)

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS(1) and HA HUY VUI(2)

RÉSUMÉ. — Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$. On dit que P est *bon* si pour tout $t \in \mathbb{C}$, il existe un voisinage D de t et un sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}^2$ tel que $P\restriction_{P^{-1}(D)-K}$ soit une fibration localement triviale. On dit que P est *modéré* si son application gradient est propre au-dessus de 0. Dans [NZ] on introduit les notions de Q-*modéré* et M-*modéré* et on montre que l'ensemble des polynômes modérés est contenu dans l'ensemble des polynômes Q-modérés, lui-même contenu dans l'ensemble des polynômes M-modérés et que ce sont des polynômes bons. Dans la première partie, on montre qu'il existe des polynômes bons qui ne sont pas Q-modérés.

On dit que deux polynômes sont équivalents si les entrelacs à l'infini de leurs fibres génériques sont isotopiques. On démontre dans la deuxième partie que $P \sim_\infty P + Q$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k et de hauteur bornée si et seulement si le nombre de Lojasiewicz à l'infini du polynôme P est inférieur ou égal à $k - 1$.

ABSTRACT. — Let $P \in \mathbb{C}[X, Y]$. P is a *good* polynomial if and only if for $t \in \mathbb{C}$, there exists a neighbourhood D of t and a compact subset $K \subset \mathbb{C}^2$ such that $P\restriction_{P^{-1}(D)-K}$ is a locally trivial fibration. P is a *tame* polynomial if and only if its gradient map is proper above 0. In [NZ] are defined Q-*tame* and M-*tame* polynomials and it is shown that the set of Q-tame polynomials is contained in the set of M-tame polynomials and that they are good polynomials. In the first part of this paper is is shown that there exist good polynomials which are not Q-tame.

Two polynomials are equivalent if the links at infinity of their generic fibers are isotopic. In the second part, we show that P is equivalent to $P + Q$ for all polynomial Q with degree less or equal to k and bounded height if and only if the Lojasiewicz number at infinity of P is less or equal to $k - 1$.

(*) Reçu le 24 mars 1994

(1) Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex 05 (France)
E-mail : cassou at math.u-bordeaux.fr

(2) Institute of Mathematics, P.O. Box 601, Bo Ho, VN-10000 Hanoi (Vietnam)

Introduction

Cet article est composé de deux parties.

Broughton [B] a considéré l'ensemble des polynômes modérés. Un polynôme est *modéré* s'il existe un voisinage compact U de ses points critiques et un nombre réel strictement positif K_∞ tel que $\|\mathrm{grad}\, P(x,y)\| > K_\infty$ sur $\mathbb{C}^2 - U$. Broughton [B] a montré que P est modéré si et seulement s'il a un nombre fini de points critiques et si $\mu(P) = \mu(P + ax + by)$ pour a et b suffisamment petits où $\mu(P)$ désigne le nombre de Milnor global de P.

Dans [N] et [NZ], Némethi et Zaharia considèrent deux autres classes de polynômes, les polynômes *Q-modérés* et les polynômes *M-modérés*. Ils montrent que les polynômes modérés sont contenus dans l'ensemble des polynômes Q-modérés et que cet ensemble est lui-même contenu dans l'ensemble des polynômes M-modérés. Ils montrent que la première inclusion est stricte, et posent la question de savoir si la deuxième l'est. Dans la première partie de cet article, nous donnons un exemple de polynôme M-modéré qui n'est pas Q-modéré.

Ensuite pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous donnons la définition suivante. Un polynône *0-modéré* est un polynôme bon. Pour $k \geq 1$, on dit que P est *k-modéré*, si P a un nombre fini de points singuliers, et si $\mu(P) = \mu(P+Q)$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k et de hauteur bornée. Les polynômes modérés sont donc des polynômes 1-modérés. On généralise le théorème de Broughton en montrant que P k-modéré est équivalent au fait qu'il existe une constante K_∞ et un nombre réel R_0 tels que

$$\|\mathrm{grad}\, P(x,y)\| \geq K_\infty \|(x,y)\|^{k-1}$$

pour tous (x,y) tels que $\|(x,y)\| \geq R_0$.

Enfin on démontre un analogue du théorème de Kuiper–Kuo–Bochnak–Lojasiewicz. On dit que deux polynômes bons sont *équivalents*, si les entrelacs à l'infini de leurs fibres génériques sont isotopiques. On montre que si P est un polynôme k-modéré, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k et de hauteur bornée,

$$P \sim_\infty P + Q\,.$$

Et réciproquement, si pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k et de hauteur bornée, on a $P \sim_\infty P + Q$, alors P est k-modéré.

On peut remarquer que dans tous ces théorèmes, on est capable de donner une borne explicite pour la hauteur de Q.

1. L'ensemble des polynômes Q-modérés est différent de l'ensemble des polynômes M-modérés

Dans [N], Némethi introduit la notion de polynômes Q-modérés.

DÉFINITION 1.— *On dit que $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ est un polynôme Q-modéré s'il n'existe pas de suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = \infty\,, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{grad} P(z_k) = 0$$

et $\{P(z_k) - \langle z_k\,, \operatorname{grad} P(z_k)\rangle\}_k$ converge.

On note

$$M(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^n\,,\ \operatorname{grad} P(z) = \lambda z\}\,.$$

Dans [NZ1] et [NZ2] Némethi et Zaharia introduisent la notion de polynômes M-modérés.

DÉFINITION 2.— *On dit que $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ est un polynôme M-modéré s'il n'existe pas de suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M(P)$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = \infty\,, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{grad} P(z_k) = 0$$

et $\{P(z_k)\}_k$ converge.

Zaharia nous a fait remarquer que dans [NZ2, p. 683] la preuve du théorème 1 montre aussi que l'ensemble des polynômes M-modérés est contenu dans l'ensemble des polynômes bons.

Dans le cas de deux indéterminées, Ha [H2] a démontré que P est un polynôme bon s'il n'existe pas de suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^2$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = \infty\,, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{grad} P(z_k) = 0$$

et $\{P(z_k)\}_k$ converge.

On voit donc que dans le cas de 2 indéterminées, l'ensemble des polynômes bons est égal à l'ensemble des polynômes M-modérés, et d'après Némethi [N, p. 238] on montre que l'ensemble des polynômes Q-modérés est contenu dans l'ensemble des polynômes bons.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'ensemble des polynômes Q-modérés est strictement contenu dans l'ensemble des polynômes bons.

Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 1 [NZ]. — *Soient*

$$f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$$

des fonctions polynomiales. Soient

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f_i(x) = 0, i = 1, \ldots, q\}$$
$$W = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g_i(x) > 0, i = 1, \ldots, s\}.$$

Supposons qu'il existe une suite $(x^k) \subset U \cap W$ *telle que* $\lim_{k\to\infty} \|x^k\| = \infty$, $\lim_{k\to\infty} h_j(x^k) = 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$. *Alors il existe une courbe algébrique réelle* $p : (0, \varepsilon) \to U \cap W$ *avec* $\lim_{t\to 0} p(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} h_j(p(t)) = 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$ *et de la forme*

$$p(t) = at^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + \cdots$$

avec $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *et* $\alpha < 0$.

Si

$$P(x, y) = \sum a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$

on appelle *polygone de Newton* de P, noté $\Delta(P)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\operatorname{Supp} P = \{\alpha \mid \alpha_\gamma \neq 0\}.$$

On note $\Delta_\infty(P) = \Delta(P) - (\Delta_0(P) \cap \Delta(P))$ où $\Delta_0(P)$ désigne le polygone de Newton à l'origine de P. On appelle $\Delta_\infty(P)$ le *polygone de Newton* à l'infini de P.

LEMME 2. — *Si P est bon, et s'il existe une suite de la forme* $z(t) = (t^a, t^b b(t))$ *qui vérifie*

$$\lim_{t\to 0} \|z(t)\| = \infty, \quad \lim_{t\to 0} \operatorname{grad} P(z(t)) = 0$$

alors, il existe une face du polygone de Newton à l'infini de P d'équation $ax + by = c$.

Preuve du lemme 2.— On écrit

$$P(x,y) = \sum a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

$$P'_x(x,y) = \sum a_\alpha \alpha_1 x^{\alpha_1 - 1} y^{\alpha_2}$$

$$P'_y(x,y) = \sum a_\alpha \alpha_2 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2 - 1}.$$

Donc

$$P'_x(t) = \sum a_\alpha \alpha_1 t^{a\alpha_1 + b\alpha_2 - a} b(t)^{\alpha_2}$$

$$P'_y(t) = \sum a_\alpha \alpha_2 t^{a\alpha_1 + b\alpha_2 - b} b(t)^{\alpha_2 - 1}.$$

On ne peut pas avoir $a\alpha_1 + b\alpha_2 - a > 0$ et $a\alpha_1 + b\alpha_2 - b > 0$ pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \operatorname{Supp} P$. En effet si a et b sont de signe contraire, on a $\lim_{t\to 0} P(t) = 0$, et on a supposé que P est bon, si a et b sont de même signe, $\operatorname{Supp} P$ serait dans la partie hachurée.

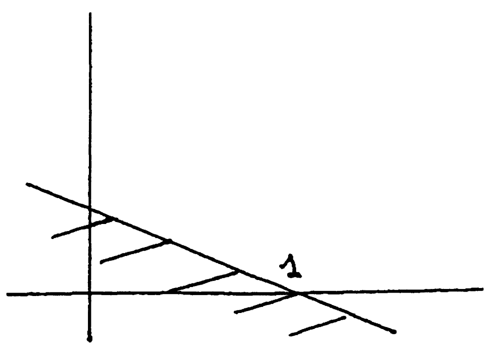

Fig. 1

Il existe donc $(\alpha_1, \alpha_2) \in \operatorname{Supp} P$ tel que $a\alpha_1 + b\alpha_2 - b < 0$. Soit E_1 l'ensemble des $(\alpha_1, \alpha_2) \in \operatorname{Supp} P$ tels que $a\alpha_1 + b\alpha_2 - b$ soit minimum. Si $|E_1| = 1$, $\lim_{t\to 0} \operatorname{grad} P(x,y) = \infty$. Donc $|E_1| \geq 2$. Notons

$$c = \min_{(\alpha_1,\alpha_2)\in \operatorname{Supp} P} a\alpha_1 + b\alpha_2 .$$

Alors la droite d'équation $ax + by = c$ est une face du polygone à l'infini de P. Le Lemme 2 est démontré. $\square$

On note F la face du polygone de Newton de P d'équation $ax + by = c$. On note

$$P_F(x,y) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in F} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$,

$$P_{F+i}(x,y) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2)\in \operatorname{Supp} P \\ a\alpha_1 + b\alpha_2 = c+i}} a_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} .$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, P_{F+i} est un polynôme quasi homogène

$$\begin{aligned} P(t) = P\big(t^a, t^b b(t)\big) &= P_F\big(t^a, t^b b(t)\big) + P_{F+1}\big(t^a, t^b b(t)\big) + \cdots \\ &= t^c \left(P_F\big(1, b(t)\big) + tP_{F+1}\big(1, b(t)\big) + \cdots\right) . \end{aligned}$$

On écrit

$$P(t) = t^c P_c + t^{c+1} P_{c+1} + \cdots$$

On note

$$H(x,y) = P(x,y) - xP'_x(x,y) - yP'_y(x,y) .$$

On pose

$$H_F(x,y) = P_F(x,y) - xP'_{F,x}(x,y) - yP'_{F,y}(x,y)$$

et pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$,

$$H_{F+i}(x,y) = P_{F+i}(x,y) - xP'_{F+i,x}(x,y) - yP'_{F+i,y}(x,y) .$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, H_{F+i} est un polynôme quasi homogène

$$\begin{aligned} H(t) = H\big(t^a, t^b b(t)\big) &= H_F\big(t^a, t^b b(t)\big) + H_{F+1}\big(t^a, t^b b(t)\big) + \cdots \\ &= t^c \left(H_F\big(1, b(t)\big) + tH_{F+1}\big(1, b(t)\big) + \cdots\right) . \end{aligned}$$

On écrit

$$H(t) = t^c H_c + t^{c+1} H_{c+1} + \cdots ,$$

$$P'_x(t) = t^{c-a} P'_{x,c} + t^{c-a+1} P'_{x,c+1} + \cdots ,$$

$$P'_y(t) = t^{c-b} P'_{y,c} + t^{c-b+1} P'_{y,c+1} + \cdots .$$

On va démontrer par récurrence, que si

$$P'_{x,c} = 0 = P'_{x,c+1} = \ldots = P'_{x,c+i}$$

et

$$P'_{y,c} = 0 = P'_{y,c+1} = \ldots = P'_{y,c+i}$$

alors

$$H_c = 0 = H_{c+1} = \ldots = H_{c+i} \quad \text{et} \quad P_c = 0 = P_{c+1} = \ldots = P_{c+i}\,.$$

Si

$$P'_{y,c} = P'_{F,y}\big(1, b(0)\big) = 0\,,$$

alors

$$H_c = P_F\big(1, b(0)\big) - P'_{F,x}\big(1, b(0)\big)\,.$$

Mais

$$cP_F\big(1, b(0)\big) = aP'_{F,x}\big(1, b(0)\big) \quad \text{et} \quad P_c = P_F\big(1, b(0)\big)\,.$$

Donc, si $P'_{F,x}\big(1, b(0)\big) = 0$, alors $H_c = 0$ et $P_c = 0$.

On suppose que l'on a démontré que si

$$P'_{x,c} = 0 = P'_{x,c+1} = \ldots = P'_{x,c+i-1}$$

et

$$P'_{y,c} = 0 = P'_{y,c+1} = \ldots = P'_{y,c+i-1}$$

alors

$$H_c = 0 = H_{c+1} = \ldots = H_{c+i-1} \quad \text{et} \quad P_c = 0 = P_{c+1} = \ldots = P_{c+i-1}\,.$$

On suppose

$$P'_{y,c} = 0 = P'_{y,c+1} = \ldots = P'_{y,c+i}\,.$$

On a

$$P_{c+i} = \left(\frac{1}{i!}\,\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\,P_F\big(1, b(t)\big) + \right.$$
$$\left. + \;\frac{1}{(i-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}t^{i-1}}\,P_{F+1}\big(1, b(t)\big) + \cdots + P_{F+i}\big(1, b(t)\big)\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$cP_F\big(1,b(t)\big) = aP'_{F,x}\big(1,b(t)\big) + b\,b(t)P'_{F,y}\big(1,b(t)\big)$$

$$c\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\,P_F\big(1,b(t)\big) = \\ = a\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\,P'_{F,x}\big(1,b(t)\big) + b\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\,b^{(j)}(t)\frac{\mathrm{d}^{i-j}}{\mathrm{d}t^{i-j}}\,P'_{F,y}\big(1,b(t)\big)$$

$$(c+k)P_{F+k}\big(1,b(t)\big) = aP'_{F+k,x}\big(1,b(t)\big) + b\,b(t)P'_{F+k,y}\big(1,b(t)\big)$$

$$(c+k)\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P_{F+k}\big(1,b(t)\big) = \\ = a\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P'_{F+k,x}\big(1,b(t)\big) + b\sum_{j=0}^{i-k}\binom{i-k}{j}b^{(j)}(t)\frac{\mathrm{d}^{i-k-j}}{\mathrm{d}t^{i-k-j}}\,P'_{F+k,y}\big(1,b(t)\big).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{(c+k)}{(i-k)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P_{F+k}\big(1,b(t)\big)\bigg|_{t=0} = \\ = aP'_{x,c+i} + b\sum_{j=0}^{i}\frac{b^{(j)}(t)}{j!}\sum_{k=0}^{i-j}\frac{1}{(i-k-j)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-k-j}}{\mathrm{d}t^{i-k-j}}\,P'_{F+k,y}\big(1,b(t)\big)\bigg|_{t}.$$

C'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{(c+k)}{(i-k)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P_{F+k}\big(1,b(t)\big)\bigg|_{t=0} = aP'_{x,c+i} + b\sum_{j=0}^{i}\frac{b^{(j)}(t)}{j!}\,P'_{y,c+i-j} \\ = aP'_{x,c+i}\,.$$

Si l'on montre que

$$\sum_{k=0}^{i}\frac{k}{(i-k)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P_{F+k}\big(1,b(t)\big)\bigg|_{t=0} = iP_{c+i} \tag{1}$$

alors $(c+i)P_{c+i} = aP'_{x,c+i}$ et comme $H_{c+i} = P_{c+i} - P'_{x,c+i}$, si $P'_{x,c+i} = 0$ alors $H_{c+i} = 0$ et $P_{c+i} = 0$. Mais

$$P_{c+i} = \sum_{k=0}^{i}\frac{1}{(i-k)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}}\,P_{F+k}\big(1,b(t)\big)\bigg|_{t=0},$$

donc :

$$(1) \iff \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}} P_{F+k}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_F\big(1, b(t)\big) = b'(t) P_{F,y}\big(1, b(t)\big)\,.$$

Donc

$$\frac{1}{(i-1)!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} P_F\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j!(i-j-1)!} b^{j+1}(0) \frac{\mathrm{d}^{i-j-1}}{\mathrm{d}t^{i-j-1}} P'_{F,y}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{1}{(i-2)!} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}t^{i-1}} P_{F+1}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{i-2} \frac{1}{j!(i-j-2)!} b^{j+1}(0) \frac{\mathrm{d}^{i-j-2}}{\mathrm{d}t^{i-j-2}} P'_{F,y}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{F+i-1}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} = b'(t) P_{F+i-1,y}\big(1, b(t)\big)\big|_{t=0}\,.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}t^{i-k}} P_{F+k}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} =$$
$$= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{b^{j+1}(0)}{j!} \sum_{k=j+1}^{i} \frac{1}{(k-1-j)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1-j}}{\mathrm{d}t^{k-1-j}} P'_{F+i-k,y}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{b^{j+1}(0)}{j!} \sum_{k=0}^{i-j-1} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} P'_{F+i-j-1-k,y}\big(1, b(t)\big)\Big|_{t=0} = 0\,.$$

Nous pouvons maintenant donner notre exemple de polynôme bon et non Q-modéré. Soit

$$\begin{aligned}P = {} & \left(x^2+y^3\right)^3 + \frac{-42\,072\,253}{10\,368}\,x + \frac{-57\,253}{27}\,x^2 + \frac{3\,283}{6}\,x^3 + 17\,x^4 - 10\,x^5 \\ & + y\left(\frac{225\,884\,173}{20\,736} + \frac{-673\,321}{108}\,x + \frac{2\,623}{12}\,x^2 + 268\,x^3 + \frac{-49}{2}\,x^4\right) \\ & + y^2\left(\frac{100\,183}{27} + \frac{-23\,969}{9}\,x + \frac{511}{2}\,x^2 + 44\,x^3 - 6x^4\right) \\ & + y^6(-91+26\,x) - \frac{47}{2}\,y^7 + 6y^8\,.\end{aligned}$$

Ce polynôme a un seul point à l'infini. Le diagramme de Eisenbud et Neumann à l'infini d'une fibre quelconque est

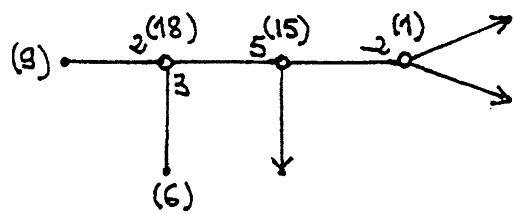

Fig. 2

On a noté les ℓ_i entre parenthèses à côté de chaque sommet. Ils sont tous strictement positifs. D'après Ha [H3] et Le van Thanh et Neumann [NL], ceci prouve que le polynôme est bon.

Il y a seulement deux suites $x(t) = t^{-3}b(t)$, $y(t) = -t^{-2}$ qui vérifient

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{grad} P\big(x(t), y(t)\big) = 0\,.$$

Pour la première, on a

$$\begin{aligned}b(t) = {} & 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{-37}{12}\,t^4 + t^5 + \frac{161}{18}\,t^6 + \frac{-105}{32}\,t^7 + \frac{-38\,107}{1\,728}\,t^8 + \\ & + \frac{13\,285}{3\,456}\,t^9 + \frac{478\,477}{20\,736}\,t^{10} + \frac{1\,457\,407}{41\,472}\,t^{11} \\ & + \frac{-48\,215\,725}{248\,832}\,t^{12} + \frac{39\,050\,845}{248\,832}\,t^{13} + \frac{33\,874\,259}{1\,492\,992}\,t^{14} \\ & + \frac{1\,950\,738\,107}{1\,990\,656}\,t^{15} + \frac{124\,225\,307\,821}{35\,831\,808}\,t^{16} + \cdots\end{aligned}$$

On a

$$P(t) = \frac{-670\,293\,505}{124\,416}\,t^{-1} + \cdots \quad \text{et} \quad H(t) = c_0 + c_1 t + \cdots$$

Pour la seconde,

$$\begin{aligned} b(t) = {} & -1 + t - t^2 + t^3 + \frac{37}{12}t^4 + t^5 + \frac{-161}{18}t^6 + \frac{-105}{32}t^7 + \frac{38\,107}{1\,728}t^8 + \\ & + \frac{13\,285}{3\,456}t^9 + \frac{-478\,477}{20\,736}t^{10} + \frac{1\,457\,407}{41\,472}t^{11} + \\ & + \frac{48\,215\,725}{248\,832}t^{12} + \frac{39\,050\,845}{248\,832}t^{13} + \frac{-33\,874\,259}{1\,492\,992}t^{14} + \\ & + \frac{1\,950\,738\,107}{1\,990\,656}t^{15} + \cdots \end{aligned}$$

On a

$$P(t) = \frac{670\,293\,505}{124\,416}\,t^{-1} + \cdots$$

Le polynôme est donc M-modéré, et il n'est pas Q-modéré. Les calculs ont été faits avec Maple.

2. Théorème de Kuiper–Kuo–Bochnak–Lojasiewicz à l'infini

Dans ce paragraphe, nous considérons des polynômes bons. Nous graduons l'ensemble des polynômes bons en introduisant la notion de polynômes k-modérés, pour $k \geq 0$. Nous montrons tout d'abord qu'un polynôme est k-modéré si et seulement si son nombre de Lojasiewicz est supérieur ou égal à $k-1$, et nous montrons ensuite un analogue du théorème de Kuiper–Kuo–Bochnak–Lojasiewicz, qui fixe l'ordre de détermination d'un polynôme k-modéré en fonction de k.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[x\,,\,y]$. On note $\mathcal{L}_\infty(P)$ son *nombre de Lojasiewicz à l'infini*, défini par

$$\mathcal{L}_\infty(P) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln \phi(r)}{\ln r}$$

où

$$\phi(r) = \inf_{\|x\| = r} \left\| \operatorname{grad} P(x) \right\| .$$

Donc, il existe c_0 et $R_0 \gg 1$ tels que

$$\|\mathrm{grad}\, P(x,y)\| \geq c_0 \|x\|^{\mathcal{L}_\infty(P)} \tag{2.1}$$

pour tous les (x,y) tels que $\|(x,y)\| \geq R_0$.

Le supremum des c_0 tel que (2.1) soit vérifiée est appelé le *coefficient de Lojasiewicz à l'infini* de P. On le note K_∞.

Soit $Q(x,y) \in \mathbb{C}[x\,,\,y]$,

$$Q(x,y) = \sum_{\alpha+\beta \leq s} a_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$$

avec $a_{\alpha,\beta} \neq 0$. Alors on appelle hauteur de Q

$$h_Q = \max_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|\,.$$

On sait, d'après [H], qu'un polynôme est bon si et seulement si $\mathcal{L}_\infty(P) \geq -1$ et qu'il est modéré si et seulement si $\mathcal{L}_\infty(P) \geq 0$. Dans [B], Broughton a montré que P est modéré si et seulement s'il n'a qu'un nombre fini de points singuliers et $\mu(P + ax + by) = \mu(P)$ pour a et b assez petits.

DÉFINITION .— *Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que P est 0-modéré si P est bon. Pour $k \geq 1$, on dit que P est k-modéré, si :*

i) $\mathcal{L}_\infty(P) \geq 0$,

ii) $\mu(P+Q) = \mu(P)$ *pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k et de hauteur $h_Q \leq K_\infty/(4kD_k)$ où D_k est la dimension de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k.*

THÉORÈME 3.— *Soit $k \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) P est k-modéré,

ii) $\mathcal{L}_\infty(P) \geq k-1$.

Preuve.— Il suffit de montrer la proposition pour $k \geq 1$. Nous montrons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME 4.— *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq \mathcal{L}_\infty(P) + 1$. Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à k et de hauteur inférieure ou égale à $K_\infty/(4kD_k)$. Alors $\mu(P+Q) = \mu(P)$.*

Pour montrer le lemme nous utilisons la propriété suivante du nombre de Milnor [M]. On a $\mathcal{L}_\infty(P) \geq 0$ donc P est modéré et il n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Soit R un nombre réel positif tel que tous les points singuliers de P soient contenus dans $B_R = \{(x,y) \in C^2 \mid \|(x,y)\| < R\}$. Définissons

$$\begin{aligned} \Phi_P(R) : \mathbb{S}^3_R &\longrightarrow \mathbb{S}^3_1 \\ (x,y) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} P(x,y)}{\|\operatorname{grad} P(x,y)\|} \,. \end{aligned}$$

Alors,

$$\mu(P) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x\,,\,y]}{\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\,,\,\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)}$$

est égal au degré de l'application $\Phi_P(R)$.

Nous commençons par montrer qu'il existe R_0 tel que

i) tous les points singuliers de P et $P+Q$ sont contenus dans B_{R_0} ;

ii) sur $\partial B_{R_0} = \mathbb{S}^3_{R_0}$, $\|\operatorname{grad} P + \tau Q\| \neq 0$ pour tout $\tau \in [0\,,1]$.

Il existe $R_0 \gg 1$ tel que

$$\|\operatorname{grad} P\| \geq K_\infty \|(x,y)\|^{\mathcal{L}_\infty(P)}$$

pour $\|(x,y)\| \geq R_0$. En particulier,

$$\|\operatorname{grad} P\| \geq K_\infty R_0^{\mathcal{L}_\infty(P)}$$

pour $(x,y) \in \mathbb{S}^3_{R_0}$. On a

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} P(x,y) + \tau Q(x,y)\| &\geq \|\operatorname{grad} P(x,y)\| - |\tau|\,\|\operatorname{grad} Q(x,y)\| \\ &\geq \|\operatorname{grad} P(x,y)\| - \|\operatorname{grad} Q(x,y)\| \end{aligned}$$

pour $\tau \in [0\,,\,1]$. D'autre part,

$$\|\operatorname{grad} Q(x,y)\| = \left\|\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,,\,\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{\alpha+\beta\leq k} a_{\alpha,\beta}\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}\,,\,\sum_{\alpha+\beta\leq k} a_{\alpha,\beta}\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}\right)\right\|$$

$$= \left(\left|\sum_{\alpha+\beta\leq k} a_{\alpha,\beta}\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}\right|^2 + \left|\sum_{\alpha+\beta\leq k} a_{\alpha,\beta}\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}\right|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\left(\sum_{\alpha+\beta\leq k} |a_{\alpha,\beta}|\,|\alpha|\,\|(x,y)\|^{k-1}\right)^2 + \left(\sum_{\alpha+\beta\leq k} |a_{\alpha,\beta}|\,|\beta|\,\|(x,y)\|^{k-1}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \|(x,y)\|^{k-1}(2kD_k h_Q) \leq \frac{K_\infty}{2}\,\|(x,y)\|^{k-1}\,.$$

Alors, pour $(x,y) \in \mathbb{S}^3_{R_0}$,

$$\|\operatorname{grad} P(x,y) + \tau Q(x,y)\| \geq K_\infty R_0^{\mathcal{L}_\infty(P)} - \frac{K_\infty}{2}\,R_0^{k-1} \geq \frac{K_\infty}{2} R_0^{\mathcal{L}_\infty(P)}\,.$$

Donc R_0 satisfait les conditions i) et ii).

Alors, on peut définir pour $\tau \in [0\,,\,1]$ l'application $\Phi_{P+\tau Q}(R_0)$ où

$$\begin{aligned}\Phi_{P+\tau Q}(R_0) : \mathbb{S}^3_{R_0} &\longrightarrow \mathbb{S}^3_1\\ (x,y) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} P(x,y) + \tau Q(x,y)}{\|\operatorname{grad} P(x,y) + \tau Q(x,y)\|}\,.\end{aligned}$$

Les deux applications $\Phi_{P+Q}(R_0)$ et $\Phi_P(R_0)$ sont homotopiques, elles ont donc même degré, et donc

$$\mu(P) = \mu(P+Q)\,.$$

Le lemme 4 montre que ii) implique i).

Montrons maintenant que i) implique ii) par l'absurde. Nous supposons que P est k-modéré et que $\mathcal{L}_\infty(P) < k-1$. Soit $Q(x,y) = x^k$, $k > 0$. Nous considérons la famille des polynômes

$$P_\varepsilon(x,y) = P(x,y) + \varepsilon x^k\,.$$

Nous montrons tout d'abord que si $k-1 > \mathcal{L}_\infty(P)$, il existe des points singuliers de $P_\varepsilon(x,y)$, $\big(x(\varepsilon), y(\varepsilon)\big)$ tels que $\big\|\big(x(\varepsilon), y(\varepsilon)\big)\big\| \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$. Nous utilisons ensuite cette propriété, pour montrer que l'on peut trouver $\varepsilon < K_\infty/(4kD_k)$ tel que $\mu(P+\varepsilon x^k) > \mu(P)$ ce qui contredit le fait que P est k-modéré.

Soient $\big\{(X_i, a_i, Y)\,,\ i = 1, \dots, r\big\}$, l'ensemble des paramétrisations des branches de la courbe $P'_x(x,y) = 0$ et $\big\{(X'_j, b_j, Y)\,,\ j = 1, \dots, s\big\}$, l'ensemble des paramétrisations des branches de la courbe $P'_y(x,y) = 0$. Rappellons comment on peut obtenir ces paramétrisations. On note $P_h(x,y,z)$ le polynôme homogène associé à $P(x,y)$. Supposons que $x = A_1(v)$, $z = A_2(v)$ soit un développement de Puiseux de $P'_{h,x}(x,1,z)$ au voisinage d'un point singulier. Alors une paramétrisation de $P'_x(x,y)$ est donnée par $x = a_1(u)$, $y = a_2(u)$ où

$$a_1(u) = \frac{A_1(1/u)}{A_2(1/u)}\,, \quad a_2(u) = \frac{1}{A_2(1/u)}\,.$$

On fait un changement de variables linéaire, de telle sorte que les points à l'infini de f soient de la forme $(\alpha_q, \beta_q, 1)$ avec $\alpha_q \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$. Dans ce cas

$$\deg\big(a_1(u)\big) = \deg\big(a_2(u)\big) = \deg\big(a(u)\big) > 0\,.$$

D'après [CK, *Main Theorem*]

$$\mathcal{L}_\infty(P) = \min_{i,j}\left(\frac{\deg(P'_y \circ a_i)}{\deg(a_i)}\,, \frac{\deg(P'_x \circ b_j)}{\deg(b_j)}\right)\,.$$

Supposons que

$$\mathcal{L}_\infty(P) = \frac{\deg(P'_x \circ b_j)}{\deg(b_j)}\,.$$

Alors

$$P'_x\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) = c_1\, u^{\mathcal{L}_\infty(P)\deg(b_j)} + \cdots$$

$$P'_y\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) = 0$$

$$P'_{\varepsilon,x}\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) = P'_x\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) + k\varepsilon b_{1,j}(u)^{k-1}$$

et

$$P'_{\varepsilon,y}\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) = P'_y\big(b_{1,j}(u)\,, b_{2,j}(u)\big) = 0\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&P'_{\varepsilon,x}\big(b_{1,j}(u)\,,\,b_{2,j}(u)\big) = \\
&\quad = b_1 k\varepsilon u^{(k-1)\deg(b_{1,j})} + \cdots + c_1\, u^{\mathcal{L}_\infty(P)\deg(b_j)} + \cdots \\
&\quad = u^{\mathcal{L}_\infty(P)\deg(b_j)}\big(b_1 k\varepsilon u^{(k-1-\mathcal{L}_\infty(P))\deg(b_j)} + \cdots + c_1 + \cdots\big)\,.
\end{aligned}$$

Soit u un zéro de

$$b_1 k\varepsilon u^{(k-1-\mathcal{L}_\infty(P))\deg(b_j)} + \cdots + c_1 + \cdots$$

Alors $\big(b_{1,j}(u)\,,\,b_{2,j}(u)\big)$ est un point singulier de P_ε et comme

$$u = \left(-\frac{c_1}{b_1 k\varepsilon}\right)^{\frac{1}{(k-1-\mathcal{L}_\infty(P))\deg(b_j)}} + \cdots$$

$\big\|\big(x(\varepsilon), y(\varepsilon)\big)\big\| \to \infty$ quand $\varepsilon \to \infty$ où $\big(x(\varepsilon), y(\varepsilon)\big) = \big(b_{1,j}(u), b_{2,j}(u)\big)$. Nous utilisons maintenant ce résultat pour montrer que $\mu(P+\varepsilon Q) > \mu(P)$, pour ε assez petit.

Soit R_0 un nombre réel assez grand de telle sorte que tous les points singuliers de $P(x,y)$ soient contenus dans l'intérieur de la boule B_{R_0}. Alors $\mu(P) = \deg \Phi_P(R_0)$. Si

$$\varepsilon \le \frac{\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \big\|\operatorname{grad} P(x,y)\big\|}{2kR_0^{k-1}}\,,$$

alors $\big\|\operatorname{grad}(P+\tau\varepsilon x^k)\big\| \neq 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{S}^3_{R_0}$. En effet

$$\begin{aligned}
\big\|\operatorname{grad}(P+\tau\varepsilon x^k)\big\| &\ge \big\|\operatorname{grad}(P)\big\| - k\varepsilon\big\|x^{k-1}\big\| \\
&\ge \inf_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \big\|\operatorname{grad} P(x,y)\big\| - k\varepsilon R_0^{k-1} \\
&\ge \frac{\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \big\|\operatorname{grad} P(x,y)\big\|}{2} > 0\,.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que si

$$\varepsilon \le \frac{\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \big\|\operatorname{grad} P(x,y)\big\|}{2kR_0^{k-1}}\,,$$

on peut considérer pour tout $\tau \in [0\,,1]$:

$$\begin{aligned}\Phi_{P+\tau\varepsilon x^k}(R_0) : \mathbb{S}^3_{R_0} &\longrightarrow \mathbb{S}^3_1\\ (x,y) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} P(x,y) + \tau\varepsilon x^k}{\|\operatorname{grad} P(x,y) + \tau\varepsilon x^k\|}\,.\end{aligned}$$

Les applications $\Phi_P(R_0)$ et $\Phi_{P+\varepsilon x^k}(R_0)$ sont homotopiques et donc

$$\mu(P) = \deg \Phi_P(R_0) = \deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R_0)\,.$$

Soit ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait $\|(x(\varepsilon)\,,\,y(\varepsilon))\| \geq R_0$.

On considère maintenant

$$\varepsilon < \frac{K_\infty}{4kD_k}\,,\quad \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon \leq \frac{\inf_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \|\operatorname{grad} P(x,y)\|}{2kR_0^{k-1}}\,.$$

Puisque $\varepsilon \leq \left(\inf_{(x,y)\in\mathbb{S}^3_{R_0}} \|\operatorname{grad} P(x,y)\|\right)/\left(2kR_0^{k-1}\right)$,

$$\mu(P) = \deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R_0)\,.$$

Soit B_R une boule telle que tous les points singuliers de $P(x,y)+\varepsilon x^k$ soient dans B_R. Puisque $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a $B_{R_0} \subset B_R$ et dans $B_R \setminus B_{R_0}$ il y a des points singuliers de $P + \varepsilon x^k$. Soit

$$\begin{aligned}\Phi_{P+\varepsilon x^k}(R) : \mathbb{S}^3_R &\longleftrightarrow \mathbb{S}^3_1\\ (x,y) &\longmapsto \frac{\operatorname{grad} P(x,y) + \varepsilon x^k}{\|\operatorname{grad} P(x,y) + \varepsilon x^k\|}\end{aligned}$$

alors $\deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R) > \deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R_0)$. Or

$$\mu(P+\varepsilon x^k) = \deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R) > \deg \Phi_{P+\varepsilon x^k}(R_0) = \mu(P)\,.$$

Le théorème 3 est donc démontré. □

Le théorème de Kuiper–Kuo–Bochnak–Lojasiewicz [K] [Ku] [BL] dit que l'ordre de détermination locale d'un germe de fonction analytique au voisinage d'un point singulier est exactement $\mathcal{L}_0(f) + 1$ où $\mathcal{L}_0(f)$ est le nombre de Lojasiewicz local du germe f. Nous avons un théorème analogue à l'infini.

DÉFINITION .— *Nous disons que deux polynômes bons, P et Q sont équivalents à l'infini si les entrelacs à l'infini de leur fibre générique sont isotopiques. Nous notons $P \sim_\infty Q$.*

THÉORÈME 5.— *Soit $\mathcal{L}_\infty(P) \geq 0$. Alors*

i) pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $\mathcal{L}_\infty(P)+1$ et de hauteur inférieure ou égale à $K_\infty/\big(4[\mathcal{L}_\infty(P)+1]D_{[\mathcal{L}_\infty(P)+1]}\big)$, alors

$$P \sim_\infty P+Q\,;$$

ii) si pour tout polynôme Q de degré $s \leq r$ et de hauteur $h_Q \leq K_\infty/(4sD_s)$ on a $P \sim_\infty P+Q$, alors

$$r \leq \mathcal{L}_\infty(P)+1\,.$$

Démonstration du i).— On suppose $\mathcal{L}_\infty(P) \geq 0$. Donc P est modéré. Alors pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $\mathcal{L}_\infty(P)+1$ et de hauteur inférieure ou égale à $K_\infty/\big(4[\mathcal{L}_\infty(P)+1]D_{[\mathcal{L}_\infty(P)+1]}\big)$, $P+Q$ est modéré. En effet on considère $P+Q+ax+by$ avec

$$|a| \leq \frac{K_\infty}{4\big[\mathcal{L}_\infty(P)+1\big]D_{[\mathcal{L}_\infty(P)+1]}} \quad \text{et} \quad |b| \leq \frac{K_\infty}{4\big[\mathcal{L}_\infty(P)+1\big]D_{[\mathcal{L}_\infty(P)+1]}}\,.$$

Alors d'après le lemme 4, on a

$$\mu(P) = \mu(P+Q)$$

et

$$\mu(P) = \mu(P+Q+ax+by)\,.$$

Donc

$$\mu(P+Q) = \mu(P+Q+ax+by)\,.$$

Donc d'après [B], $P+Q$ est modéré.

De la même façon, pour tout $\tau \in [0\,,1]$, $P+\tau Q$ est modéré et $\mu(P+\tau Q) = \mu(P)$ est constant. Alors d'après [HZ], il existe $R_0 \gg 1$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi_\tau : \mathbb{S}^3_R \setminus (P+\tau Q)^{-1}(0) &\longrightarrow \mathbb{S}^3_1 \\ (x,y) &\longmapsto \frac{P(x,y)+\tau Q}{\|P(x,y)+\tau Q\|}\end{aligned}$$

soient des fibrations isomorphes.

Il en résulte que les entrelacs à l'infini de $(P+\tau Q)^{-1}(t)$ pour t générique, sont isotopiques pour tout $\tau \in [0, 1]$. Donc les entrelacs à l'infini de P et $P+Q$ sont isotopiques, et P et $P+Q$ sont équivalents.

Démonstration du ii).— Supposons que $P \sim_\infty P+Q$ pour tout Q de degré $s \le r$ et $h_Q \le K_\infty/(4sD_s)$. Alors les entrelacs à l'infini de la fibre générique de P et $P+Q$ sont isotopiques. Donc les fibres génériques de P et $P+Q$ ont la même caractéristique d'Euler. De plus P et $P+Q$ sont bons. Donc d'après [S], $\mu(P) = \mu(P+Q)$. Donc P est r-modéré, et d'après le théorème 2, $r \le \mathcal{L}_\infty(P)+1$.

Remerciements

Nous remercions le referee de cet article pour ses remarques concernant la première version de cet article.

Cet article a été commencé alors que le deuxième auteur était professeur invité à l'Université Bordeaux I. Il remercie cette institution pour son hospitalité.

Références

[BL] BOCHNAK (J.) et LOJASIEWICZ (S.) .— *A converse of the Kuiper–Kuo theorem*, Proc. of Liverpool Singularities Symposium, Springer L.N.M., Vol. 1, **192** (1971), pp. 246-254.

[B] BROUGHTON (S. A.) .— *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math. **92** (1988), pp. 217-241.

[CK] CHADZYNSKI (J.) et KRASINSKI (T.) .— *Exponent of growth of polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}$*, Singularities (1988), Banach Center Publications, Vol. 20, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw.

[H] HA HUY VUI .— *A version at infinity of the Kuiper–Kuo theorem.* Preprint.

[H2] HA HUY VUI .— *On the irregular at infinity algebraic plane curves*, Preprint Institute of Mathematics National Center for Scientific Rechearch of Vietnam.

[H3] HA HUY VUI .— *Sur l'irrégularité du diagramme splice pour l'entrelacs à l'infini des courbes planes*, Preprint.

[HZ] HA HUY VUI et ZAHARIA (A.) .— *Families of polynomials with total Milnor number constant*, Preprint, Univ. Nice.

[K] KUIPER (N. H.) .— *C^1-equivalence of functions near isolated critical points.* Proc. Sym. in Infinite Dimensional Topology (1967), Ann. Math. Stud. **69**, Princeton (1972).

[Ku] KUO (T. C.) .— *On C^0-sufficiency of jets of potential functions*, Topology **8** (1969), pp. 167-171.

[M] MILNOR (J.) .— *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., Princeton, **61** (1968).

[N] NÉMETHI (A.) .— *Lefschetz theory for complex affine varieties*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **33** (1988), pp. 233-250.

[NL] NEUMANN (W. D.) et LE VAN THANH .— *On irregular links at infinity of algebraic plane curves*, Math. Annalen **295** (1993), pp. 239-244.

[NZ1] NÉMETHI (A.) et ZAHARIA (A.) .— *Milnor fibration at infinity*, Indag. Math. **3** (1992), pp. 323-335.

[NZ2] NÉMETHI (A.) et ZAHARIA (A.) .— *On the Bifurcation Set of a Polynomial Function and Newton Boundary*, R.I.M.S. **26** (1990), pp. 681-689.

[S] SUZUKI (M.) .— *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes et automorphismes algébriques de l'espace* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Soc. Japan **26**, pp. 241-257.