ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-LUC STEUX

Problème de Dirichlet pour un opérateur elliptique dans un domaine à point cuspide

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 1 (1997), p. 143-175

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_1_143_0>

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 1, 1997

Problème de Dirichlet pour un opérateur elliptique dans un domaine à point cuspide(*)

JEAN-LUC STEUX(1)

RÉSUMÉ. — Nous étudions la structure des solutions u du problème de Dirichlet associé à un opérateur proprement elliptique sur un domaine U dont le bord contient un point cuspide. Lorsque le second membre est C^∞ jusqu'au bord de U, la structure de u dépend des propriétés des équations des deux branches du bord de U. Nous montrerons en particulier que u est C^∞ jusqu'au bord si les équations sont C^∞.

ABSTRACT. — We study the structure of the solutions u of the Dirichlet problem associated to a property elliptic operator on a domain U, the boundary of which countains a cusp points. When the second member is C^∞ up to the boundary of U, the structure of u depends on the properties of the equations of the two branches of the boundary of U. We will show in particular that U is C^∞ up to the boundary if the equations are C^∞.

0. Introduction et hypothèses

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂U contient l'origine 0. On suppose que ∂U est C^∞ sauf en 0. Soit L un opérateur proprement elliptique d'ordre $2m$ à coefficients C^∞ sur $\overline{U}$. Il est bien connu (cf. [1]) que le problème de Dirichlet associé à L

$$Lu = f\,, \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^m(U)\,, \tag{0.1}$$

(*) Reçu le 3 janvier 1995

(1) Université de Nantes, Département de Mathématiques et d'Informatique, 2 chemin de la Houssinière, F-44072 Nantes Cedex 03 (France)

est "régulier" sur tout domaine V tel que $0 \notin \overline{V}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } f \in H^{k-m}(U) \text{ alors } u \in H^{k+m}(U \cap V)\,. \tag{0.2}$$

Par contre, si $0 \in \overline{V}$, le résultat ci-dessus ne subsiste pas en général.

Ce qui se passe au voisinage de 0 dépend de la géométrie de U. Supposons que l'on puisse choisir des coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$ de façon que

$$U \cap B(0,\varepsilon) = \big\{(x,y) \in B(0,\varepsilon) \mid \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\big\} \tag{0.3}$$

(où $B(0,\varepsilon)$ est la boule de centre 0 et de rayon ε),

$$\begin{cases} \varphi_1\,,\ \varphi_2 \in C^1\big([\,0\,,\,\varepsilon\,]\big) \cap C^\infty\big(]\,0\,,\,\varepsilon\,]\big) \\ \varphi_1 < \varphi_2 \quad \text{sur }]\,0\,,\,\varepsilon\,] \\ \varphi_1(0)\,,\ \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_1'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{0.4}$$

Le cas où φ_1 et φ_2 sont des équations de droites a été abondamment traité dans la littérature : U coïncide alors localement avec un secteur plan (cf. [4] et les références qu'il y a dans [4]).

Si, plus généralement,

$$\begin{cases} \varphi_1\,,\ \varphi_2 \in C^\infty\big([\,0\,,\,\varepsilon\,]\big)\,, \\ \varphi_2'(0) \neq 0 \end{cases}$$

alors φ_1 et φ_2 ne sont pas tangents en 0 et la régularité des solutions de $(0,1)$ est la même que pour le domaine tangent dont les équations des côtés sont $\Psi_1(x) = 0$, $\Psi_2(x) = \varphi_2'(0)x$ (cf. [2], [3]). Dans ce cas, l'angle ω tel que $\operatorname{tg}\omega = \varphi_2'(0)$ intervient de façon déterminante. Par exemple si $L = \Delta$, on a pour la solution u de $(0,1)$, si $k < \pi/\omega$:

$$\text{si } f \in H^{k-1}(U) \text{ alors } u \in H^{k+1}(U)\,.$$

Nous remarquons que pour cet exemple, plus l'angle ω est petit, plus le problème est régulier.

Notre sujet d'étude dans cet article est le cas où

$$\varphi_2'(0) = 0\,, \tag{0.5}$$

c'est-à-dire le cas d'un point cuspide saillant, ou pointe effilée. Nous supposons de plus que $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ est continu sur $[\,0\,,\,\varepsilon\,]$ et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, \quad \varphi^k \varphi_i^{(k+1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to 0 \tag{0.6}$$

où $\varphi_i^{(j)}$ désigne la $j^{\text{ième}}$ dérivée de φ_i ; pour $k = 0$, (0.6) redonne $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 0$.

DÉFINITION 0.1.— *Nous regroupons l'ensemble des hypothèses (0.4), (0.5), (0.6) sous le nom d'hypothèse (H_0) De plus, sous l'hypothèse (H_0), nous poserons toujours $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.*

Les résultats que nous avons obtenus sont à rapprocher de ceux donnés par Ibuki [6], Khelif [7], Mazya–Plamenevskii [8], Grisvard [5].

- Ibuki [6] s'est intéressé à des opérateurs d'ordre 2 mais avec des ouverts de la forme

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < d\,,\ 0 < x_2 < x_1^{\alpha}\,,\ \alpha > 1\}\,.$$

  Il a donné des résultats avec un second membre dans L^2. Grisvard [5] a donné des résultats dans le même cadre pour le Laplacien et le problème de Stokes. Khelif [7] a donné des résultats concernant le Laplacien avec second membre dans L^2 mais pour des ouverts plus généraux que ceux étudiés par Ibuki. Ces ouverts sont très proches de ceux que nous avons étudiés et vérifient l'hypothèse (H_0).

- Les énoncés de Mazya–Plamenevskii [8] concernent en particulier des seconds membres dans des espaces L^p à poids et pour un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ de révolution, de classe C^2 sauf en 0 et tel que

$$U \cap B(0, \varepsilon) = \{x \mid |x'| < \varphi(x_n)\,,\ 0 < x < \varepsilon\}$$

  pour ε assez petit, avec $\varphi \in C^2([0\,,1[)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x_n)$, $\varphi(x_n)$, $\varphi''(x_n)$ tendant vers 0 quand x_n tend vers 0.

- Dans la note [9] nous avons donné des résultats concernant le Laplacien, des ouverts vérifiant (H_0) et des seconds membres C^∞. Ici les opérateurs considérés sont d'ordre $2m$, $m \geq 1$ et l'on obtient, sous certaines conditions (sect. 1), une régularité C^∞.

Notations

- Si $q \in\ ]1, +\infty[$, $C_q([0\,,\varepsilon])$ désigne l'espace des fonctions Ψ de $C^\infty(]0\,,\varepsilon[)$ telles qu'il existe une suite croissante $(q_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ et des réels a_n vérifiant

$$q_0 = q\,,\ a_0 \neq 0\,,\quad \Psi - \sum_{0\leq n\leq N} a_n x^{q_n} = O(x^{q_{N+1}})$$

$$\Psi^{(j)} - \sum_{0\leq n\leq N} a_n q_n(q_n-1)\cdots(q_n-j+1)x^{q_n-j} = \mathrm{O}(x^{q_{N+1}-j}),$$

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } j \leq q_{N+1}\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,.$$

• Si $q \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $C_q^\infty([0\,,\varepsilon]) = C^\infty([0\,,\varepsilon]) \cap C_q([0\,,\varepsilon])$

Voici quatre exemples fondamentaux de domaines à points cuspides vérifiant (H_0).

Exemple 1.— $\varphi_1 \in C_{p_1}([0\,,\varepsilon])$, $\varphi_2 \in C_{p_2}([0\,,\varepsilon])$ avec $\varphi > 0$ et non plat en 0.

Exemple 2.— $\varphi_1 \in C_{p_1}^\infty([0\,,\varepsilon])$, $\varphi_2 \in C_{p_2}^\infty([0\,,\varepsilon])$ avec $\varphi > 0$, non plat en 0 et $2 \leq p_2 \leq p_1 \leq +\infty$ (φ_1 et φ_2 sont par exemple des polynômes distincts de valuation p_1 et p_2).

Exemple 3.— $\varphi_1(x) = a_1x^{p_1}\sin x^{\beta_1} + b_1x^{p_1}$, $\varphi_2(x) = a_2x^{p_2}\sin x^{\beta_2} + b_2x^{p_2}$ avec $p_1 > p_2 > 1$, β_1, $\beta_2 \leq 0$, $\beta = \inf(\beta_1,\beta_2)$ est tel que $\beta+p_2-1 > 0$, a_2 et b_2 vérifiant $|a_2| < |b_2|$.

Cet exemple ne vérifie pas les hypothèses nécessaires dans [4] et [7].

Exemple 4.— $\varphi_1(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-(1/x^{\alpha_1})}$, $\varphi_2(x) = C_2\,\mathrm{e}^{-(1/x^{\alpha_2})}$ avec α_1, $\alpha_2 > 0$, $C_1 \neq C_2$ si $\alpha_1 = \alpha_2$.

Cet exemple ne vérifie pas les hypothèses d'Ibuki [6].

En fait, quoique vérifiant tous (H_0), ces exemples n'ont pas les mêmes propriétés. Voici une suite d'hypothèses dont nous verrons à la section 2 qu'elles sont de plus en plus fortes.

• (H_1) désignera l'hypothèse suivante :

— l'hypothèse (H_0) est vérifiée,

— $\exists\, p_0 > 1$, $\exists\, C_0 > 0$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tels que $\forall\, x \in [0\,,\varepsilon_0]$, $\varphi(x) \geq C_0x^{p_0}$.

Sous l'hypothèse (H_1), on se fixe $p \leq p_0$, p choisi le plus petit possible tel que

$$\varphi(x) \geq C_0x^p\,.$$

Evidemment on a $p > 1$. Comme $|\varphi_1(x)| \leq Cx$ sous l'hypothèse (H_1), on a

$$\exists\, p_0' \in [1\,,\, p] \text{ tel que } \varphi(x) \geq C|\varphi_1(x)|^{p_0'}\,.$$

Toujours sous l'hypothèse (H_1), on se fixe $p' \in [1\,,\, p_0']$ choisi "le plus petit possible" pour lequel

$$\exists\, C' > 0 \text{ tel que } \varphi(x) \geq C'|\varphi_1(x)|^{p'}\,, \quad \forall\, x \in [0\,,\, \varepsilon]\,.$$

Seul l'exemple 4 ne vérifie pas l'hypothèse (H_1).

• Pour définir l'hypothèse (H_2) nous aurons besoin des notations suivantes : on pose $E_0 = \mathbb{C}$ et pour J dans $\mathbb{N}^*$ on note E_J l'espace des combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$\prod_{1 \leq k \leq K} \varphi^{n_k} \varphi_{i_k}^{(n_k+1)}$$

avec

$$i_k \in \{1, 2\}\,,\; n_k \geq 0\,, \qquad \sum_{1 \leq k \leq K} (n_k + 1) = J\,.$$

(H_2) désignera les hypothèses suivantes :

— l'hypothèse (H_1) est vérifiée,

— il existe une suite $\big(\delta(J)\big)_{J \geq 1}$ positive, décroissante, telle que

$$\sum_{J \geq 1} \delta(J) = +\infty$$

et satisfaisant à

$$\forall\, e \in E_J\,, \quad \varphi^{-\delta(1) - \cdots - \delta(J)} e \quad \text{est continue en } 0\,;$$

on peut toujours supposer que $\delta(J) \leq (p-1)/p$; on pose

$$A(J) = \sum_{1 \leq K \leq J} \delta(K)\,.$$

• (H_3) désignera l'hypothèse : (φ_1, φ_2) est du type de l'exemple 1.

• (H_4) désignera l'hypothèse : (φ_1, φ_2) est du type de l'exemple 2.

Voici successivement les hypothèses sur l'opérateur L et quelques espaces fonctionnels utiles.

Hypothèse $(\mathcal{L})$

- $L(x, y\,;\, \partial_x, \partial_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \partial^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\infty(\overline{U})$;
- L est proprement elliptique;
- soit $L_0(\partial_x, \partial_y)$ la partie principale de L gelée en $(0,0)$; θ désignera par la suite la variable homogénéisée $(y - \varphi_1)\varphi^{-1}$; on est amené à utiliser

$$L_0\left(\frac{\lambda}{i}\,,\, \mathrm{d}_\theta\right) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(0,0)\left(\frac{\lambda}{i}\right)^{\alpha_1} \mathrm{d}_\theta^{\alpha_2}$$

et on suppose que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad L_0\left(\frac{\lambda}{i}\,,\, \mathrm{d}_\theta\right) \text{ est injectif sur } \overset{\circ}{H}{}^m(\,]\,0\,,\,1\,[\,)\,.$$

On peut montrer que si $\lambda = 0$, $L_0(0, \mathrm{d}_\theta)$ est toujours injectif sur $\overset{\circ}{H}{}^m(\,]\,0\,,\,1\,[\,)$. C'est le cas aussi pour λ quelconque dans $\mathbb{R}$ et $m = 1$ lorsque les deux premières conditions sont vérifiées. Ce n'est pas toujours le cas par contre si $m = 2$. Ceci sera développé dans le paragraphe 2.2.

DÉFINITION 0.2.— *$C^\infty(\overline{U}) = \{u \in C^\infty(U)$ telles que $\forall\, \alpha\ \partial^\alpha u$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{U}\}$.*

Si $q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_q^\infty(\overline{U}) = \{u \in C^\infty(U)$ telles que $\partial^\alpha u(0,0) = 0$, $\forall\, \alpha$ tel que $|\alpha| < q\}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $V^n(U) = \{u \in \mathcal{D}'(U)$ telles que $\varphi^{|\alpha|-n}\partial^\alpha u \in L^2(U)$, $\forall\, \alpha$ tel que $|\alpha| \leq n\}$.

$W^{n,\infty}(U)$ est l'espace des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n sont bornées sur U.

1. Résultats

1.1 Cas du second membre plat

THÉORÈME 1.1.— *Soient (φ_1, φ_2) vérifiant l'hypothèse (H_0), L vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{L})$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in V^n(U)$, alors u solution du problème (0.1) appartient à $V^{n+2m}(U)$.*

La démontration de ce résultat est une réécriture plus simple (car on se trouve dans un cadre plus simple) des résultats de Mazya–Plamenevskii [8]. Le théorème 1.1 donne en particulier que pour $L = \Delta$, si $f \in L^2(U)$ alors $u \in V^2(U)$, donc $u \in H^2(U)$. (On retrouve pour les opérateurs considérés dans ces articles les propriétés données dans [4], [5], [6] et [7].)

COROLLAIRE 1.2.— *Sous les mêmes hypothèses sur (φ_1, φ_2) et L que dans le théorème 1.1, les vecteurs propres de l'opérateur L sont dans $C^\infty_\infty(\overline{U})$.*

Ce n'est pas le cas en général pour les polygones curvilignes dont les tangentes aux points singuliers forment un angle ω différent de 0 (cf. [3] où nous avons cherché à caractériser de tels polygones curvilignes G pour lesquels les vecteurs propres du problème de Dirichlet pour le laplacien sur G sont C^∞ jusqu'au bord de G).

THÉORÈME 1.3.— *Si (φ_1, φ_2) vérifie l'hypothèse (H_1), si L vérifie l'hypothèse $(\mathcal{L})$ et si $f \in C^\infty_\infty(\overline{U})$, alors $u \in C^\infty_\infty(\overline{U})$.*

1.2 Cas du second membre C^∞

L'un des résultats les plus marquants est que, lorsque les côtés ont des équations C^∞, le problème de Dirichlet a la régularité C^∞.

THÉORÈME 1.4.— *Si (φ_1, φ_2) vérifie l'hypothèse (H_4) et si L vérifie l'hypothèse $(\mathcal{L})$, alors si $f \in C^\infty(\overline{U})$, u solution de (0.1) est $C^\infty(\overline{U})$.*

Lorsque l'hypothèse (H_4) n'est pas vérifiée, il apparaît des singularités.

LEMME 1.5.— *Soit (φ_1, φ_2) vérifiant (H_2), L l'hypothèse $(\mathcal{L})$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\sigma_{\alpha,n}$ tel que*

$$L(\chi\, \sigma_{\alpha,n}) - x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \in V^n(U)\,, \quad \chi\, \sigma_{\alpha,n} \in \overset{\circ}{H}{}^m(U)$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ est à support dans la boule $B(0,\varepsilon)$, vaut 1 au voisinage de 0,

$$\sigma_{\alpha,n} \in \mathcal{S}^{\alpha_1/p+\alpha_2/p'+2m}$$

où pour s réel l'espace $\mathcal{S}^s$ est introduit dans la définition 4.1. Par exemple $\sigma_{0,n}$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $x^i y^j \varphi_1^k (y-\varphi_1)^a$ avec i, j, k, $a \in \mathbb{N}$, $i/p + j + k/p' + a \geq 2m$.

THÉORÈME 1.6.— *Sous l'hypothèse (H_2) et $(\mathcal{L})$ pour L, si $f \in C^\infty(\overline{U})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose :*

$$S_n = \chi \sum_{|\alpha| \leq [pn]-1} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(0,0)\, \sigma_{\alpha,n}\,. \tag{1.1}$$

Alors u solution dans $\overset{\circ}{H}{}^m(U)$ du problème (0.1) vérifie

$$u - S_n \in V^{n+2m}(U)\,.$$

Autrement dit les S_n constituent un développement asymptotique de u en 0.

THÉORÈME 1.7.— *Sous les hypothèses (H_2) et $(\mathcal{L})$, si f appartient à $C_q^\infty(\overline{U})$, $q \geq 0$, alors u solution du problème (0.1) appartient à $C^{2m+(q/p)}(\overline{U})$ si $2m + (q/p)$ n'est pas entier et u appartient à $W^{2m+(q/p),\infty}(U)$ si $2m + (q/p)$ est entier.*

Pour mieux décrire la régularité sous l'hypothèse (H_3) nous introduisons la définition suivante.

DÉFINITION 1.8.— *Si $\sigma \in\,]0,1[$, on appelle $C^{\sigma,0}(\overline{U})$ l'espace des fonctions u telles que*

$$\sup_{\substack{x_1 \neq x_2 \\ (x_1,y_1),(x_2,y_1) \in \overline{U}}} \left|u(x_1,y_1) - u(x_2,y_1)\right| \left|x_1 - x_2\right|^{-\sigma}$$

est borné indépendamment de y_1. De même $C^{0,\sigma}(\overline{U})$ est l'espace des fonctions u telles que

$$\sup_{y_1 \neq y_2} \left|u(x_1,y_1) - u(x_1,y_2)\right| \left|y_1 - y_2\right|^{-\sigma}$$

est borné indépendamment de x_1.

Si $\sigma = 0$, on note $C^{0,0}(\overline{U})$ l'espace $C^0(\overline{U})$. Si s et s' sont deux réels positifs, on définit $C^{s,s'}$ par :

$$u \in C^{s,s'} \text{ si et seulement si } \partial_x^\alpha \partial_y^\beta u \in C^{\sigma,0}(\overline{U}) \cap C^{0,\tau}(\overline{U})$$

$$\forall\, \alpha\,,\, \beta \in \mathbb{N}\,, \quad \forall\, \sigma\,,\, \tau \in [\,0\,,\,1\,[\text{ tels que } \frac{\alpha+\sigma}{s} + \frac{\beta+\tau}{s'} \leq 1\,.$$

THÉORÈME 1.9.— *Sous l'hypothèse (H_3) et $(\mathcal{L})$ pour L, si f appartient à $C_q^\infty(\overline{U})$, $q \geq 0$, alors u solution du problème (0.1) appartient à $C^{a(q/p)+2m,\,(q/p)+2m}(\overline{U})$ où $a = p/(p-p_2+1)$.*

Ces résultats s'appliquent au laplacien (et en général à tous les opérateurs proprement elliptiques d'ordre deux), au biplacien. Ils peuvent aussi s'appliquer au problème de Stokes sous certaines conditions pour les données (ceci sera développé à la fin du paragraphe 2.2).

1.3 Grandes lignes de la démonstration

Les énoncés des théorèmes 1.3 et corollaires 1.2 découlent du théorème 1.1. Pour obtenir le théorème 1.1 on se ramène à un problème de Dirichlet sur la bande $]\,0\,,\,1\,[\,\times\,\mathbb{R}$ en faisant le changement de variable

$$(x,y) \longrightarrow (\theta,t) \tag{1.2}$$

où

$$\theta = \frac{y-\varphi_1}{\varphi}\,, \quad t = -\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\varphi(\sigma)}$$

où φ est prolongé de façon que $1/\varphi \in L^1(\,]\,\varepsilon\,,\,+\infty\,[\,)$. Cette méthode est reprise de [8].

Lorsque $f \in C^\infty(\overline{U})$, on retranche une partie polynomiale f_n telle que $f - f_n \in V^n(U)$. Ensuite on construit une fonction $u_n(f_n)$ de $\overset{\circ}{H}{}^m(U)$ telle que :

$$Lu_n = f_n + r_n$$

avec $r_n \in V^n(U)$ (résolution polynomiale approchée). On a alors

$$L(u-u_n) = f - f_n - r_n$$

avec $u - u_n \in \overset{\circ}{H}{}^m(U)$. Les résultats précédents donnent alors que

$$u - u_n \in V^{n+2m}(U)\,.$$

La résolution polynomiale approchée est obtenue à l'aide du changement de variables $\mathcal{C}$ suivant :

$$(x, y) \longrightarrow (X, Y) \tag{1.3}$$

où

$$X = x\,, \quad Y = y - \varphi_1(x)\,.$$

Le plan est le suivant : dans le paragraphe 2.1 on donne certaines propriétés vérifiées par les domaines, dans 2.2 on étudie des exemples d'opérateurs et dans 2.3 on étudie les changements de variables (1.2) et (1.3). Dans la section 3, on démontre les théorèmes et corollaires 1.1 à 1.3. Ensuite dans la section 4, on étudie la résolution polynomiale approchée et on en déduit les énoncés 1.4 à 1.9.

2. Analyse fonctionnelle

2.1 Propriétés vérifiées par les domaines

PROPOSITION 2.1.— *Si (φ_1, φ_2) vérifie l'hypothèse (H_3), alors (φ_1, φ_2) vérifie l'hypothèse (H_2) avec $\delta(N) = (p_2 - 1)/p$. De plus $p' = \sup(1\,, p/p_1)$.*

Démonstration

a) Pour $i = 1, 2$ il existe une suite croissante $\left(q_{n,i}\right)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ et des réels $a_{n,i}$ tels que

$$q_{0,i} = p_i\,,\ a_{0,i} \neq 0\,,$$

$$\varphi_i - \sum_{0\leq n\leq N} a_{n,i} x^{q_{n,i}} = \mathrm{O}(x^{q_{N+1,i}})$$

$$\varphi_i^{(j)} - \sum_{0\leq n\leq N} a_{n,i} q_{n,i}(q_{n,i} - 1)\cdots(q_{n,i} - j + 1) x^{q_{n,i}-j} = \mathrm{O}(x^{q_{N+1,i}-j}) \tag{2.1}$$

pour j tel que $1 \leq j \leq q_{N+1,i}$. Alors si $p_2 < p_1$ en ordonnant $\{q_{n,i}\,,\ i = 1, 2\}$ on obtient une suite croissante $\left(q_{n,3}\right)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$. Posons :

$$a_{n,3} = \begin{cases} a_{n,2} - a_{n,1} & \text{si } q_{n,1} = q_{n,2} = q_{n,3} \\ a_{n,2} & \text{si } q_{n,2} = q_{n,3} \neq q_{n,1} \\ -a_{n,1} & \text{si } q_{n,1} = q_{n,3} \neq q_{n,2}\,. \end{cases}$$

On a $q_{0,3} = p_2$, $a_{0,3} = a_{0,2} \neq 0$ et φ vérifie (2.1) avec $i = 3$. On a alors $p = p_2$.

• Si $p_1 = p_2$ avec $a_{0,1} \neq a_{0,2}$ en ordonnant encore $\{q_{n,i}\,,\ i = 1, 2\}$, on obtient une suite croissante $\big(q_{n,3}\big)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ et des réels $a_{n,3}$ tels que l'on ait :

$$q_{0,3} = p_1\,, \quad a_{0,3} = a_{0,2} - a_{0,1} \neq 0$$

et φ vérifie (2.1) avec $i = 3$. On a alors $p = p_2$.

• Si $p_1 = p_2$ avec $a_{0,1} = a_{0,2}$, on pose

$$p = \inf\big\{q_{n,\,i}\,, i = 1, 2 \mid a_{n,2} - a_{n,1} \neq 0\big\}\ .$$

Alors si on ordonne $\{q_{n,i} > p\,,\ i = 1, 2\}$, on obtient la suite $\big(q_{n,3}\big)_{n\geq 0}$ et les réels $a_{n,3}$ tels que

$$q_{0,3} = p\,, \quad a_{0,3} \neq 0$$

et φ vérifie (2.1).

b) D'après ce qui précède, comme $p_2 \leq p_1$

$$e = \prod_{1\leq k\leq K} \varphi^{n_k}\varphi_{i_k}^{(n_k+1)} \quad \text{avec} \quad \sum_{1\leq k\leq K} (n_k + 1) = J\,,$$

est égal à

$$x^{n_1p+p_2-n_1-1+\cdots+n_kp+p_2-n_k-1}\big(C + \mathrm{O}(x^{\varepsilon})\big)$$

où $\varepsilon \geq 0$. Comme $p \geq p_2$

$$e = x^{(p_2-1)J+\varepsilon'}\big(C + \mathrm{O}(x^{\varepsilon})\big)$$

où $\varepsilon' \geq 0$. Ainsi le produit de $\varphi^{-A(J)}$ par e est continu au voisinage de 0 si $-A(J)p + (p_2 - 1)J \geq 0$. On posera dans ce cas

$$A(J) = \frac{p_2 - 1}{p}\,J\,.$$

Il est immédiat d'après la définition de p' que $p' = \sup(1, p/p_1)$. □

PROPOSITION 2.2.— *Si (φ_1, φ_2) est du type de l'exemple 3, alors (φ_1, φ_2) vérifie l'hypothèse (H_2) avec $p = p_2$, $\delta(J) = (p + \beta - 1)/p$. De plus $p' = 1$.*

PROPOSITION 2.3.— *Si* $\varphi_1 \in C_{p_1}([\,0\,,\,\varepsilon\,])$ *et si*

$$\varphi_2(x) = a_2 x^{p_2} \sin x^{\beta} + b_2 x^{p_2}$$

avec

$$p_1 > p_2 > 1\,, \quad 1 - p_2 < \alpha_2 < 0\,, \quad 0 < a_2 < b_2 \quad ou \quad b_2 < a_2 < 0\,,$$

alors (φ_1, φ_2) *vérifie l'hypothèse* (H_2) *avec* $p = p_2$, $\delta(J) = (p + \beta - 1)/p$. *De plus on a encore* $p' = 1$.

2.2 Exemples d'opérateurs

Remarque 2.4.— Pour tout opérateur tel que $a_{2m,0}(0,0) \neq 0$,

$$L_0(0, \mathrm{d}_\theta) = a_{2m,0}(0,0)\mathrm{d}_\theta^{2m}$$

est injectif sur $\overset{\circ}{H}{}^m(\,]\,0\,,\,1\,[\,)$. Pour le démontrer on regarde les polynômes de la forme

$$\alpha_{2m-1}\theta^{2m-1} + \cdots + \alpha_0$$

qui s'annulent ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ en 0 et en 1. On obtient un système dont le déterminant est non nul, d'où la seule solution 0.

PROPOSITION 2.5.— *Pour tout opérateur proprement elliptique d'ordre 2, pour* λ *dans* $\mathbb{R}$, $L_0(\lambda/i, \mathrm{d}_\theta)$ *est injectif sur* $\overset{\circ}{H}{}^1(\,]\,0\,,\,1\,[\,)$.

Démonstration.— En utilisant la définition de l'ellipticité propre de l'opérateur L, on obtient que pour tout $\lambda \neq 0$ l'équation caractéristique de l'opérateur $L_0(\lambda/i, \mathrm{d}_\theta)$

$$a_{0,2}(0,0)r^2 - a_{1,1}(0,0)i\lambda r - a_{2,0}(0,0)\lambda^2 \tag{2.2}$$

a une racine à partie réelle > 0 et une à partie réelle < 0. Si on désigne par r_1 et r_2 les racines de (2.2), les éléments du noyau de $L_0(\lambda/i, \mathrm{d}_\theta)$ sont de la forme

$$a\, e^{r_1\theta} + b\, e^{r_2\theta}\,. \tag{2.3}$$

D'après ce qui précède, comme $r_1 - r_2$ ne peut être imaginaire pur, on a $e^{r_1} \neq e^{r_2}$; donc la seule fonction de la forme (2.3) qui s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$ est la fonction nulle. □