

GUY VALLET

**Solution forte pour des équations intégral-différentielles non linéaires paraboliques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 6, n<sup>o</sup> 2 (1997), p. 335-356

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1997\\_6\\_6\\_2\\_335\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_2_335_0)

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Solution forte pour des équations intégrales-différentielles non linéaires paraboliques (\*)

GUY VALLET<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Considérant une large classe de problèmes d'évolution paraboliques non linéaires, issus de la mécanique des milieux continus, on prouve l'unicité des solutions faibles pour des données "naturelles" et l'existence de solutions fortes pour des données suffisamment régulières.

**ABSTRACT.** — We consider here a wide range of nonlinear parabolic evolution problems arising from the mechanics of continua. We prove the uniqueness of the weak solutions for "natural" data and the existence of strong solutions for sufficiently regular data.

---

### 1. Introduction

La modélisation mathématique des phénomènes naturels rencontrés, par exemple en mécanique des milieux continus (écoulements polyphasiques, changements de phases dans des systèmes dispersés, transport convectif d'effluents en pédologie, salinisation des nappes phréatiques, etc.) ou encore rencontrés en biologie (dynamique des populations, etc.), fait appel à des équations d'évolution aux dérivées partielles non linéaires de type divergentiel, dites équations de continuité. En particulier, on sait que pour des problèmes de Cauchy de diffusion-convection, au sens des distributions dans  $Q = ]0, T[ \times \Omega$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , génériquement formulés sous la forme :

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \Delta \phi(u) + \text{Div } \Psi(u) = f, \quad (\beta(u))(0) = U_0, \quad (1.1)$$

---

(\*) Reçu le 9 mars 1995

(1) Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, UPRES-A CNRS 5033, I.P.R.A., Av. de l'Université, F-64000 Pau (France)

où les fonctions numériques  $\beta$  et  $\phi$  sont continues et croissantes et où  $\Psi$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ( $\Psi(u) = \psi(u)\vec{G}$ ,  $\psi$  étant une fonction numérique continue par exemple), il est nécessaire, pour bien poser le problème, d'adjoindre des conditions supplémentaires lorsque la fonction  $\phi$  n'est pas injective. Lorsque  $\phi$  est injective, la recherche d'une formulation garantissant que le problème est bien posé mathématiquement sous des hypothèses "naturelles" pour l'expérimentateur constitue une question largement ouverte.

Au moins deux types de réponse peuvent être envisagés :

*Premier type*

Le premier type de réponse repose sur le fait qu'il est possible d'énoncer des résultats d'existence de solutions faibles. La difficulté est alors de montrer l'unicité de ces solutions faibles.

- [19] ( $\Omega = \mathbb{R}^n$ ) puis [7] et [8] ( $\Omega$  ouvert borné) ont énoncé un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour ce type de problème. Moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur les non-linéarités et sur la condition initiale, il est possible de valider une formule de dérivation des fonctions composées dans l'ensemble des fonctions à variation bornée, puis de montrer l'unicité dans l'ensemble des solutions  $u$  vérifiant

$$\beta(u) \in \text{BV}(\cdot)0, T[, L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \quad \text{et} \quad \phi(u) \in H^1(Q).$$

- Suivant cette idée, on donne dans [4] et [18] un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour une équation du type non local :

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \Delta \phi(u) = J(u) \exp\left(-\int_0^t J(u(s, \cdot)) ds\right) & \text{dans } Q \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} & \text{dans } \Omega \text{ borné.} \end{cases} \quad (1.2)$$

- Enfin [9] donnent un résultat d'unicité des solutions faibles du problème (1.1) pour des conditions de Dirichlet homogènes,  $\psi \circ \phi^{-1}$  étant supposée continue et sans hypothèse restrictive sur la condition initiale. L'hypothèse de continuité de  $\psi \circ \phi^{-1}$  assure que toute solution faible est une solution de type Kruskov. Les auteurs valident alors l'unicité par une méthode usuelle dans les problèmes hyperboliques du premier ordre, mais hors du cadre  $\text{BV}(Q)$ . Ce type de technique est aussi utilisé dans [13] pour une équation de diffusion dépendant de l'état du système physique.

*Deuxième type*

Le second type de réponse repose sur le fait qu'il est possible d'énoncer des résultats d'unicité de solutions fortes. La difficulté est alors de montrer l'existence de ces solutions fortes. Dans le cadre des modélisations de l'expérimentation, ou bien dans une approche numérique, il est préférable de pouvoir exhiber des solutions fortes, puisqu'alors les dérivées considérées sont des fonctions.

- On trouve dans [3] le théorème suivant.

THÉORÈME . — Soit  $(\Omega, B, \mu)$  un espace mesuré. Si

$$w \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega, B, \mu)), \quad \text{si } p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

et

$$v = \int_0^w p(r) dr \in \overline{BV}(0, T; L^1(\Omega, B, \mu)),$$

alors  $v \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega, B, \mu))$  et pour presque tout  $t$  de  $]0, T[$ ,

$$\frac{dv}{dt}(t) = p(w(t)) \frac{dw}{dt}(t)$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x$  de  $\Omega$ .

En s'appuyant sur ce résultat, les auteurs montrent qu'une solution faible de (1.1) est localement forte lorsque  $\partial\beta(u)/\partial t$  est une mesure de Radon, ce lorsque l'ensemble des zéros de  $\phi'$  est de mesure de Lebesgue nulle, en supposant de plus l'existence d'une fonction continue  $\sigma$  telle que  $|\psi'|^2 \leq \sigma\phi'$ . Ils donnent ensuite un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte au problème :

$$\begin{cases} f \in \frac{\partial\beta(u)}{\partial t} - Au & \text{dans } Q \\ u(0) = u_0 \text{ p.p.} & \text{dans } \Omega \text{ borné.} \end{cases} \quad (1.3)$$

$\beta$  étant supposée localement absolument continue sur  $\mathbb{R}$  et  $u_0$  suffisamment régulier.

- On se propose alors, dans le cadre du problème (1.2), de donner un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour des hypothèses sur les non-linéarités assez générales et des conditions de bord de type Fourier. On fera principalement référence à [1], [2] et [9].

Cependant, dans le cadre d'une donnée initiale plus régulière et sous couvert de certaines hypothèses sur les fonctions  $\beta$  et  $\phi$ , on montre que cette solution est forte au sens où  $\partial\beta(u)/\partial t$  est dans  $L^1(Q)$ . Ici, elle sera même dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ . On fera alors appel à [3].

## 2. Notations et hypothèses

Soit  $\Omega$  un domaine régulier non vide borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma$  une partie de la frontière de  $\Omega$  de mesure superficielle non nulle. On désigne par  $V$  l'espace  $H^1(\Omega)$ ,  $H$  l'espace  $L^2(\Omega)$  et on utilise les notations usuelles :  $X$  et  $Y$  étant des espaces de Banach,  $W(0, T; X, Y)$  [12] et  $BV(0, T; X)$  [5, Annexe].

On désignera par  $\|\cdot\|$  et  $|\cdot|$  les normes de  $V$  et  $H$  respectivement,  $|\cdot|_1$  la semi-norme des gradients dans  $V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $V'$  et  $V$ .

- $\beta$ ,  $\phi$  et  $J$  sont trois fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}$ ;  $\beta$  et  $\phi$  sont strictement croissantes, nulles en 0, et  $J$  est décroissante sur  $[\theta, +\infty[$ ,  $0 \leq \theta$ , nulle à partir d'une valeur  $T_F$  et  $J \circ \beta^{-1}$  est lipschitzienne.
- $u_0$  est un élément de  $L^\infty(\Omega)$  vérifiant  $0 \leq \theta \leq u_0$  p.p. dans  $\Omega$ .
- $u^\infty$  est un élément de  $BV(0, T; L^1(\Gamma))$  où pour presque tout  $t$  de  $[0, T]$ ,

$$\theta \leq u^\infty(t) \leq K_1 \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

- $F$  est la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{d(\beta \circ \phi^{-1})}{dx}}(s) ds$$

où  $d(\beta \circ \phi^{-1})/dx$  représente la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\beta \circ \phi^{-1}$  dans la décomposition de Lebesgue–Radon–Nikodym.

- On note enfin  $G = F \circ \phi$  et  $\kappa = \max(|u_0|_\infty, T_F, K_1)$ .

On cherche alors une solution au problème de Cauchy (P) suivant :  $u$  vérifiant, au sens des distributions, l'équation :

$$\frac{\partial\beta(u(t, x))}{\partial t} - \Delta\phi(u(t, x)) = J(u(t, x)) \exp\left(-\int_0^t J(u(\sigma, x)) d\sigma\right) \quad (2.1)$$

et satisfaisant, de façon formelle, la condition de bord du type Fourier :

$$-\frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} = (u - u^\infty) \mathbf{1}_\Gamma. \quad (2.2)$$

Ainsi, on appellera solution du problème (P), toute fonction  $u$  de  $L^1(Q)$  telle que :

- i)  $\phi(u) \in L^2(0, T; V)$ ,  $\beta(u) \in W(0, T; H, V')$ ,  $\theta \leq u \leq \kappa$  p.p. dans  $Q$ , vérifiant pour presque tout  $t$  de  $]0, T[$  et pour tout  $v$  de  $V$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega \nabla \phi(u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma (u - u^\infty) v \, d\sigma = \\ = \int_\Omega J(u) \exp\left(-\int_0^t J(u) \, d\sigma\right) v \, dx ; \end{aligned} \quad (2.3)$$

- ii)  $\beta(u_0) = L^1(\Omega) - \lim \operatorname{ess}_{t \rightarrow 0^+} \beta(u)(t)$ .

Il découle directement de i) qu'il est possible de choisir  $u$  de sorte que  $\beta(u)$  soit un élément de  $C_s([0, T]; L^2(\Omega))$  [12, p. 297].

La condition ii), qui n'est pas nécessaire pour donner un sens au problème de Cauchy, devient essentielle pour justifier le résultat d'unicité de la solution.

On retrouve ce problème dans la modélisation des phénomènes de cristallisation dans des émulsions surfondues ([16], [17]).

### 3. Résultats d'existence d'une solution

Au moins deux présentations sont envisageables. La première consiste à appliquer les résultats de la théorie des semi-groupes non linéaires comme il est présenté par exemple dans [3]. Pour cela, il faut s'assurer que l'opérateur construit à partir de (2.1 à 2.3) possède les propriétés attendues. La seconde, variationnelle, consiste à passer à la limite dans un schéma semi-discrétisé en temps par estimations a priori. Dans cette dernière stratégie, que nous choisissons, on est ramené à l'étude d'une suite de problèmes stationnaires définis par :  $u_0$  étant donné dans la section 2; pour  $u_n$ ,  $n \geq 0$ , mesurable, compris entre  $\theta$  et  $\kappa$  presque partout dans  $\Omega$ , on cherche  $u_{n+1}$  dans  $H$ ,

compris entre  $\theta$  et  $\kappa$  presque partout dans  $\Omega$ , tel que  $\phi(u_{n+1}) \in V$  et vérifiant pour  $v$  de  $V$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\beta(u_{n+1}) - \beta(u_n)}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \nabla \phi(u_{n+1}) \cdot \nabla v \, dx + \\ & \quad + \int_{\Omega} \phi(u_{n+1}) v \, dx - \int_{\Omega} \phi(u_n) v \, dx + \int_{\Gamma} (u_{n+1} - u_{n+1}^{\infty}) v \, d\sigma = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{h} v \, dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

où, pour  $N$  grand, on note

$$h = \frac{T}{N}, \quad \varphi^n = 1 - \exp\left(-h \sum_{i=0}^n J(u_i)\right), \quad u_n^{\infty} = \frac{1}{2h} \int_{(n-1)h}^{(n+1)h} u^{\infty}(s) \, ds.$$

Ainsi, la fonction en escalier  $u^{\infty h}$  définie pour presque tout  $t$  par

$$u^{\infty h}(t) = \sum_{k=1}^N u_k^{\infty} \cdot \mathbf{1}_{(k-1)h, kh]}(t),$$

converge vers  $u^{\infty}$  dans  $L^2(]0, T[ \times \Gamma)$ .

### 3.1 Existence d'une solution faible

LEMME 1. — *Pour tout  $h$  positif, il existe une unique suite  $(u_n)$  satisfaisant à (3.1)*

*Démonstration.* — La preuve de l'existence du terme  $u_{n+1}$  est classique et s'appuie sur le théorème de point fixe de Schauder–Tychonov dans le cadre hilbertien séparable [20].

Pour cela, on introduit  $g = \min(\text{Id}^+, \phi(\kappa))$  et l'application  $T$  de  $V$  dans  $V$  qui à  $S$  associe l'unique solution  $\Phi_S$  du problème linéaire suivant : pour tout  $v$  de  $V$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \Phi_S \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \Phi_S v \, dx = \\ & = - \int_{\Gamma} (\phi^{-1} \circ g(S) - u_{n+1}^{\infty}) v \, d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\beta \circ \phi^{-1} \circ g(S) - \beta(u_n)}{h} v \, dx + \\ & \quad + \int_{\Omega} \phi(u_n) v \, dx + \int_{\Omega} \frac{1 - \varphi^n}{h} (1 - e^{-hJ \circ \phi^{-1} \circ g(S)}) v \, dx. \end{aligned}$$

Pour mettre en évidence un point fixe de  $T$  (on le note  $\Phi$ ), il suffit alors de montrer que cette application est faiblement séquentiellement continue et qu'elle conserve, indépendamment de  $S$ , un convexe compact faible fixe de  $V$ .

On montre alors que  $\phi(\theta) \leq \Phi \leq \phi(\kappa)$  de sorte que la fonction  $g$  n'a plus lieu d'être et on note  $u_{n+1}$  l'élément  $\phi^{-1}(\Phi)$ .

L'unicité repose sur la monotonie des fonctions d'état non linéaires et sur la propriété d'injectivité de  $\phi$  ([16] à [18]).  $\square$

LEMME 2. — *Il existe une constante  $K$ , indépendante de  $h$ , telle que pour tout  $n$  :*

$$|(\varphi^{n+1} - \varphi^n)/h| \leq K \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\varphi^{k+1} - \varphi^k|^2}{h} \leq K ; \quad (3.2)$$

$$h \sum_{k=1}^n \|\phi(u_k)\|^2 \leq K ; \quad (3.3)$$

$$n < N, \quad \sum_{k=1}^{N-1} (\beta(u_{k+n}) - \beta(u_k)) (\phi(u_{k+n}) - \phi(u_k)) \leq Kn ; \quad (3.4)$$

$$|\beta(u_n)|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} |\beta(u_{k+1}) - \beta(u_k)|^2 + h \sum_{k=1}^n \|G(u_k)\|^2 \leq Khn + |\beta(u_0)|^2 ; \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=0}^n h \left\| \frac{\beta(u_{k+1}) - \beta(u_k)}{h} \right\|_{V'}^2 \leq K ; \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^n kh \frac{|G(u_{k+1}) - G(u_k)|_{L^2(\Omega)}^2}{h} + \frac{nh}{2} |\phi(u_{n+1})|_1^2 + \sum_{k=1}^n \frac{kh}{2} \|\phi(u_{k+1}) - \phi(u_k)\|_V^2 \leq K . \quad (3.7)$$

*Démonstration.* — Ces estimations a priori reposent sur :

- la construction de la suite  $(\varphi^n)$  pour (3.2) ([16], [17]);
- des choix classiques de fonctions test dans (3.1) ainsi que l'utilisation d'inégalités de convexité notamment présentées dans [2] et [1].

Si  $\beta$  et  $\phi$  sont des fonctions continues et croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\phi$  inversible; alors, si on note  $\psi$  la fonction définie pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par

$$\psi(x) = \int_0^{\phi(x)} [\beta(x) - \beta \circ \phi^{-1}(s)] ds,$$

il vient pour tout  $y$  et  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\phi(x)[\beta(y) - \beta(x)] \leq \psi(y) - \psi(x) \leq \phi(y)[\beta(y) - \beta(x)].$$

Pour (3.3), on pose  $v = \phi(u_{n+1})$ .

Pour (3.4), on effectue la sommation de  $n$  termes consécutifs de l'équation (3.1) à partir du rang  $k$ , on pose  $v = h[\phi(u_{k+n}) - \phi(u_k)]$  et on ajoute les égalités ainsi obtenues pour  $k = 1$  à  $k = N - n$  (cf. [1, § 1.7] et [11, III-4] par exemple).

Pour (3.5), il faudrait pouvoir choisir  $\beta(u_{n+1})$  comme fonction test; cette dernière n'étant pas dans  $V$ , on contourne la difficulté en posant  $f_k = (\beta \circ \phi^{-1}) * \rho_k$  et  $v = f_k(\phi(u_{n+1}))$  où  $\rho_k$  est le noyau classique de convolution de classe  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , puis en passant à la limite sur  $k$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi(u_{n+1}) \cdot \nabla v \, dx &= \int_{\Omega} f'_k(\phi(u_{n+1})) |\nabla \phi(u_{n+1})|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla F_k(\phi(u_{n+1}))|^2 \, dx \end{aligned}$$

où  $F_k$  est la primitive de  $\sqrt{f'_k}$  qui s'annule en 0. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\beta(u_{n+1}) - \beta(u_n)}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \phi(u_{n+1}) v \, dx + \\ + \int_{\Omega} |\nabla F_k(\phi(u_{n+1}))|^2 \, dx + \int_{\Gamma} (u_{n+1} - u_{n+1}^{\infty}) v \, d\sigma = \\ = \int_{\Omega} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{h} v \, dx + \int_{\Omega} \phi(u_n) v \, dx. \end{aligned}$$

Par passage à la limite sur  $k$ , comme  $F_k$  converge vers  $F$  au sens de la convergence compacte (cf. Annexe), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{|\beta(u_{n+1})|^2 - |\beta(u_n)|^2 + |\beta(u_{n+1}) - \beta(u_n)|^2}{2h} + \\ & \quad + \|G(u_{n+1})\|^2 + \int_{\Gamma} u_{n+1} \beta(u_{n+1}) \, d\sigma \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{h} \beta(u_{n+1}) \, dx + \int_{\Omega} \phi(u_n) \beta(u_{n+1}) \, dx + \int_{\Gamma} u_{n+1}^{\infty} \beta(u_{n+1}) \, d\sigma \\ & \leq \text{Cte} . \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par  $h$  et sommer de 1 à  $n - 1$  pour valider le lemme.

(3.6) est immédiat ; pour (3.7) on pose  $v = \phi(u_{n+1}) - \phi(u_n)$  [16].  $\square$

Pour passer à la limite, introduisons, pour toute suite  $(v_k)$ , les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} v^h(t) &= \sum_{k=1}^N v_k \mathbf{1}_{](k-1)h, kh]}(t) \\ \tilde{v}^h(t) &= \sum_{k=1}^N \left( v_{k-1} + (t - kh + h) \frac{v_k - v_{k-1}}{h} \right) \mathbf{1}_{](k-1)h, kh]}(t), \quad \tilde{v}^h(0) = v_0 . \end{aligned}$$

Ainsi, par calcul des normes respectives, suite au lemme 2 et plus particulièrement suite à [1, § 1.7-1.9] et [11, III-4] pour (3.7), on obtient le résultat suivant.

LEMME 3. — *Indépendamment de  $h$ , les fonctions*

- (a)  $u^h, \tilde{u}^h, \phi(u)^h, \widetilde{\phi(u)}^h, \beta(u)^h$  et  $\widetilde{\beta(u)}^h$  sont bornées dans  $L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$  ;
- (b)  $\phi(u)^h$  est bornée dans  $L^2(0, T; V)$ ,  $\sqrt{t} \phi(u)^h$  dans  $L^\infty(0, T; V)$ , et  $\widetilde{\beta(u)}^h$  dans  $W(0, T; H, V')$  ;
- (c)  $\varphi^h$  et  $\tilde{\varphi}^h$  sont bornées dans  $L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$  et  $W(0, T; H, H) \cap L^\infty(Q)$ , respectivement ;
- (d)  $G(u)^h$  est bornée dans  $L^2(0, T; V)$ , ainsi que  $\sqrt{t}(\partial \widetilde{\beta(u)}^h) / \partial t$  dans  $L^2(Q)$  ;

- (e)  $\|\widetilde{\beta(u)^h} - \beta(u)^h\|_{L^2(Q)}^2, \|\sqrt{t}(\widetilde{G(u)^h} - G(u)^h)\|_{L^2(Q)}^2,$   
 $\|\sqrt{t}(\widetilde{\phi(u)^h} - \phi(u)^h)\|_{L^2(Q)}^2$  et  $\|\widetilde{\varphi^h} - \varphi^h\|_{L^2(Q)}^2$  sont majorées par  
 une constante fois  $h$  ;  
 (f)  $\forall \varepsilon \in ]0, T[ ,$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} (\beta(u^h)(t+\varepsilon) - \beta(u^h)(t)) (\phi(u^h)(t+\varepsilon) - \phi(u^h)(t)) \, dx \, dt \leq K .$$

On introduit alors les lemmes suivants qui seront particulièrement utiles pour le passage à la limite dans le terme de bord et pour valider la condition initiale.

LEMME 4. — Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $L^\infty(0, T; V)$  telle que  $v_n$  converge vers  $v$  dans  $L^2(Q)$  ; alors, il existe une sous-suite qui converge vers  $v$  dans  $L^2(]0, T[ \times \Gamma)$  et p.p. sur  $]0, T[ \times \Gamma$ .

Démonstration. — Comme la suite  $(v_n)$  converge vers  $v$  dans  $L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , pour une sous-suite notée de même,  $v_n(t)$  converge vers  $v(t)$  dans  $L^2(\Omega)$  pour presque tout  $t$  de  $]0, T[$ . Or, par hypothèse, pour presque tout  $t$  de  $]0, T[ , v_n(t)$  est borné dans  $V$ . Ainsi, pour une sous-suite,  $v_{n'}(t)$  converge vers un élément  $\xi$  dans  $V$  faible,  $L^2(\Omega)$  fort et  $L^2(\Gamma)$  fort.

De plus, la seule limite admissible pour cette suite est  $v(t)$  ; ainsi, toute la suite converge vers  $v(t)$  pour les topologies ci-dessus citées. D'où, pour presque tout  $t$  de  $]0, T[ , v_n(t)$  converge vers  $v(t)$  dans  $L^2(\Gamma)$  et comme

$$\|v_n(t)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v_n(t)\|_V \leq \text{Cte} ,$$

il s'ensuit que  $v_n$  converge vers  $v$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  puis dans  $L^2(]0, T[ \times \Gamma)$  et p.p. sur  $]0, T[ \times \Gamma$  pour une sous-suite.  $\square$

LEMME 5. — Soient  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge faiblement vers  $v$  dans  $W(0, T; H, V')$  et dans  $L^\infty(Q)$  faible \*,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers 0 dans  $H$  et  $k$  une constante positive.

Si pour tout  $t$  de  $[0, T]$ ,

$$|v_n(t)|_H^2 \leq |v(0)|_H^2 + kt + |u_n|_H^2 ,$$

alors

$$|v(t)|_H^2 \leq |v(0)|_H^2 + kt$$

et  $t \rightarrow v(t)$  est continue à droite en 0 dans  $L^2(\Omega)$ , donc dans  $L^1(\Omega)$ .

*Démonstration*

(a) La limite  $v$  est un élément de  $C_S(0, T; H)$  de sorte que, pour toute suite  $t_k$  de  $]0, T[$  qui converge vers 0,  $v(t_k)$  converge vers  $v(0)$  dans  $H$  faible.

(b) La suite  $v_n$  étant bornée dans  $W(0, T; H, V')$  et dans  $L^\infty(Q)$  donc dans  $C_S(0, T; H)$ , il s'ensuit alors que pour tout  $t$  positif,  $v_n(t)$  est bornée dans  $H$  et donc converge faiblement dans  $H$  pour une sous-suite puis dans  $V'$  faible. Or  $W(0, T; H, V')$  s'injecte continûment dans  $C([0, T], V')$ ; ainsi, pour  $t$  fixé, l'injection de  $W(0, T; H, V')$  dans  $V'$  qui à  $u$  associe  $u(t)$  est une application linéaire continue d'un espace de Banach dans un autre. C'est alors une application faiblement continue et donc  $v_n(t)$  converge faiblement vers  $v(t)$  dans  $V'$ .

La topologie faible étant séparée, il vient que la sous-suite  $v_n(t)$  converge vers  $v(t)$  dans  $H$  faible et la semi-continuité inférieure de la norme pour la convergence faible nous permet de conclure que pour tout  $t$  positif,

$$|v(t)|_H^2 \leq |v(0)|_H^2 + kt.$$

(c) Regroupant (a) et (b),  $H$  étant un espace de Hilbert, il s'ensuit la convergence forte de la suite  $v(t_k)$  vers  $v(0)$  dans  $H$ . D'où le lemme.  $\square$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Il existe une solution  $u$  au problème (P). De plus,*

$$G(u) \in L^2(0, T; V) \quad \text{et} \quad \sqrt{t} \frac{\partial G(u)}{\partial t} \in L^2(Q).$$

*Démonstration.* — Le passage à la limite sur  $h$  est alors envisageable. En premier lieu, on rappelle le résultat de convergence 1.9 démontré dans [1].

Soient  $b$  une fonction continue croissante et  $v_\varepsilon$  une suite qui converge faiblement vers  $v$  dans  $L^r(0, T; H^{1,r}(\Omega))$  et vérifiant à l'estimation :

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_\Omega b(v_\varepsilon(t+h)) - b(v_\varepsilon(t))(v_\varepsilon(t+h) - v_\varepsilon(t)) \, dx \, dt \leq C$$

et

$$\int_{\Omega} B(v_{\varepsilon}(t+h)) \, dx \leq C$$

pour  $0 < t < T$  où  $B(x) = \int_0^x (b(x) - b(s)) \, ds$ . Alors,  $b(v_{\varepsilon})$  converge vers  $b(v)$  dans  $L^1(]0, T[ \times \Omega)$  et  $B(v_{\varepsilon})$  converge vers  $B(v)$  p.p.

Ainsi, pour  $v = \phi(u)^h$  et  $b = \beta \circ \phi^{-1}$ , ce lemme permet d'obtenir, pour une sous-suite,

- une convergence presque partout dans  $Q$  pour  $\beta(u)^h$ ,
- la continuité des fonctions  $\beta^{-1}$ ,  $\phi$  et  $J$  assure l'identification des limites dans les termes non linéaires,
- le point (b) du lemme 3 et le lemme 4 assurent le passage à la limite sur l'intégrale de bord,
- (3.5) du lemme 2 et le lemme 5 valident la condition initiale.  $\square$

### 3.2 Existence d'une solution forte

Considérons de plus les hypothèses suivantes :

(H1)  $F$  est inversible, donc  $G$  aussi, et  $\beta \circ G^{-1}$  est localement absolument continue.

*Remarque.* — C'est le cas par exemple si  $h = G \circ \beta^{-1}$  est de classe  $C^1$  avec  $\{x \mid h'(x) = 0\}$  négligeable [3].

(H2)  $u_0 \in \Xi$  avec

$$\Xi = \left\{ v \in L^{\infty}, \theta \leq v \text{ p.p. dans } \Omega, \phi(v) \in V \text{ et } \exists c \geq 0 \text{ tel que} \right. \\ \left. \forall w \in V \cap L^{\infty}, w \geq 0, \text{ alors } - \int_{\Omega} \nabla \phi(v) \cdot \nabla w \, dx \leq c \|w\|_{\infty} \right\}$$

LEMME 6

1) Si  $\phi(u_0) \in V$ , alors  $\phi(u) \in L^{\infty}(0, T; W)$  et  $G(u) \in H^1(Q)$ .

2) Sous l'hypothèse (H2) il existe une constante  $K$ , indépendante de  $h$ , telle que : pour tout  $n$ ,

$$\frac{|\beta(u_{n+1}) - \beta(u_n)|_{L^1(\Omega)}}{h} + \sum_{k=0}^n |u_{k+1} - u_k|_{L^1(\Gamma)} \leq K.$$

*Démonstration.* — L'estimation 1) est classique.

Pour l'estimation 2), on pose  $v = \text{sign}_\varepsilon(\phi(u_{n+1}) - \phi(u_n))$  où on note  $\text{sign}_\varepsilon$  une approximation lipschitzienne croissante de la fonction signe s'annulant en l'origine. L'hypothèse (H2) puis le passage à la limite sur  $\varepsilon$  nous permettent de valider directement la propriété pour  $n = 0$ .

Pour  $n \geq 1$  on soustrait deux itérations consécutives. Après être passé à la limite sur  $\varepsilon$ , l'application du lemme de Gronwall discret conduit au résultat.  $\square$

PROPRIÉTÉ 1. — *Sous l'hypothèse (H2), la solution  $u$  du théorème 1 vérifie :*

$$\beta(u) \in \text{BV}(0, T; L^1(\Omega)).$$

*Démonstration.* — En reprenant le passage à la limite proposé dans le paragraphe précédent, on remarque que, indépendamment de  $t$  et de  $h$ ,  $\phi(u(t))^h$  est borné dans  $V$  et reste dans un compact fixe de  $L^1(\Omega)$ . Comme  $u(t)^h$  est uniformément borné dans  $L^\infty(\Omega)$  et comme  $\beta \circ \phi^{-1}$  est une fonction continue,  $\beta(u(t))^h$  reste dans un compact fixe de  $L^1(\Omega)$ , indépendamment de  $t$  et de  $h$ .  $\widetilde{\beta(u)^h}$  est alors à valeurs dans  $A$ , l'enveloppe convexe de ce compact, qui est un compact de  $L^1(\Omega)$ , ce indépendamment de  $t$  et de  $h$ .

De plus, suite au 2) du lemme 6,  $\widetilde{\beta(u)^h}$  est une fonction lipschitzienne de  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^1(\Omega)$  (plus précisément dans  $A$ ) dont le rapport de Lipschitz est majoré par une constante indépendante de  $h$ . Une application immédiate du théorème d'Ascoli permet de conclure que la limite  $\beta(u)$  est une fonction lipschitzienne de  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^1(\Omega)$  (i.e. [5],  $\beta(u) \in \widetilde{W}^{1,\infty}(0, T; L^1(\Omega))$ ).  $\square$

PROPRIÉTÉ 2. — *Supposons (H1) et (H2), alors la solution  $u$  du théorème 1 est une solution forte, c'est-à-dire  $\beta(u) \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ .*

*Démonstration.* — Soit

$$v = \beta(u) \in \text{BV}(0, T; L^1(\Omega))$$

et

$$w = G(u) \in H^1(Q) \subset W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega)),$$

alors le théorème 1.1 de [3] permet de conclure puisque, comme  $\beta \circ G^{-1}$  est localement absolument continue, il suffit de poser  $p = (\beta \circ G^{-1})'$  au sens de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  (cf. § 1.2).  $\square$

COROLLAIRE .— *Supposons (H1) et (H2), alors la solution  $u$  du théorème 1 vérifie :*

$$\beta(u) \in W^{1,\infty}(0, T; L^1(\Omega)).$$

*Démonstration.* — Comme  $\beta(u) \in W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ ,  $t \rightarrow \beta(u)(t, \cdot)$  est une fonction de  $]0, T[$  à valeurs dans  $L^1(\Omega)$  dérivable p.p. sur  $]0, T[$  [5, prop. A3].

De plus, dans la démonstration de la propriété 1, on montre que  $\beta(u)$  appartient à  $\widetilde{W}^{1,\infty}(0, T; L^1(\Omega))$  (c'est une fonction lipschitzienne de  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^1(\Omega)$ ). Dès lors, la proposition A3 de [5, Annexe] permet de conclure.  $\square$

*Remarques*

- Comme  $G(u) \in H^1(Q) \cap L^\infty(Q)$ , il est possible de préciser que  $u \in C(0, T; L^p(\Omega))$  pour tout  $p$  fini.
- On donne dans [17] et [18] un autre ensemble  $\Xi$  assurant à la solution une propriété de décroissance au cours du temps, ainsi qu'un comportement asymptotique maîtrisé.

Si l'hypothèse (H1) n'est pas vérifiée le résultat de la propriété 2 peut faire défaut. À titre de contre-exemple; notons  $f$  une fonction singulière strictement croissante et nulle en l'origine [14] et posons  $\beta = \text{Id} + f$ ,  $\phi$  la primitive de  $\beta$  s'annulant en 0 et  $J \equiv 0$ .

Dès lors, l'utilisation du lemme 3.1 de [3], nous permet de remarquer que  $\beta \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} + f \circ \phi^{-1}$  et  $\phi^{-1}$  est localement absolument continue et

$$G(x) = \int_0^x \sqrt{\beta(s)} \, ds.$$

$G^{-1}$  est alors localement absolument continue et  $\beta \circ G^{-1} = G^{-1} + f \circ G^{-1}$  n'est pas localement absolument continue.

Soit alors

$$\Omega = ]0, 1[, \quad u_0(t, x) = x, \quad u^\infty(t, x) = t + x + \beta(t + x);$$

$u(t, x) = t + x$  est l'unique solution au problème (P) associé et par construction  $\beta(u)$  est dans  $\text{BV}(0, T; L^1(\Omega))$  mais pas dans  $W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ . Ce n'est donc pas une solution forte au sens précisé dans l'introduction.  $\square$

#### 4. Unicité de la solution

On sait démontrer l'unicité de la solution d'un tel problème dans l'ensemble des solutions bornées, homéomorphes à une fonction de  $H^1(Q)$  telles que  $\beta(u)$  soit dans  $BV(0, T; L^1(\Omega))$  ([4] ou [18]). Ici, on va adapter le résultat de [9] où les auteurs montrent que toute solution faible est de type Kruskov. Ils montrent ensuite l'unicité de la solution par l'application des techniques usuelles du traitement des problèmes hyperboliques non linéaires du premier ordre, sans hypothèse supplémentaire sur la régularité de la solution, sur les fonctions non linéaires ou bien sur la donnée initiale. Pour une présentation détaillée de ces techniques, on renvoie par exemple à [10].

**THÉORÈME 2.** — *Le problème (P) admet une unique solution.*

*Démonstration.* — Soient  $u$  et  $\hat{u}$  deux solutions admissibles pour le problème (P); pour presque tout  $s$  et tout  $t$  de  $]0, T[$ , on note

$$v(t, s) = p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s)))$$

où  $p_\varepsilon$  est une approximation lipschitzienne croissante et nulle en 0 de la fonction signe, puis, pour la fonction test  $v$ , on effectue la soustraction des équations (2.3) au temps  $t$  avec (2.3) au temps  $s$ . D'où, en notant

$$\varphi(t, x) = 1 - \exp\left(-\int_0^t J(u(\sigma, x)) d\sigma\right)$$

et  $\hat{\varphi}$  la même expression relative à  $\hat{u}$ .

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial\beta(u(t))}{\partial t} - \frac{\partial\beta(\hat{u}(s))}{\partial s}, p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \right\rangle + \\ & + \int_{\Omega} \nabla(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \cdot \nabla p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) dx + \\ & + \int_{\Gamma} (u(t) - \hat{u}(s) - u^\infty(t) + u^\infty(s)) p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) d\sigma = \\ & = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} - \frac{\partial\hat{\varphi}(s)}{\partial s} \right) p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) dx. \end{aligned}$$

Après majorations et minoration, il existe une constante  $C$  positive telle que

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \beta(u(t))}{\partial t} - \frac{\partial \beta(\hat{u}(s))}{\partial s}, p_\varepsilon(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \right\rangle \leq \\ & \leq |u^\infty(t) - u^\infty(s)|_{L^1(\Gamma)} + C|\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(s))|_{L^1(\Omega)} + \\ & \quad + C \int_0^t |\beta(u(\sigma)) - \beta(\hat{u}(\sigma))|_{L^1(\Omega)} d\sigma + C|t - s|. \end{aligned}$$

On note  $f(t, s)$  le second membre de l'inégalité ci-dessus et

$$J_\delta = \int_0^T \int_0^T f(t, s) \xi\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_\delta\left(\frac{t-s}{2}\right) dt ds,$$

où  $\xi$  est une fonction positive de  $\mathcal{D}(]0, T[)$ ,  $\text{supp } \xi \subset [t_0, t_1]$  et  $\rho_\delta$  est le noyau classique de régularisation dans  $\mathbb{R}$  avec  $\text{supp } \rho_\delta \subset [-\delta, \delta]$  et  $\delta$  assez petit pour que :

$$0 < \delta < t_0 < t_1 < t_1 + \delta < T \dots$$

Comme

$$\begin{aligned} & |f(t, s) - f(t, t)| \leq \\ & \leq |u^\infty(t) - u^\infty(s)|_{L^1(\Gamma)} + C|\beta(\hat{u}(t)) - \beta(\hat{u}(s))|_{L^1(\Omega)} + C|t - s|, \end{aligned}$$

$J_\delta$  converge vers  $J_0$  lorsque  $\delta$  tend vers  $0^+$  par définition des points de Lebesgue, où

$$\begin{aligned} J_0 = C \int_0^T & \xi(t) \left( |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(t))|_{L^1(\Omega)} + \right. \\ & \left. + \int_0^t |\beta(u(\sigma)) - \beta(\hat{u}(\sigma))|_{L^1(\Omega)} d\sigma \right) dt. \end{aligned}$$

Pour  $k$  réel quelconque, si on pose

$$\theta_1(x, k) = \int_{\beta(k)}^{\beta(x)} p_\varepsilon(\phi \circ \beta^{-1}(\sigma) - \phi(k)) d\sigma,$$

on remarque que pour tout couple  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} p_\varepsilon(\phi(x) - \phi(k))(\beta(y) - \beta(x)) & \leq \theta_1(y, k) - \theta_1(x, k) \\ & \leq p_\varepsilon(\phi(y) - \phi(k))(\beta(y) - \beta(x)). \end{aligned}$$

Notons

$$\xi_{\delta}(t, s) = \xi\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_{\delta}\left(\frac{t+s}{2}\right), \quad \xi_{\delta} \in \mathcal{D}(]0, T[ \times ]0, T[)$$

de sorte que, suivant [2], il vient l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{\partial \beta(u(t))}{\partial t}, p_{\varepsilon}(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \right\rangle \xi\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_{\delta}\left(\frac{t-s}{2}\right) dt = \\ & = - \int_Q \theta_1(u(t), \hat{u}(s)) \frac{\partial \xi_{\delta}}{\partial t}(t, s) dx dt. \end{aligned}$$

De même, on montre que pour

$$\theta_2(k, x) = \int_{\beta(x)}^{\beta(k)} p_{\varepsilon}(\phi(k) - \phi \circ \beta^{-1}(\sigma)) d\sigma,$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{\partial \beta(\hat{u}(s))}{\partial s}, p_{\varepsilon}(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \right\rangle \xi\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_{\delta}\left(\frac{t-s}{2}\right) ds = \\ & = \int_Q \theta_2(u(t), \hat{u}(s)) \frac{\partial \xi_{\delta}}{\partial s}(t, s) dx ds. \end{aligned}$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ ,  $p_{\varepsilon}(\phi \circ \beta^{-1}(s) - \phi(y))$  converge vers  $\text{sign}(\phi \circ \beta^{-1}(s) - \phi(y)) = \text{sign}(s - \beta(y))$ ; ainsi, pour tout couple de réels  $(x, y)$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ ,  $\theta_1(x, y)$  converge vers

$$\int_{\beta(y)}^{\beta(x)} \text{sign}(\sigma - \beta(y)) d\sigma = \int_0^{\beta(x) - \beta(y)} \text{sign}(u) du = |\beta(x) - \beta(y)|.$$

De même,  $\theta_2(x, y)$  tend vers  $|\beta(x) - \beta(y)|$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ . D'où

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T \left\langle \frac{\partial \beta(u(t))}{\partial t} - \frac{\partial \beta(\hat{u}(s))}{\partial s}, p_{\varepsilon}(\phi(u(t)) - \phi(\hat{u}(s))) \right\rangle \times \\ & \quad \times \xi\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_{\delta}\left(\frac{t-s}{2}\right) ds dt \end{aligned}$$

tend vers

$$- \int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(s))| \xi'\left(\frac{t+s}{2}\right) \rho_{\delta}\left(\frac{t-s}{2}\right) dx ds dt$$

lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ . De sorte qu'en passant à la limite sur  $\delta$ ,

$$- \int_0^T |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(t))|_{L^1(\Omega)} \xi'(t) dt \leq \int_0^T \psi(t) \xi(t) dt$$

où

$$\psi(t) = C |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(t))|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t |\beta(u(\sigma)) - \beta(\hat{u}(\sigma))|_{L^1(\Omega)} d\sigma.$$

Notant  $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ , on a

$$- \int_0^T \left( |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(t))|_{L^1(\Omega)} - \Psi(t) \right) \xi'(t) dt \leq 0.$$

Ainsi, la fonction numérique bornée  $h : t \rightarrow |\beta(u(t)) - \beta(\hat{u}(t))|_{L^1(\Omega)} - \Psi(t)$  est égale p.p. sur  $]0, T[$  à une fonction numérique décroissante. Comme par hypothèse sur les solutions du problème (P),  $\lim_{t \downarrow 0} h(t) = 0$ , alors  $h(t) \leq 0$  p.p. sur  $]0, T[$ . Le lemme de Gronwall permet alors de conclure au sujet de l'unicité.  $\square$

### Remarques

- On retrouve aussi les résultats classiques de continuité des solutions par rapport aux conditions initiales ou bien des résultats de conservation de l'ordre dans les solutions. Pour cela, il suffit de choisir pour  $p_\varepsilon$  une approximation de la fonction partie positive et/ou deux données initiales différentes.
- Si, pour  $h$  fixé, à la place de  $\hat{u}(t)$ , on prend  $u(t+h)$ , la démonstration de l'unicité permet de reporter la continuité en 0 en une continuité de  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^1(\Omega)$ .

## 5. Annexe

Pour toutes les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  croissantes, on note  $dg/df$  la densité de la mesure  $dg$  par rapport à la mesure  $df$ .

Soient  $f, g$  et  $F$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues croissantes. On dit que  $F$  vérifie  $(E_{fg})$  si pour tout couple de réels  $(x, y)$ , on a

$$|F(y) - F(x)| \leq \sqrt{|f(y) - f(x)| |g(y) - g(x)|}.$$

PROPOSITION A1

- i) S'il existe un intervalle  $I$  sur lequel les mesures de Radon  $df$  et  $dg$  sont étrangères et si  $F$  satisfait  $(E_{fg})$ , alors  $F = \text{Cte}$  sur  $I$ .
- ii) Il existe une fonction  $F$  inversible vérifiant  $(E_{fg})$  si et seulement si  $\int_0^x \sqrt{df/dg}(s) dg(s)$  est inversible. Alors,  $f$  et  $g$  sont inversibles.

Démonstration

i) De par leur régularité, les trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $F$  fournissent, par dérivation au sens des distributions, des mesures de Radon  $\sigma$ -finies. Il est alors possible de dériver ces mesures les unes par rapport aux autres.

Ainsi, suivant [6] et [15],

$$\frac{df}{dF} \text{ et } \frac{dg}{dF} \text{ existent } dF \text{ p.p.}, \quad \frac{dF}{df} \text{ et } \frac{dg}{df} \text{ existent } df \text{ p.p.},$$

$$\frac{dF}{dg} \text{ et } \frac{df}{dg} \text{ existent } dg \text{ p.p.}$$

Introduisant alors  $A$  (resp.  $B$ ,  $C$  et  $D$ ) l'ensemble des points où la densité de la mesure  $df$  (resp.  $dg$ ,  $df$  et  $dg$ ) par rapport à la mesure  $dF$  (resp.  $dF$ ,  $dg$  et  $df$ ) est nulle. On cherche alors à montrer que  $F$  est une fonction constante sur  $I$ , c'est-à-dire  $dF$  est la mesure nulle sur  $I$ .

Soit donc :

$$A = \left\{ x \in I \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{F(x+h) - F(x)} = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in I \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{F(x+h) - F(x)} = 0 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in I \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = 0 \right\}$$

$$D = \left\{ x \in I \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{f(x+h) - f(x)} = 0 \right\}.$$

Comme  $df$  et  $dg$  sont des mesures singulières sur  $I$ , on peut en conclure que  $dg(I - C) = df(I - D) = 0$  [15].

De plus, suite à l'hypothèse  $(E_{fg})$ , il vient pour tout  $x$  et  $D$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{g(x+h) - g(x)}{f(x+h) - f(x)}} = 0.$$

Ce qui veut dire que  $dF$  et  $df$  sont des mesures étrangères sur  $I$ .

Toujours suite à l'hypothèse  $(E_{fg})$ , il vient pour tout  $x$  de  $C$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{g(x+h) - g(x)} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}} = 0.$$

Ce qui veut dire que  $dF$  et  $dg$  sont des mesures étrangères sur  $I$ .

Comme  $dF$  et  $df$  (resp.  $dg$ ) sont des mesures étrangères,

$$dF(I - A) = dF(I - B) = 0.$$

D'où  $dF(I) = 0$  puisque  $A \cap B = \emptyset$ .

ii) C'est une conséquence directe de i) puisque la négation de la condition nécessaire de ii) revient à supposer que  $dg$  et  $df$  sont étrangères sur l'intervalle où la fonction

$$\int_0^x \sqrt{\frac{df}{dg}}(s) dg(s)$$

ne serait pas inversible (on rappelle que cette fonction est croissante au sens large).

La réciproque est immédiate car la fonction proposée convient.  $\square$

#### COROLLAIRE A1

i) Il existe une fonction  $G$  vérifiant  $(E_{\beta\phi})$  si et seulement si

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{d(\beta \circ \phi^{-1})}{dx}}(s) ds$$

est inversible.

ii) Si on note  $F_n(x) = \int_0^x \sqrt{f'_n(s)} ds$ ,  $f_n = (\beta \circ \phi^{-1}) * \rho_n$  où  $\rho_n$  est la suite régularisante classique, alors  $F_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers  $F$ .

#### Démonstration

i) Comme  $\phi$  est inversible, "il existe une fonction inversible  $G$  vérifiant  $(E_{\beta\phi})$ " si et seulement si "il existe une fonction  $\tilde{G} = (G \circ \phi^{-1})$  qui vérifie  $(E_{\beta \circ \phi^{-1}, Id})$ " si et seulement si " $F$  est inversible".

ii) Comme  $f_n$  converge uniformément vers  $\beta \circ \phi^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{R}$  et comme lorsque  $x < y$  on a  $F_n(y) - F_n(x) \leq \sqrt{f_n(y) - f_n(x)} \cdot \sqrt{y - x}$ , alors pour tout intervalle borné, la suite  $F_n$  satisfait aux hypothèses du théorème d'Ascoli.

Ainsi, il existe une limite à la suite  $F_n$  pour la convergence sur tout les compacts de  $\mathbb{R}$ , et cette limite vérifie  $(E_{\beta \circ \phi^{-1}, \text{Id}})$ .

$\beta \circ \phi^{-1}$  se décompose en  $g + h$  où  $g$  est une fonction croissante absolument continue et  $h$  est une fonction continue croissante singulière. De sorte que

$$F_n(x) = \int_0^x \sqrt{g' * \rho_n(s) + dh * \rho_n(s)} ds$$

et donc

$$0 \leq F_n(x) - \int_0^x \sqrt{g' * \rho_n(s)} ds \leq \int_0^x \sqrt{dh * \rho_n(s)} ds.$$

Pour les mêmes raisons que pour la suite  $F_n$ , la suite  $\int_0^x \sqrt{dh * \rho_n(s)} ds$  converge uniformément sur tout intervalle compact de  $\mathbb{R}$  vers une fonction satisfaisant  $(E_{h, \text{Id}})$ .  $h$  étant une fonction singulière, le point i) de la proposition A1 nous permet de conclure que la limite envisagée est la fonction nulle et donc  $F_n$  converge vers la même limite que la suite  $\int_0^x \sqrt{g' * \rho_n(s)} ds$ .

Comme sur tout intervalle compact  $I$ ,  $g' * \rho_n$  converge vers  $g'$  dans  $L^1(I)$ ; pour une sous-suite, il y a convergence p.p. dans  $I$  et majoration de la suite par une fonction  $\lambda$  de  $L^1(I)$ . Ainsi,  $\sqrt{g' * \rho_n}$  converge p.p. dans  $I$  vers  $\sqrt{g'}$  en restant majoré par  $\sqrt{\lambda}$  qui est une fonction de  $L^1(I)$ . Ainsi, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que  $F_n$  converge vers  $F$ .  $\square$

## Références

- [1] ALT (H. W.) et LUCKHAUS (S.) .— *Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations*, *Mathematische Zeitschrift*, **183** (1983), pp. 311-341.
- [2] BAMBERGER (A.) .— *Etude d'une équation doublement non linéaire*, *Journal of Functional Analysis* **24** (1987), pp. 148-155.
- [3] BÉNILAN (PH.) et GARIEPY (R.) .— *Strong Solutions in  $L^1$  of Degenerate Parabolic Equations*, *J. Diff. Equ.* **119** (1995), pp. 473-502.
- [4] BETBEDER (J.-B.) et VALLET (G.) .— *La question de l'unicité pour une classe de problèmes d'évolution non linéaires intégro-différentiels*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **317**, Série I (1993), pp. 319-322.

- [5] BRÉZIS (H.) . — *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.
- [6] EVANS (L. C.) et GARIEPY (R. F.) . — *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.
- [7] GAGNEUX (G.) et MADAUNE-TORT (M.) . — *Sur la question de l'unicité pour des inéquations des milieux poreux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **314**, Série I (1992), pp. 605-608.
- [8] GAGNEUX (G.) et MADAUNE-TORT (M.) . — *Sur la dimension de Hausdorff de l'onde de choc pour des modèles non linéaires de la diffusion-convection*, Publication interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université de Pau (URA 1204), **93/4** (1993).
- [9] GAGNEUX (G.) et MADAUNE-TORT (M.) . — *Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion-convection*, C. R. Acad. Sci. Paris, **318**, Série I (1994), pp. 919-924.
- [10] GODLEWSKI (E.) et RAVIART (P. A.) . — *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Mathématiques et Applications, S.M.A.I., Ellipse, 1991.
- [11] HIDANI (A.) . — *Modélisation des écoulements diphasiques en milieux poreux à plusieurs types de roches*, Thèse de l'Université de Saint-Étienne, 1993.
- [12] LIONS (J.-L.), MAGENES (E.) . — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [13] PLOUVIER (A.) . — *Sur une classe de problèmes d'évolution quasi linéaires dégénérés*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid **8**, n° 1 (1995), pp. 197-227.
- [14] RIESZ (F.) SZ-NAGY (B.) . — *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier - Villars, Paris, 1968.
- [15] RUDIN (W.) . — *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, 1975.
- [16] VALLET (G.) . — *Sur des problèmes non linéaires provenant des transferts thermiques dans des systèmes dispersés subissant des changements de phases*, Thèse de l'Université de Pau, 1993.
- [17] VALLET (G.) . — *Analyse mathématique des transferts thermiques dans des systèmes dispersés subissant des transformations de phases*, R.A.I.R.O. *M<sup>2</sup>AN* **27**, n° 7 (1993), pp. 895-923.
- [18] VALLET (G.) . — *Existence et unicité pour une classe de problèmes d'évolution non linéaires intégral-différentiels*, Actes des III<sup>e</sup> Journées de Mathématique Pau-Zaragoza, Publicaciones des Seminario matematico (1994), pp. 443-452.
- [19] YIN (J.) . — *On the Uniqueness and Stability of BV Solutions for Nonlinear Diffusion Equations*, Com. Par. Diff. Equa., **15**, n° 12 (1990), pp. 1671-1683.
- [20] ZEIDLER (E.) . — *Non Linear Functional Analysis and its Applications, T.1 (Fixed Point Theorems)*, Springer Verlag, New-York, 1986.