ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDELOUAHAB AROUCHE

Sur la complétion de la K-théorie équivariante

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 6, nº 3 (1997), p. 377-387

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_3_377_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VI, n° 3, 1997

Sur la complétion de la K-théorie équivariante(*)

ABDELOUAHAB AROUCHE(1)

RÉSUMÉ. — Pour un foncteur M défini sur la catégorie des orbites d'un groupe de Lie compact Γ et une famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ, on calcule dans [J] la $I^M(\mathcal{F})$-complétion de la K-théorie équivariante d'un Γ-espace X comme étant égale à $K_\Gamma^*(X \times E\mathcal{F})$ où $E\mathcal{F}$ est un objet final de la catégorie homotopique des Γ-espaces $\mathcal{F}$-énumérables. D'abord, on étudie la relation entre de telles complétions pour des foncteurs M différents. Ensuite, un exemple d'un tel foncteur est donné en se basant sur le travail de [B].

ABSTRACT. — It has been shown in [J], that for a functor M defined on the category of orbits of a Lie group Γ and a family $\mathcal{F}$ of subgroups of Γ, the equivariant K-theory of a Γ-space X, completed with respect to the $I^M(\mathcal{F})$-topology, is equal to $K_\Gamma^*(X \times E\mathcal{F})$ where $E\mathcal{F}$ is a terminal object in the category of $\mathcal{F}$-numerable Γ-spaces. First, we study the relation between such completions for different functors M. Then, we give an example of such a functor based on the work of [B].

1. Famille de sous-groupes et complétion

Soit Γ un groupe de Lie compact. Un ensemble $\mathcal{F}$ de sous-groupes (fermés) est dit famille s'il est stable par sous-conjugaison.

Un Γ-espace est dit $\mathcal{F}$-énumérable s'il admet un Γ-recouvrement ouvert énumérable $\mathcal{U}$ tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe une application équivariante $U \to \Gamma/\Lambda$, pour un $\Lambda \in \mathcal{F}$. La catégorie homotopique des Γ-espaces $\mathcal{F}$-énumérables admet un objet final noté $E\mathcal{F}$.

(*) Reçu le 5 mai 1995

(1) King Saud University, College of Sciences, Department of Mathematics, P. O. Box : 2455, Riyadh 11451 (Saudi Arabia)
e-mail : F40M014@KSU.EDU.SA

Étant donnée une théorie de cohomologie équivariante h_Γ, définie sur la catégorie des Γ-espaces compacts, on définit une théorie de procohomologie $h_\Gamma[\mathcal{F}]$ sur la même catégorie et ce, pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ :

$$h_\Gamma[\mathcal{F}](X) = \left\{h_\Gamma(X \times K) \mid K \subset E\mathcal{F}\,,\ K \text{ compact}\right\}.$$

Soit $M : \mathcal{O}_\Gamma \to \mathcal{A}^*$ un foncteur contravariant défini sur la catégorie des orbites de Γ et à valeurs dans la catégorie des anneaux gradués. On notera M_Λ sa valeur sur Γ/Λ. On définit l'idéal :

$$I_\Lambda^M = \ker\{M_\Gamma \to M_\Lambda\}\,.$$

Alors la $\mathcal{F}$-topologie sur tout M_Γ-module n'est autre que la topologie $I^M(\mathcal{F})$-adique, où

$$I^M(\mathcal{F}) = \{I_\Lambda^M \mid \Lambda \in \mathcal{F}\}\,.$$

On montre (cf. [J, § 1.8]) que pour un Γ-espace compact quelconque, la projection $X \times E\mathcal{F} \to X$ définit un homomorphisme de pro-anneaux

$$p_X(\mathcal{F}) : h_\Gamma/I^M(\mathcal{F})(X) \longrightarrow h_\Gamma[\mathcal{F}](X)\,.$$

Dans la suite, on prendra pour théorie de cohomologie la K-théorie équivariante K_Γ^*. Rappelons que pour tout Γ-espace (compact) X, $K_\Gamma^*(X) = K_\Gamma^0(X) \oplus K_\Gamma^1(X)$ où $K_\Gamma^0(X)$ est le groupe de Grothendieck des Γ-fibrés vectoriels complexes au-dessus de X et où $K_\Gamma^1(X)$ est défini à partir de Γ-fibrés au-dessus de la suspension de X. $K_\Gamma^*(X)$ est un anneau $\mathbb{Z}_2$-gradué (cf. [S1]).

Soit Z un Γ-espace compact fixé et $\Lambda \subset \Gamma$ un sous-groupe. Considérons la catégorie $\mathcal{C}_Z^\Lambda$ dont les objets sont Λ-espaces X munis d'une Λ-application $X \xrightarrow{\sigma} Z$. Un morphisme entre deux objets (X,σ) et (Y,τ) est une Λ-application $X \xrightarrow{f} Y$ telle que $\sigma = \tau \circ f$. Par exemple, si (X,σ) est un objet de $\mathcal{C}_Z^\Lambda$, alors pour tout Λ-espace Y, $(X \times Y, \sigma \circ \mathrm{pr}_1)$ est aussi un objet de $\mathcal{C}_Z^\Lambda$ et $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ est un morphisme dans $\mathcal{C}_Z^\Lambda$. Un objet de $\mathcal{C}_Z^\Gamma$ peut être considéré comme objet de $\mathcal{C}_Z^\Lambda$ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$.

Si l'on pose

$$M_\Lambda = K_\Lambda^*(Z)\,,$$

alors K_Γ^* est un module sur M $(= M(Z))$, c'est-à-dire pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ et tout objet X de $\mathcal{C}_Z^\Lambda$, $K_\Lambda^*(X)$ est un M_Λ-module de telle sorte que la condition de compatibilité suivante soit vérifiée.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}_Z^\Gamma$ et tout sous-groupe Λ de Γ, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M_\Gamma \times K_\Gamma^*(X) & \longrightarrow & K_\Gamma^*(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\Lambda \times K_\Lambda^*(X) & \longrightarrow & K_\Lambda^*(X) \end{array}$$

Supposons Z tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées, pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ :

(N) l'anneau M_Γ est noethérien et pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, l'homomorphisme $M_\Gamma \to M_\Lambda$ fait de M_Λ un M_Γ-module de type fini ;

($R_\mathcal{F}$) pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, la $\mathcal{F}$-topologie définie sur M_Λ par la restriction $M_\Gamma \to M_\Lambda$ coïncide avec la $\mathcal{F} \cap \Lambda$-topologie sur M_Λ ; c'est-à-dire celle définie par les idéaux

$$\{\ker(M_\Lambda \to M_\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{F} \cap \Lambda\}.$$

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1.— *Soit X un objet de $\mathcal{C}_Z^\Gamma(X)$ tel que $K_\Lambda^*(X)$ soit un M_Λ-module de type fini, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$. Alors, pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ, l'application*

$$p_X(\mathcal{F}) : (K_\Gamma^*/I^M(\mathcal{F}))(X) \longrightarrow K_\Gamma^*[\mathcal{F}](X)$$

est un isomorphisme de pro-anneaux.

Preuve.— D'après [J, § 2.2], il suffit de montrer que, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, le morphisme $p_X(\mathcal{P}_\Lambda)$ est un isomorphisme, où $\mathcal{P}_\Lambda$ est la famille des sous-groupes propres de Λ. À cette fin, pour un sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, considérons l'ensemble $\mathcal{V}$ de toutes les représentations de Λ sans facteur trivial. Alors $\mathcal{V}$ définit la famille de sous-groupes de Λ :

$$\mathcal{F}_\mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \{\Delta \leq \Lambda \mid V^\Delta \neq \{0\}\}.$$

La preuve du théorème 1.1 est contenue dans les paragraphes 1.2 à 1.5.

LEMME 1.2.— $\mathcal{P}_\Lambda = \mathcal{F}_\mathcal{V}$.

Preuve.— Soit $\Delta \in \mathcal{P}_\Lambda$. Il existe une représentation V de Λ et un point v de V tels que $\Delta = \Lambda_v$ (cf. [D, § I.5.5]). Ceci entraîne que $v \neq 0$, car $\Lambda_0 = \Lambda$ et Δ est propre. D'où, $V^\Delta \neq 0$. On peut supposer V sans facteur trivial, quitte à l'en débarrasser. D'où, $\Delta \in \mathcal{F}_\mathcal{V}$. Réciproquement, soit $\Delta \in \mathcal{F}_\mathcal{V}$. Il existe donc $V \in \mathcal{V}$ tel que $V^\Delta \neq 0$. Si $\Delta = \Lambda$, V aurait donc un facteur trivial, d'où la contradiction. Donc, $\Delta \in \mathcal{P}_\Lambda$. □

PROPOSITION 1.3.— *La topologie définie par la famille d'idéaux principaux $\{e(V) \cdot K^*_\Lambda(Z) \mid V \in \mathcal{V}\}$ sur $K^*_\Lambda(Z)$, où $e(V)$ est la classe d'Euler de V, coïncide avec la $\mathcal{F}_\mathcal{V}$-topologie.*

Preuve.— Voir [A] où l'on a une généralisation de [J, § 3.1].

LEMME 1.4.— *Si $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, alors*

$$E(\mathcal{F}_\mathcal{V}) = \lim_n S\Big(\overbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1} \oplus \cdots \oplus \overbrace{V_n \oplus \cdots \oplus V_n}\Big).$$

Preuve.— Voir [J].

THÉORÈME 1.5.— *Dans les conditions du théorème 1.1,*

$$p_X(\mathcal{F}_\mathcal{V}) : (K^*_\Lambda / I^M(\mathcal{F}_\mathcal{V}))(X) \longrightarrow K^*_\Lambda[\mathcal{F}_\mathcal{V}](X)$$

est un isomorphisme de pro-anneaux.

Preuve.— (d'après [J]) D'après le lemme précédent,

$$K^*_\Lambda[\mathcal{F}_\mathcal{V}](X) = \{K^*_\Lambda(X \times SV^n) \mid n \in \mathbb{N}^*\},$$

où

$$V^n := \overbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1} \oplus \cdots \oplus \overbrace{V_n \oplus \cdots \oplus V_n}.$$

La suite exacte de Gysin,

$$\cdots \xrightarrow{\delta} K^*_\Lambda(X) \xrightarrow{e(V^n)} K^*_\Lambda(X) \xrightarrow{\pi^*} K^*_\Lambda(SV^n \times X) \xrightarrow{\delta} \cdots,$$

donne lieu à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow K/e(V^n) \cdot K \longrightarrow K^*_\Lambda(SV^n \times X) \longrightarrow {}_{e(V^n)}K \longrightarrow 0$$

où $K := K^*_\Lambda(X)$ et ${}_{e(V^n)}K := \{x \in K : e(V^n)x = 0\}$.

Pour prouver le théorème, on doit trouver, pour chaque n, un entier k et un morphisme $\beta_n : K^*_\Lambda(SV^{n+k} \times X) \to K/e(V^n) \cdot K$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
K/e(V^{n+k}) \cdot K \arrow[r] \arrow[d] & K^*_\Lambda(SV^{n+k} \times X) \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\beta_n"'] \\
K/e(V^n) \cdot K \arrow[r] & K^*_\Lambda(SV^n \times X)
\end{tikzcd}$$

Or on a le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & K/e(V^{n+k}) \cdot K \arrow[r] \arrow[d] & K^*_\Lambda(SV^{n+k} \times X) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{e(V^{n+k})}K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\times e(V^k)"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K/e(V^n) \cdot K \arrow[r] & K^*_\Lambda/(SV^n \times X) \arrow[r] & {}_{e(V^n)}K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

K étant de type fini sur $K^*_\Lambda(Z)$, on peut trouver un rang k tel que ${}_{e(V^k)}K = {}_{e(V^{n+k})}K$ pour tout n. Donc $e(V^k)$ annule ${}_{e(V^{n+k})}K$, d'où l'existence de β_n. □

COROLLAIRE 1.6.— *Si, en plus des conditions (N) et ($R_\mathcal{F}$), Z est tel que M_Λ soit noethérien (comme anneau), pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, alors $p_Z(\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ. C'est le cas, par exemple, si Z a un point fixe et vérifie : M_Λ est un $R(\Lambda)$-module de type fini, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$.*

COROLLAIRE 1.7.— *Soit Z un Γ-espace compact tel que M vérifie les conditions (N) et ($R_\mathcal{F}$). Supposons que Z admet un point fixe noté $+$. Alors $p_+(\mathcal{F})$ est un isomorphisme pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ.*

Considérons le foncteur $L := M(\text{point})$. Dans [J], on montre que L vérifie les conditions (N) et $(R_\mathcal{F})$ pour toute $\mathcal{F}$. On a alors (cf. [J]) le théorème 1.1 où l'on remplace M_Λ par $R(\Lambda)$, anneau des représentations complexes de Λ. D'où le résultat qui suit.

PROPOSITION 1.8.— *Soit Z un Γ-espace compact tel que $M = M(Z)$ vérifie les conditions (N) et $(R_{\mathcal{F}})$ pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ. Si un objet X de $\mathcal{C}_Z^\Gamma$ est tel que $K_\Lambda^*(X)$ est de type fini à la fois sur M_Λ et L_Λ, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, alors, pour toute famille $\mathcal{F}$, on a un isomorphisme de pro-systèmes :*

$$\big(K_\Gamma^*/I^M(\mathcal{F})\big)(X) \cong \big(K_\Gamma^*/I^L(\mathcal{F})\big)(X)\,.$$

Si Z est muni d'un point de base et si M_Λ est de type fini sur L_Λ, $\forall\ \Lambda \subset \Gamma$, il suffit alors que $K_\Lambda^*(X)$ soit de type fini sur L_Λ, $\forall\ \Lambda \subset \Gamma$. Dans ce dernier cas, on a, en particulier :

$$\big(K_\Gamma^*/I^M(\mathcal{F})\big)(Z) \cong \big(K_\Gamma^*/I^L(\mathcal{F})\big)(Z)$$

et

$$R(\Gamma)/I^M(\mathcal{F}) \cong R(\Gamma)/I^L(\mathcal{F})\,.$$

Remarque.— Examinons de près le dernier cas : si Z est muni d'un point de base, alors L_Λ est un sous-anneau de M_Λ, $\forall\ \Lambda \subset \Gamma$. On en déduit que

$$I_\Lambda^L \subset I_\Lambda^M\,, \quad \forall\, \Lambda \subset \Gamma\,.$$

En d'autres termes, la topologie $I^L(\mathcal{F})$-adique sur tout M_Γ-module est plus fine que la $I^M(\mathcal{F})$-adique . La proposition 1.8 affirme qu'elles sont en fait identiques, car les deux sont aussi définies par la famille d'idéaux (cf. [AS, § 2.3])

$$\big\{J_K = \ker\big(K_\Gamma^*(X) \longrightarrow K_\Gamma^*(X \times K)\big)\big\}\ .$$

COROLLAIRE 1.9.— *Soit Z un Γ-espace compact muni d'un point de base tel que $K_\Lambda^*(Z)$ soit un $R(\Lambda)$-module de type fini pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$. Supposons que le foncteur $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$, $\forall\ \mathcal{F}$. Alors, si X est un Γ-espace compact tel que $K_\Lambda^*(X)$ soit de type fini sur $R(\Lambda)$, pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$, on a un isomorphisme :*

$$K_\Gamma^*(X)_{\hat{I}^M(\mathcal{F})} \cong K_\Gamma^*(X)_{\hat{I}^L(\mathcal{F})}\,,$$

pour toute famille $\mathcal{F}$ de sous-groupes de Γ. En particulier, on a les deux isomorphismes :

$$K_\Gamma^*(Z)_{\hat{I}^M(\mathcal{F})} \cong K_\Gamma^*(Z)_{\hat{I}^L(\mathcal{F})} \quad et \quad R(\Gamma)_{\hat{I}^M(\mathcal{F})} \cong R(\Gamma)_{\hat{I}^L(\mathcal{F})}\,,$$

où $\hat{I}^M(\mathcal{F})$ (resp. $\hat{I}^L(\mathcal{F})$) désigne la complétion par rapport à la topologie $I^M(\mathcal{F})$-adique (resp. $I^L(\mathcal{F})$-adique).

Preuve.— La condition (N) est automatique (cf. [AM, § 7.2]), et un isomorphisme entre pro-systèmes entraîne un isomorphisme entre limites projectives.

2. Étude des conditions (N) et $(R_{\mathcal{F}})$

Soit Z un Γ espace compact muni d'un point de base.

La condition (N) est satisfaite si Z est une variété différentiable sur laquelle Γ agit différentiablement. Car alors, $K_\Lambda^*(Z)$ est de type fini sur le sous-anneau noethérien $R(\Lambda)$ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ [S1, § 5.4].

Un autre cas où la condition (N) est satisfaite est celui d'un espace compact Z sur lequel Γ opère trivialement et tel que $K^*(Z)$ soit noethérien. En effet, dans ce cas $K_\Lambda^*(Z) \cong K^*(Z) \otimes R(\Lambda)$ pour tout sous-groupe $\Lambda \subset \Gamma$ [S1, § 2.2]. Comme $R(\Gamma)$ est de type fini comme $\mathbb{Z}$-algèbre [S2, § 3.3], $K_\Gamma^*(Z)$ est de type fini comme $K^*(Z)$-algèbre et est donc noethérien [AM, § 7.7]. De plus, $R(\Lambda)$ est un $R(\Gamma)$-module de type fini pour tout $\Lambda \leq \Gamma$ [S2, § 3.2], donc la restriction $M_\Gamma \to M_\Lambda$ fait de ce dernier un M_Γ-module de type fini.

Hodgkin a construit dans [H] une suite spectrale

$$E_2^{**} = \mathrm{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}\big(K_\Gamma^*(X),\ K_\Gamma^*(Y)\big) \Longrightarrow F_\Gamma^*(X,Y)\,,$$

et a montré que dans certains cas, par exemple quand $\pi_1(\Gamma)$ est sans torsion et X ou Y est un Γ-espace libre, $F_\Gamma^*(X,Y) = F_\Gamma^*(X \times Y)$. Soit donc Γ un groupe de Lie compact tel que $\pi_1(\Gamma)$ soit sans torsion ; si X et un Γ-espace libre, alors, pour tout sous-groupe $\Lambda \leq \Gamma$, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{**} = \mathrm{Tor}_{R(\Gamma)}^{**}\big(K_\Gamma^*(X), R(\Lambda)\big) \Longrightarrow K_\Lambda^*(X)\,.$$

Sur ce, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1.— *Si $\pi_1(\Gamma)$ est sans torsion et si X est un Γ-espace libre tel que $K_\Gamma^*(X)$ soit de type fini sur $R(\Gamma)$, alors X vérifie la condition (N).*

Preuve.— Comme la suite spectrale

$$E_2^{**} = \mathrm{Tor}^{**}_{R(\Gamma)}\big(K^*_\Gamma(X), R(\Lambda)\big) \Longrightarrow K^*_\Lambda(X)$$

est convergente, il suffit de voir que $\mathrm{Tor}^{**}_{R(\Gamma)}\big(K^*_\Gamma(X), R(\Lambda)\big)$ est de type fini sur $R(\Gamma)$, car $R(\Gamma)$ est noethérien. Or $R(\Lambda)$ est de type fini sur $R(\Gamma)$ d'après [S2, § 3.2], et $K^*_\Gamma(X)$ l'est par hypothèse. On conclut grâce à [R, § 9.21]. □

PROPOSITION 2.2.— *Soit Z un Γ-espace compact muni d'un point de base. Si,*

$$\forall\, \Lambda \le \Gamma\,, \quad \ker\big(K^*_\Lambda(Z) \longrightarrow R(\Lambda)\big)$$

est formé d'éléments nilpotents, alors $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$.

Preuve.— D'après [G, sect. I, § 1.2.7], on a une bijection :

$$\mathrm{Spec}\, M_\Lambda \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R(\Lambda)\,, \quad \forall\, \Lambda \le \Gamma\,.$$

On procède alors comme dans [J, § 4.3].

COROLLAIRE 2.3.— *Soit Z un Γ-espace trivial (compact) connexe. Alors $M = M(Z)$ vérifie la condition $(R_{\mathcal{F}})$.*

Preuve.— Il suffit de montrer que

$$\forall\, \Lambda \le \Gamma\,, \quad \ker\big(K^*_\Lambda(Z) \longrightarrow R(\Lambda)\big)$$

est formé d'éléments nilpotents. Soit donc $\zeta \in K^*_\Lambda(X)$ tel que $\zeta_+ = 0$. L'ensemble $\{z \in Z \mid \zeta_z = 0\}$ est à la fois ouvert et fermé, et est donc égal à Z. Finalement, $\zeta \in K^*_{\Lambda,1}(Z)$ dont les éléments sont nilpotents [S1, § 5.1].

De façon générale, pour qu'un Γ-espace Z tel que dans la proposition 2.1 vérifie :

$$\forall\, \Lambda \le \Gamma\,, \quad \ker\big(K^*_\Lambda(Z) \longrightarrow R(\Lambda)\big)$$

est formé d'éléments nilpotents (et est donc nilpotent car $K^*_\Lambda(Z)$ est devenu noethérien), il suffit d'avoir la condition géométrique : pour tout $\zeta \in K^*_\Lambda(Z)$ et pour tout $z \in Z$, il existe un ouvert U_z tel que pour tout $z' \in U_z$, $\zeta_{z'} = \zeta_z$; ce qui rend l'application $\zeta : Z \to \bigcup_{z\in Z} R(\Lambda_z)$ continue et localement constante. La connexité de Z achève alors la preuve. La condition géométrique est en particulier réalisée si Z est Γ-trivial, car alors $\Lambda_{z'} = \Lambda_z$ sur un U_z ; la proposition [S1, § 1.2] nous permet de conclure. □

Dans son article [B], A. Bojanowska a généralisé aux anneaux de la K-théorie équivariante la notion de support d'un idéal premier de l'anneau de représentation, qui a été inaugurée par [S2].

DÉFINITION 2.4.— *Soit C la famille des sous-groupes cycliques de Γ. Soit X un Γ-espace. On définit la catégorie $C(\Gamma, X)$ comme suit : les objets de $C(\Gamma, X)$ sont les paires (Σ, c) où $\Sigma \in C$ et $c \subset X^\Sigma \neq \emptyset$ est une composante connexe.*

$$\mathrm{Mor}\big((\Sigma, c)\,,\,(\Sigma', c')\big) = \big\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\Sigma\gamma^{-1} \subset \Sigma'\,,\ \gamma(c) \supset c'\big\}/\sim\,,$$

où $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement si pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \gamma'\sigma\gamma'^{-1}$. On notera $[\gamma]$ le morphisme défini par γ.

DÉFINITION 2.5.— *Soit X un Γ-espace, et soit (Σ, c) un objet de $C(\Gamma, X)$.*

On note $i_{\Sigma,c}$: $\mathrm{Spec}\,R(\Sigma) \to \mathrm{Spec}\,K^*_\Gamma(X)$ l'application induite par l'inclusion de l'orbite Γ/Σ dans X. Soit $p \in \mathrm{Spec}\,K^*_\Gamma(X)$. On dit que l'objet (Σ, c) de $C(\Gamma, X)$ est un support de l'idéal p si :

(a) il existe un idéal $q \in \mathrm{Spec}\,R(\Sigma)$ tel que $i_{\Sigma,c}(q) = p$;

(b) il n'existe pas un sous-groupe propre $\Sigma_1 \subset \Sigma$ et un idéal $q_1 \in \mathrm{Spec}\,R(\Sigma_1)$ tel que $i_{\Sigma_1,c_1}(q_1) = p$ et $c_1 = c$.

La condition (b) étant équivalente à la suivante [B, § 4.3] :

(b') il n'existe pas de sous-groupe $\Sigma_1 \subset \Sigma$, ni un idéal $q_1 \in \mathrm{Spec}\,R(\Sigma_1)$ tel que q soit l'image de q_1 par l'application sur les spectres induite par l'inclusion $\Sigma_1 \subset \Sigma$.

On a alors le théorème suivant (cf. [B, § 4.4]).

THÉORÈME 2.6.— *Soit X un Γ-(ENR). Alors :*

(a) chaque idéal premier de $K^*_\Gamma(X)$ a son support déterminé à un isomorphisme près dans $C(\Gamma, X)$;

(b) si (Σ, c) est une support de l'idéal $p \in \mathrm{Spec}\,K^*_\Gamma(X)$ et q, $q' \in \mathrm{Spec}\,R(\Sigma)$ sont tels que $i_{\Sigma,c}(q) = i_{\Sigma,c}(q') = p$, alors il existe un morphisme $[\gamma] : (\Sigma, c) \to (\Sigma, c)$ tel que $[\gamma]_*(q) = q'$.

Soit X un Γ-(ENR). Considérons, pour un sous-groupe Λ de Γ, le morphisme de restriction

$$K_\Gamma^*(X) \xrightarrow{r} K_\Lambda^*(X)$$

qui induit l'application

$$r^* : \operatorname{Spec} K_\Lambda^*(X) \longrightarrow \operatorname{Spec} K_\Gamma^*(X) .$$

Alors on a la proposition suivante .

PROPOSITION 2.7

(a) Soit $(P, Q) \in \operatorname{Spec} K_\Lambda^*(X) \times \operatorname{Spec} K_\Gamma^*(X)$ *tel que* $Q = r^*(P)$ *; soient* (Σ', c') *et* (Σ'', c'') *leurs supports respectifs. Alors,* $(\Sigma') = (\Sigma'')$*, où* (Σ') *désigne la classe de conjugaison de* Σ'*.*

(b) Sous la condition (N), si $Q \in \operatorname{Spec} K_\Gamma^*(X)$ *contient le noyau*

$$I_\Lambda^\Gamma = \ker\{r : K_\Gamma^*(X) \to K_\Lambda^*(X)\} ,$$

alors il existe un idéal $P \in \operatorname{Spec} K_\Lambda^*(X)$ *tel que* $Q = r^*(P)$*.*

Preuve

(a) Il existe $R' \in \operatorname{Spec} R(\Sigma')$ tel que $P = i_{\Sigma',c'}^\Lambda(R')$ où $i_{\Sigma',c'}^\Lambda$: $\operatorname{Spec} R(\Sigma') \to \operatorname{Spec} K_\Lambda(X)$. D'où $i_{\Sigma',c'}^\Gamma(R') = r^*(P) = Q$. En outre, il existe $R'' \in \operatorname{Spec} R(\Sigma'')$ tel que $i_{\Sigma'',c''}^\Gamma(R'') = Q$. D'après [B, § 4.2], il existe (Σ, c), objet de $C(\Gamma, X)$, et $R \in \operatorname{Spec} R(\Sigma)$ et aussi des morphismes

$$[\gamma'] : (\Sigma, c) \longrightarrow (\Sigma', c') , \quad [\gamma''] : (\Sigma, c) \longrightarrow (\Sigma'', c'')$$

tels que $[\gamma']_*(R) = R'$ et $[\gamma'']_*(R) = R''$. En particulier, on a

$$\gamma'\Sigma\gamma'^{-1} \leq \Sigma' , \quad \gamma''\Sigma\gamma''^{-1} \leq \Sigma'' .$$

Notons $\Sigma_1' = \gamma'\Sigma'^{-1} \leq \Sigma'$, alors il existe $R_1' \in \operatorname{Spec} R(\Sigma_1')$ tel que R' soit l'image de R_1' par l'application induite sur les spectres par l'inclusion $\Sigma_1' \subset \Sigma'$. D'après la proposition 2.5 (b'), on conclut que $(\Sigma) = (\Sigma')$. De la même façon, on montre que $(\Sigma) = (\Sigma'')$.

(b) Comme Q contient I_Λ^Γ, il peut être identifié à un élément de $\operatorname{Spec}\big(K_\Gamma^*(X)/I_\Lambda^\Gamma\big)$. Or $\bar{r} : K_\Gamma^*(X)/I_\Lambda^\Gamma \to K_\Lambda^*(X)$ est un monomorphisme.

De plus, $K^*_\Lambda(X)$ est de type fini sur $K^*_\Gamma(X)/I^\Gamma_\Lambda$ d'après la condition (N). Le théorème de Cohen-Seidenberg [Bo, § 5.2.1.1] assure donc la surjectivité de l'application $\bar{r}^*$ sur les spectres. □

Suivant les méthodes de [J, § 4.3], on montre le théorème suivant dont la proposition 2.7 est un ingrédient important.

THÉORÈME 2.8.— *Soit X un* Γ-(ENR). *Si le foncteur $M_\Lambda := K^*_\Lambda(X)$ satisfait à la condition (N), alors il satisfait aussi à la condition $(R_\mathcal{F})$.*

Références

[A] AROUCHE (A.) .— *K-théorie équivariante et théorie de complétion pour l'espace classifiant associé au lissage des actions continues d'un groupe de Lie compact*, Thèse, Université de Nantes (1994).

[AM] ATIYAH (M. F.) et MACDONALD (I. G.) .— *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

[AS] ATIYAH (M. F.) et SEGAL (G. B.) .— *Equivariant K-theory and completion*, J. Diff. Geom. **3** (1969), pp. 1-18.

[B] BOJANOWSKA (A.) .— *The spectrum of equivariant K-theory*, Math. Zeitschrift **183** (1983), pp. 1-19.

[Bo] BOURBAKI (N.) .— *Algèbre commutative*, Chap. 5-6, Paris, Hermann, 1964.

[D] TOM DIECK (T.) .— *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin – New-York (1987).

[G] GROTHENDIECK (A.) .— *Eléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES **4** (1960).

[H] HODGKIN (L.) .— *The equivariant Künneth theorem in K-theory*, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, **496** (1976), pp. 1-100.

[J] JACKOWSKI (S.) .— *Families of subgroups and completion*, J. Pure Appl. Algebra **37** (1985), pp. 167-179.

[R] ROTMAN (J. J.) .— *An introduction to homological algebra*, Academic Press, New-York, 1979.

[S1] SEGAL (G. B.) .— *Equivariant K-theory*, Publ. Math. IHES **34** (1968).

[S2] SEGAL (G. B.) .— *The representation ring for a compact Lie group*, Publ. Math. IHES **34** (1968).