

DIDIER ARNAL

BÉCHIR DALI

**Déformations polarisées d'algèbres sur les orbites
coadjointes des groupes exponentiels**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 9, n° 1
(2000), p. 31-54

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_1_31_0

© Université Paul Sabatier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Déformations polarisées d'algèbres sur les orbites coadjointes des groupes exponentiels (*)

DIDIER ARNAL ⁽¹⁾ ET BÉCHIR DALI ⁽²⁾

RÉSUMÉ. — On considère un groupe de Lie exponentiel G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et une orbite coadjointe \mathcal{O} d'un point ξ de \mathfrak{g}^* , dual de \mathfrak{g} , munie d'une carte de Darboux globale (p_i, q_i) . On désigne par \mathcal{A} l'ensemble des restrictions à \mathcal{O} des fonctions polynomiales complexes sur \mathfrak{g}^* qu'on identifie à un sous espace d'une complétion $\tilde{\mathcal{A}}_*$ de $\mathbb{C}[p_i, q_i]$ et on montre que la complétion de l'ensemble des fonctions quantifiables contient les générateurs p_i et q_i . Enfin on montre que deux cartes globales (p_i, q_i) et (p'_i, q'_i) de l'orbite \mathcal{O} , associées à une même polarisation \mathfrak{h} définissent la même complétion $\tilde{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} et deux produits star \star et \star' équivalents sur $\tilde{\mathcal{A}}$.

ABSTRACT. — Let G be an exponential Lie group of Lie algebra \mathfrak{g} and \mathcal{O} a coadjoint orbit of ξ in \mathfrak{g}^* , the dual of \mathfrak{g} , with global Darboux coordinates (p_i, q_i) . We define \mathcal{A} as the set of the restrictions on \mathcal{O} of complex polynomial functions on \mathfrak{g}^* , which we identify with a subspace of a completion $\tilde{\mathcal{A}}_*$ of $\mathbb{C}[p_i, q_i]$, we prove that the completion of the subset of quantizable functions on \mathcal{O} contains the generators p_i and q_i . Finally we prove that two global coordinates (p_i, q_i) and (p'_i, q'_i) , associated to the same polarisation \mathfrak{h} define the same completion $\tilde{\mathcal{A}}$ of \mathcal{A} and two equivalents star products \star and \star' .

(*) Reçu le 2 juin 1999, accepté le 21 mars 2000

(1) Laboratoire MMAS Université de Metz, Ile du Saulcy 57045 Metz CEDEX (France)
e-mail: arnal@poncelet.sciences.univ-metz.fr

(2) Département de Mathématiques de la faculté des Sciences de Sfax 3038 SFAX (Tunisie)

0. Introduction

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente, $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions polynomiales à valeurs complexes définies sur \mathfrak{g}^* , ξ un point de \mathfrak{g}^* et $\mathcal{O} = G \cdot \xi$ l'orbite de ξ sous l'action coadjointe du groupe de Lie connexe et simplement connexe G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Notons \mathcal{A} l'ensemble des restrictions à \mathcal{O} des fonctions de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Pour retrouver la représentation unitaire π de G associée à \mathcal{O} , on peut utiliser la théorie des stars produits. Dans ce contexte, on commence par exhiber des cartes de Darboux globales de \mathcal{O} (dites cartes adaptées) :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^{2k} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (p, q) &\longmapsto \xi = \Psi(p, q), \end{aligned}$$

telles que pour chaque X de \mathfrak{g} , la fonction $\tilde{X}(p, q) = \langle \Psi(p, q), X \rangle$, soit de la forme

$$\tilde{X}(p, q) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q),$$

où $\alpha_j(q) \in \mathbb{R}[q_{j+1}, \dots, q_k]$, $j = 0, 1, \dots, k$. Dans une telle carte adaptée, on peut définir le produit \star de Moyal. Il est facile de voir que \mathcal{A} coïncide avec l'algèbre $\mathbb{C}[p, q]$ des fonctions polynomiales en les variables p_j et q_j et que le produit de Moyal:

$$u \star v = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i)^n} \frac{1}{n!} P^n(u, v), \quad u, v \in \mathbb{C}[p, q],$$

est convergent (c'est une somme finie) et laisse \mathcal{A} stable. Bien entendu l'espace \mathcal{A} ne dépend pas du choix de la carte, mais le produit de Moyal en dépend. La carte Ψ est en fait associée à une polarisation algébrique \mathfrak{h} de \mathfrak{g} en $\xi^0 = \Psi(0, 0)$,

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}, \text{ tel que } \tilde{X}(p, 0) = \tilde{X}(0, 0)\}.$$

A cette polarisation algébrique, on peut associer une polarisation géométrique \mathcal{F} définie sur \mathcal{O} par

$$\mathcal{F}_{\xi^0} = \{X_{\xi^0}^-, X \in \mathfrak{h}\}.$$

On impose que $Ad(g)\mathcal{F}_{\xi^0} = \mathcal{F}_{Ad^*(g)\xi^0}$, donc $\mathcal{F} = Vec(\frac{\partial}{\partial p_j})$, et on peut donc voir \mathcal{O} comme un fibré sur G/H .

On dira qu'une fonction u de \mathcal{A} est polarisée si le champ de vecteurs hamiltonien X_u sur \mathcal{O} est dans \mathcal{F} , l'ensemble des fonctions polarisées est, dans notre carte, $\mathcal{A}_o = \mathbb{C}[q]$. On dira qu'une fonction u de \mathcal{A} est quantifiable

si le champ de vecteurs hamiltonien X_u vérifie: $[X_u, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}$. L'espace de ces fonctions est $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}[q]_1[p]$, c'est à dire l'espace des fonctions polynomiales affines en p .

Le but de cet article est de généraliser cette construction au cas des groupes exponentiels. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie exponentielle, chaque orbite coadjointe \mathcal{O} de \mathfrak{g} admet des cartes de Darboux globales adaptées:

$$\Psi : \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathcal{O},$$

telles que pour chaque X de \mathfrak{g} , la fonction \tilde{X} est de la forme

$$\tilde{X}(p, q) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(q)p_j + \alpha_0(q),$$

où $q \longmapsto \alpha_j(q)$ sont C^∞ sur \mathbb{R}^{2k} , $j = 0, 1, \dots, k$, prolongeables en des fonctions entières sur \mathbb{C}^k , à croissance au plus exponentielle. Ces fonctions ne sont pas en général polynomiales. Si l'on veut utiliser une version convergente du produit de Moyal, on doit compléter l'espace $\mathbb{C}[p, q]$. Une telle complétion $\overline{\mathcal{A}}$ pour une distance d_* a été définie dans [4]. Le produit de Moyal est continu sur \mathcal{A} et s'étend à $\overline{\mathcal{A}}$, de plus pour tout X de \mathfrak{g} , \tilde{X} est dans $\overline{\mathcal{A}}$. Puisque cette complétion brise la symétrie entre les variables p et q , nous dirons qu'il s'agit d'une polarisation topologique de l'orbite. Dans cet article, nous montrons que $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est dense dans $\overline{\mathcal{A}}$ et que $\overline{\mathcal{A}}$ ne dépend pas du choix de la polarisation algébrique \mathfrak{h} , une autre paramétrisation associée à la même algèbre \mathfrak{h} donne le même espace. Nous montrons aussi que si l'espace $\overline{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}_0$, fermeture de celui des fonctions polynomiales polarisées dans $\overline{\mathcal{A}}$, ne contient pas en général toutes les séries formelles en q_j , par contre l'espace des fonctions quantifiables, $\overline{\mathcal{S}(\mathfrak{g})}_1$, fermeture de celui des fonctions polynomiales affines en p dans $\overline{\mathcal{A}}$ coïncide avec l'espace $\mathbb{C}[[q]]_1[p]$, des fonctions affines en p ayant pour coefficients des séries formelles en q , ce qui permet de reconstruire la représentation de G associée à \mathcal{O} .

1. Généralités

1.1. Orbites coadjointes

Soient G un groupe de Lie réel connexe et simplement connexe de dimension n , \mathfrak{g} son algèbre de Lie (réelle) et \mathfrak{g}^* le dual réel de \mathfrak{g} . On suppose que G est exponentiel (on dira aussi que \mathfrak{g} est exponentielle), c'est à dire que l'application exponentielle de \mathfrak{g} vers G est injective. Alors on sait ([5] chap 1) que \mathfrak{g} est résoluble, que ses racines sont toutes de la forme: $(1 + i\alpha)\phi(X)$

où ϕ appartient à \mathfrak{g}^* et α à \mathbb{R} , et que l'application exponentielle est un difféomorphisme de \mathfrak{g} sur G .

Le groupe G agit sur \mathfrak{g}^* par la représentation coadjointe:

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (x, \xi) &\longmapsto x.\xi = \xi \circ Ad(x^{-1}) \end{aligned}$$

ou encore:

$$\langle x.\xi, X \rangle = \langle \xi, Ad(x^{-1})X \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*, x \in G, X \in \mathfrak{g},$$

où \langle, \rangle est le crochet de dualité entre \mathfrak{g}^* et \mathfrak{g} . La différentielle de la représentation coadjointe est la représentation de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}^* définie par:

$$\langle X.\xi, Y \rangle = - \langle \xi, [X, Y] \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

\mathfrak{g}^* est muni canoniquement d'une structure de variété de Poisson définie par le 2-tenseur Λ :

$$\Lambda_\xi(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*, X, Y \in \mathfrak{g}^*.$$

Soit $\mathcal{O} = G.\xi^0$ l'orbite coadjointe d'un point ξ^0 de \mathfrak{g}^* . La structure \mathcal{C}^∞ de \mathcal{O} est celle de $G/G(\xi^0)$ où $G(\xi^0)$ est le stabilisateur de ξ^0 dans G . La 2-forme $\omega_{\mathcal{O}}$ déduite de la restriction de Λ définit sur \mathcal{O} une structure de variété symplectique:

$$(\omega_{\mathcal{O}})_\xi(X^-, Y^-) = \langle \xi, [X, Y] \rangle, \quad \xi \in \mathcal{O}, X, Y \in \mathfrak{g},$$

où X^- désigne le champ de vecteurs fondamental associé à X , défini par:

$$(X^- f)(\xi) = \frac{d}{dt} f(\exp - tX.\xi)|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}), \xi \in \mathcal{O},$$

ou encore $X_\xi^- = \xi \circ ad(X)$. A tout élément f de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$, on associe le champ de vecteurs X_f défini sur \mathcal{O} par

$$(\omega_{\mathcal{O}})(\cdot, X_f) = df$$

c'est à dire

$$(\omega_{\mathcal{O}})_\xi(X, (X_f)_\xi) = df_\xi(X) = X.f, \quad \xi \in \mathcal{O}, X \in T_\xi \mathcal{O}.$$

Le crochet de Poisson sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ est alors défini par

$$\{f, g\} = (\omega_{\mathcal{O}})(X_f, X_g), \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}).$$

Pour tout X dans \mathfrak{g} , on définit sur \mathcal{O} la fonction \tilde{X} par

$$\tilde{X}(\eta) = \langle \eta, X \rangle, \quad \eta \in \mathcal{O},$$

et on vérifie que $X^- = X_{\tilde{X}}$ et que $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

1.2. Polarisation algébrique

DÉFINITION. — Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$, une polarisation algébrique réelle en ξ est une sous-algèbre réelle \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telle que le sous-espace vectoriel sous jacent soit totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire:

$$(X, Y) \longmapsto \langle \xi, [X, Y] \rangle .$$

On dit qu'une polarisation \mathfrak{h} vérifie la condition de Pukanszky si:

$$H.\xi = \xi + \mathfrak{h}^\perp ,$$

où H est le sous groupe analytique de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , c'est à dire $H = \exp \mathfrak{h}$.

1.3. Produits \star

DÉFINITION. — Un produit star sur une variété symplectique (M, ω) est une application bilinéaire \star :

$$\begin{aligned} N \times N &\longrightarrow N[[\nu]] \\ (u, v) &\longmapsto u \star v = \sum_{r=0}^{+\infty} \nu^r C_r(u, v) \end{aligned}$$

où $N[[\nu]]$ est l'espace des séries formelles en ν ($\nu \in \mathbb{C}$), à coefficients dans $N = C^\infty(M)$, et les C_r sont des opérateurs bidifférentiels vérifiant pour tout (u, v, w) de N^3 :

- i) $C_r(u, v) = (-1)^r C_r(v, u)$,
- ii) $C_0(u, v) = uv$ et $C_1(u, v) = \{u, v\}$,
- iii) $C_r(1, u) = 0 \quad \forall r > 0$,
- iv) $\sum_{r+s=t} C_r(u, C_s(v, w)) = \sum_{r+s=t} C_r(C_s(u, v), w)$.

L'exemple fondamental du produit star est celui de Moyal sur \mathbb{R}^{2k} , muni de la 2-forme ω définie par:

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^k x_j y_{k+j} - x_{k+j} y_j, \quad \text{si } \xi = (x_1, \dots, x_{2k}), \eta = (y_1, \dots, y_{2k}).$$

Si $\Lambda = (\Lambda^{ij})_{1 \leq i, j \leq 2k}$ est la matrice de ω dans la base canonique de \mathbb{R}^{2k} , le produit de Moyal de \mathbb{R}^{2k} est donné par:

$$u \star v = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\nu^r}{r!} P^r(u, v),$$

où

$$P^0(u, v) = uv, \quad P^r(u, v) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r=1 \\ j_1, \dots, j_r=1}}^k \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1 \dots i_r} u \partial_{j_1 \dots j_r} v.$$

On remarque qu'un produit \star sur (M, ω) est une déformation de la structure associative de $C^\infty(M)$, et si on pose $[u, v]_\star = \frac{1}{2\nu}(u \star v - v \star u)$ on obtient une déformation de la structure d'algèbre de Lie $(C^\infty(M), \{, \})$.

1.4. Paramétrisation d'une orbite coadjointe

DÉFINITION 1. — On considère une suite croissante de sous algèbres de \mathfrak{g} :

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

telle que:

i) $\dim \mathfrak{g}_j = j$ et \mathfrak{g}_{j-1} est un idéal de \mathfrak{g}_j , pour tout $j = 1, \dots, n$

ii) Si \mathfrak{g}_j n'est pas un idéal de \mathfrak{g} , alors \mathfrak{g}_{j-1} et \mathfrak{g}_{j+1} sont deux idéaux de \mathfrak{g} et la représentation adjointe de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_{j-1}$ est irréductible.

Une telle suite est appelée dans ([5] chap 1), bonne suite de sous algèbres. Si \mathfrak{a} est un idéal de codimension r de \mathfrak{g} , on peut choisir cette bonne suite telle que $\mathfrak{g}_{n-r} = \mathfrak{a}$.

DÉFINITION 2. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie exponentielle, \mathfrak{h} une sous algèbre de Lie de \mathfrak{g} alors il existe une base (X_1, \dots, X_k) d'un supplémentaire de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} telle que, si $H = \exp \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned} H \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow G \\ (X, t_1, \dots, t_k) &\longmapsto \exp X \cdot \exp t_k X_k \dots \exp t_1 X_1 \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme. Une telle base est dite base coexponentielle à \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} .

Soit \mathcal{O} l'orbite coadjointe d'un point ξ de \mathfrak{g}^* , alors on a:

PROPOSITION 1. — Il existe un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^{2k} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (p, q) &\longmapsto \xi = \Psi(p, q) \end{aligned}$$

tel que:

$$i) \quad \omega = \sum_{i=1}^k dp_i \wedge dq_i$$

ii) la fonction: $\tilde{X} : \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit:

$$\tilde{X}(p, q) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q)$$

où pour tout j , les fonctions $q \longmapsto \alpha_j(q)$ sont C^∞ sur \mathbb{R}^k , prolongeables en des fonctions entières sur \mathbb{C}^k , à croissance au plus exponentielle.

Preuve. — On prouve le résultat par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$, le cas de dimension 1 est trivial. Fixons un point ξ^0 de \mathfrak{g}^* . On suppose que le théorème est vrai pour \mathfrak{g}_{n-1} ; la suite

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1}$$

est une bonne suite de sous algèbres de \mathfrak{g}_{n-1} , et on suppose qu'on a une paramétrisation associée: $\Psi^{(n-1)}$, $p_i^{(n-1)}$ et $q_j^{(n-1)}$ $i, j = 1, \dots, k_{n-1}$, telle que $\Psi^{(n-1)}(0, 0) = (\xi_{n-1}^0)$. Considérons les ensembles suivants:

$$A = \{\xi \in \mathfrak{g}^* \text{ tels que } \mathfrak{g}(\xi_{n-1}) \neq \mathfrak{g}_{n-1}(\xi_{n-1})\},$$

$$B = \{\xi \in \mathfrak{g}^* \text{ tels que } \mathfrak{g}(\xi_{n-1}) = \mathfrak{g}_{n-1}(\xi_{n-1})\},$$

où ξ_{n-1} est la restriction de ξ à \mathfrak{g}_{n-1} , A et B sont G invariants.

Premier cas. — ξ^0 appartient à A

$G.\xi^0$ est diffeomorphe à $G_{n-1}.\xi_{n-1}^0$ car l'application:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^{2k} &\longrightarrow G_{n-1}.\xi_{n-1}^0 \\ (t_1, \dots, t_{2k_{n-1}}) &\longmapsto \prod_{j=1}^{2k_{n-1}} \text{expt}_j X_j.\xi_{n-1}^0 \end{aligned}$$

où $\{X_1, \dots, X_{2k_{n-1}}\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_{n-1}(\xi_{n-1}^0)$ dans \mathfrak{g}_{n-1} , est un diffeomorphisme. Mais cette base est aussi une base coexponentielle à $\mathfrak{g}(\xi^0)$ dans \mathfrak{g} puisque \mathfrak{g}_{n-1} est un idéal de \mathfrak{g} . On pose alors $k = k_{n-1}$ et:

$$\begin{cases} p_j(\xi) &= p_j^{(n-1)}(\xi_{n-1}) \\ q_j(\xi) &= q_j^{(n-1)}(\xi_{n-1}) \end{cases}$$

Deuxième cas. — ξ^0 appartient à B

Dans ce cas $\dim G.\xi^0 = \dim G_{n-1}.\xi_{n-1}^0 + 2$. Posons donc $k = k_{n-1} + 1$. On considère un élément X de $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{n-1}$, on pose:

$$F : \mathbb{R} \times G_{n-1}.\xi_{n-1} \longrightarrow G.\xi_{n-1}$$

$$(t, \eta) \longmapsto \text{expt} X.\eta$$

alors F est une bijection, et si P est la projection sur \mathbb{R} , on définit les fonction p_k et q_k par:

$$\begin{cases} p_k(\xi) &= \tilde{X}(\xi) \\ q_k(\xi) &= P \circ F^{-1}(G.\xi_{n-1}), \end{cases}$$

et pour $j < k$ on définit:

$$\begin{cases} p_j(\xi) &= p_j^{(n-1)}(\exp - q_k(\xi)X.\xi) \\ q_j(\xi) &= q_j^{(n-1)}(\exp - q_k(\xi)X.\xi). \quad \square \end{cases}$$

PROPOSITION 2 [1]. — Si on pose $\xi^0 = \Psi(0, 0)$ et $\mathfrak{h}^0 = \sum_{j=1}^n \mathfrak{g}_j(\xi_j^0)$ où ξ_j^0 est la restriction de ξ^0 à \mathfrak{g}_j alors:

i) \mathfrak{h}^0 est l'ensemble des X de \mathfrak{g} tels que: $\tilde{X}(p, 0) = \tilde{X}(0, 0)$

ii) \mathfrak{h}^0 est une polarisation algébrique réelle en ξ^0 satisfaisant à la condition de Pukanszky (\mathfrak{h}^0 est la polarisation de M . Vergne associée à la suite des \mathfrak{g}_j).

iii) Il existe une base coexponentielle (Z_1, \dots, Z_k) à \mathfrak{h}^0 dans \mathfrak{g} telle que $\tilde{Z}_j = \sum_{l=1}^k a_{j,l}(q)p_l + a_{j,0}(q)$, avec

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_k &= p_k, \quad a_{j,k}(q) \equiv 0, \quad a_{j,l}(q_1, \dots, q_j, 0, \dots, 0) \equiv 0, \\ &\frac{\partial a_{j,l}}{\partial q_m}(q_1, \dots, q_j, 0, \dots, 0) \equiv 0, \quad 0 \leq l \leq k, \quad 1 \leq m \leq l. \end{aligned}$$

PROPOSITION 3 [1]. — Soit \mathcal{O} l'orbite coadjointe de $\xi^0 = \Psi(0, 0)$, de dimension $2k$. On désigne par P_q l'application de \mathbb{R}^{2k} dans \mathbb{R}^k définie par $P_q(p, q) = q$, par P la projection canonique de \mathcal{O} sur G/H^0 où $H^0 = \exp \mathfrak{h}^0$ et par θ le difféomorphisme de \mathbb{R}^k dans G/H^0 défini par

$$\theta(t_1, \dots, t_k) = \prod_{j=k}^1 \exp t_j Z_j . H^0$$

où (Z_1, \dots, Z_k) est la base coexponentielle à \mathfrak{h}^0 dans \mathfrak{g} définie dans la proposition 2. Alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2k} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{O} \\ P_q \downarrow & & \downarrow P \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\theta} & G/H^0 \end{array}$$

1.5. Polarisation géométrique

DÉFINITION. — Une polarisation géométrique (réelle) \mathcal{F} sur une orbite \mathcal{O} est la donnée d'une distribution \mathcal{C}^∞ :

$$\xi \longmapsto \mathcal{F}_\xi$$

telle que:

- i) en tout point ξ de \mathcal{O} , \mathcal{F}_ξ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $T_\xi(\mathcal{O})$ pour $(\omega_{\mathcal{O}})_\xi$,
- ii) \mathcal{F} est intégrable.

2. Le cas nilpotent

2.1. Fonctions polynomiales sur \mathcal{O}

On suppose que G est nilpotent, de dimension n . On considère l'algèbre symétrique complexe $S(\mathfrak{g})$ sur \mathfrak{g} qu'on identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g}^* à valeurs dans \mathbb{C} , sur cette algèbre on a

$$\{P, Q\} = [P, Q] \quad \forall P, Q \in S(\mathfrak{g})$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne l'extension naturelle, par dérivation, du crochet de Lie de \mathfrak{g} à $S(\mathfrak{g})$. Soit \mathcal{O} l'orbite coadjointe d'un élément ξ de \mathfrak{g}^* , on considère

$$\mathcal{A} = \{f|_{\mathcal{O}}, f \in S(\mathfrak{g})\}.$$

La définition de \mathcal{A} est indépendante de la carte Ψ dont on munit l'orbite \mathcal{O} .

LEMME 1 [9]. — Munissons \mathcal{O} d'une carte adaptée Ψ . Une application u de \mathcal{O} dans \mathbb{C} , vue comme fonction des coordonnées p_j et q_j est polynomiale si et seulement si il existe f dans $S(\mathfrak{g})$ tel que $u = f|_{\mathcal{O}}$.

On a alors $\mathcal{A} = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k]$ où $2k = \dim \mathcal{O}$. De plus \mathcal{A} est une algèbre associative stable par le produit de Moyal et est une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson puisque:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)} \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0.$$

2.2. Fonctions polarisées et quantifiables

Soit $\mathfrak{h}^0 = \sum_{j=1}^n \mathfrak{g}_j(\xi_j^0)$ la polarisation de M. Vergne de \mathfrak{g} au point ξ^0 et soit \mathcal{F}_{ξ^0} le sous espace engendré par les champs ∂_{p_j} , alors on a:

LEMME 2. — Posons $\mathcal{F}_\xi = \text{Vect} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_j} \Big|_\xi, j = 1, \dots, k \right\}$. Alors $\mathcal{F} : \xi \mapsto \mathcal{F}_\xi$ est la polarisation géométrique réelle G -invariante associée à \mathfrak{h}^0 .

DÉFINITION. — Une fonction u de \mathcal{A} est dite polarisée si X_u est dans \mathcal{F} . Une fonction u de \mathcal{A} est dite quantifiable si $[X_u, \mathcal{F}]$ est inclus dans \mathcal{F} .

On désigne par \mathcal{A}_0 l'espace des fonctions polarisées et par \mathcal{A}_1 l'espace des fonctions quantifiables. Soit u dans \mathcal{A}_0 , on a

$$X_u = \sum_{i=1}^k \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

u est donc dans \mathcal{A}_0 si et seulement si $\frac{\partial u}{\partial p_i} = 0$ pour tout i . De même on vérifie que u est dans \mathcal{A}_1 si et seulement si $\frac{\partial^2 u}{\partial p_i \partial p_j} = 0$ pour tout i et tout j . Ainsi on obtient:

THÉORÈME. — $\mathcal{A}_0 = \mathbb{C}[q_1, \dots, q_k]$ et \mathcal{A}_1 est l'espace $\mathbb{C}[q_1, \dots, q_k]_1 [p_1, \dots, p_k]$ des fonctions affines en p_1, \dots, p_k à coefficients dans $\mathbb{C}[q_1, \dots, q_k]$.

Ces résultats ne sont pas vrais dans le cas d'un groupe exponentiel non nilpotent. Dans l'exemple suivant on montre que \mathcal{A}_0 ne contient pas les générateurs q_1, \dots, q_k et que \mathcal{A} n'est pas stable par le produit de Moyal.

3. Un exemple

Soit α un nombre réel non nul et $\mathfrak{g}_{4,11}(\alpha)$ l'algèbre de Lie (réelle) de base (e_1, e_2, e_3, e_4) telle que

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3, [e_1, e_4] = 2\alpha e_4, [e_2, e_3] = e_4$$

(les autres crochets sont nuls). Choisissons un point $\xi = \xi_1 e_1^* + \xi_2 e_2^* + \xi_3 e_3^* + \xi_4 e_4^*$ tel que $\xi_4 > 0$. L'orbite coadjointe \mathcal{O} de ξ est paramétrée par un difféomorphisme $\Psi : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathcal{O}$ tel que:

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 &= p_2 \\ \tilde{e}_2 &= e^{\alpha q_2} p_1 \cos q_2 - e^{\alpha q_2} q_1 \sin q_2 \\ \tilde{e}_3 &= e^{\alpha q_2} p_1 \sin q_2 + e^{\alpha q_2} q_1 \cos q_2 \\ \tilde{e}_4 &= e^{2\alpha q_2} \end{cases}$$

PROPOSITION 1. — \mathcal{A} n'est pas stable par le produit de Moyal.

Preuve. — Soit $f = \tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}_3$, par construction, f appartient à \mathcal{A} mais

$$\begin{aligned} (f \star f)(p, q) &= f(p, q)^2 + \frac{1}{2i} \{f, f\}(p, q) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2i}\right)^2 P^2(f, f)(p, q) \\ &= f(p, q)^2 - \frac{1}{8} P^2(f, f)(p, q) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P^2(f, f)(p, q) &= e^{2\alpha q_2} \left[-4p_2 - 2p_1^2 (\alpha^2 \cos^2 q_2 + \sin^2 q_2 - 2\alpha \cos q_2 \sin q_2) \right] \\ &= -4p_2 e^{2\alpha q_2} - 2e^{2\alpha q_2} p_1^2 \left[\alpha^2 \cos^2 q_2 + \sin^2 q_2 - 2\alpha \cos q_2 \sin q_2 \right]. \end{aligned}$$

On voit que la fonction $p_2 e^{2\alpha q_2}$ coïncide avec la fonction $\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_4$ de \mathcal{A} , donc si $f \star f$ était dans \mathcal{A} , alors $P^2(f, f)$ et $g = P^2(f, f) - p_2 e^{2\alpha q_2}$ seraient aussi dans \mathcal{A} . Mais g est un polynôme en p_1 de degré 2, à coefficients dans l'anneau des fonctions \mathcal{C}^∞ en (q_1, q_2) , donc g serait la restriction à \mathcal{O} d'une fonction de la forme $a\tilde{e}_2^2 + b\tilde{e}_3^2 + c\tilde{e}_2$, (a , b et c sont des nombres complexes).

Pour fixer les idées on peut supposer que $\alpha = 1$, on obtient par identification:

$$\begin{cases} 0 = (a - 1) \cos^2 q_2 + (b - 1) \sin^2 q_2 + (c + 2) \cos q_2 \sin q_2 \\ 0 = 2(b - a) \cos q_2 \sin q_2 + c \cos(2q_2) \\ 0 = a \sin^2 q_2 + \cos^2 q_2 - \cos q_2 \sin q_2 \end{cases}$$

ce qui donne entre autres:

$$\begin{cases} a - b & = 0 \\ c + 2 & = 0 \\ a + b - 2 & = 0 \\ c & = 0 \\ a + b & = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

(Σ) est un système incompatible ce qui prouve que $f \star f$ n'est pas dans \mathcal{A} , c'est à dire que, contrairement au cas des groupes nilpotents, \mathcal{A} n'est pas stable par le produit de Moyal.

PROPOSITION 2 *L'ensemble \mathcal{A}_0 ne contient pas les fonctions q_j ($j = 1, 2$).*

Preuve. — D'après la paramétrisation de l'orbite \mathcal{O} , un élément u de \mathcal{A}_0 s'écrit

$$u = \sum_{i,j,k} a_{i,j,l} \tilde{e}_2^i \tilde{e}_3^j \tilde{e}_4^l \quad (\text{somme finie}).$$

u est alors une fonction polynomiale en la variable p_1 , de plus, le degré de u en p_1 est celui de u vue comme un polynôme en les variables \tilde{e}_2 et \tilde{e}_3 , c'est

à dire que puisque u ne dépend pas de p_1 , u vue comme un polynôme en les fonctions \tilde{e}_j , ne dépend pas de \tilde{e}_2 et \tilde{e}_3 . Donc:

$$u = \sum_{l=0}^m a_l (\tilde{e}_4)^l = \sum_{l=0}^m a_l e^{2\alpha l q_2}, \quad (a_l \in \mathbb{C}).$$

Ainsi l'ensemble \mathcal{A}_0 , contrairement au cas des groupes nilpotents, ne contient pas les fonctions coordonnées q_j . Maintenant, nous considérons le complété de \mathcal{A}_0 pour la distance ultramétrique d_* définie dans [4]. Rappelons d'abord la définition de cette distance. Soit u un polynôme de $\mathbb{C}[p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k]$, on note $u = \sum_{r \geq r_0} u_r$, où u_r est un polynôme homogène de degré r en les variables p_1, \dots, p_k et on définit $val_*(u)$ et d_* par

$$val_*(u) = \inf_{r \in \mathbb{N}} (val_q(u_r) - r), \quad d_*(u, v) = d_*(u - v, 0) = e^{-val_*(u-v)}.$$

Notons $\overline{\mathcal{A}_0}$ le complété de \mathcal{A}_0 pour la distance d_* . Alors on peut montrer que $\overline{\mathcal{A}_0}$ est l'espace $\mathbb{C}[[q_2]]$ des séries formelles en q_2 et donc q_1 n'appartient pas à $\overline{\mathcal{A}_0}$. Ainsi, dans le cas des groupes exponentiels, même le complété naturel $\overline{\mathcal{A}_0}$ de \mathcal{A}_0 , ne suffit pour contenir toutes les fonctions q_j .

4. Complété de \mathcal{A}_1

On rappelle que l'espace \mathcal{A}_1 est l'espace des fonctions quantifiables u (telles que $[X_u, F]$ est dans F). On a vu que cet espace contenait entre autres toutes les fonctions X pour X dans \mathfrak{g} . Notons $\overline{\mathcal{A}_1}$ son complété pour la distance d_* , définie dans le paragraphe 3.

THÉORÈME. — *Soit \mathcal{O} l'orbite coadjointe d'un point ξ^0 de \mathfrak{g}^* , alors il existe une paramétrisation adaptée*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^{2k} &\longrightarrow \mathcal{O} \\ (p, q) &\longmapsto \Psi(p, q) \end{aligned}$$

telles que $\xi^0 = \Psi(0, 0)$ et pour laquelle les fonctions p_j et q_j sont dans $\overline{\mathcal{A}_1}$ ($j = 1, \dots, k$).

Preuve. — On raisonne par récurrence sur $n = \dim \mathfrak{g}$. Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, alors \mathfrak{g} est abélienne, les orbites sont des points ($p = q = 0$). On suppose que le théorème est vrai pour les algèbres de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et on considère une algèbre \mathfrak{g} telle que $\dim \mathfrak{g} = n$. On procède par étapes:

4.1. ξ^0 s'annule sur un idéal non trivial

Supposons qu'il existe un idéal \mathfrak{a} de \mathfrak{g} , non trivial, sur lequel ξ^0 s'annule, alors il existe une bonne suite de sous algèbres de \mathfrak{g} admissible passant par \mathfrak{a} :

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{a} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

On pose $\tilde{G} = G/G_m$ où G_m est le sous groupe de Lie de G d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_m et on pose $\tilde{\xi} = \xi|_{\mathfrak{g}_m}$. L'orbite \mathcal{O} de ξ^0 est alors diffeomorphe à $\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{G} \cdot \tilde{\xi}^0$

Dans ce cas on obtient pour tout ξ de \mathcal{O}

$$\begin{cases} p_j(\xi) &= \tilde{p}_j(\tilde{\xi}) \\ q_j(\xi) &= \tilde{q}_j(\tilde{\xi}) \end{cases}$$

et l'hypothèse de récurrence appliquée à $\tilde{\mathcal{O}}$ prouve que les p_j et les q_j sont dans $\overline{\mathcal{A}}_1$. \square

4.2. ξ^0 ne s'annule sur aucun idéal non trivial

ASSERTION 1. — Si \mathfrak{z} est le centre de \mathfrak{g} alors $\dim \mathfrak{z} \leq 1$.

Preuve. — On suppose $\dim \mathfrak{z} \geq 2$, alors $\mathfrak{a} = \text{Ker } \xi^0|_{\mathfrak{z}}$ est un idéal non trivial sur lequel ξ^0 s'annule, ce qui est absurde. \square

Maintenant soit \mathfrak{b} un idéal minimal non central dans \mathfrak{g} , alors on sait que \mathfrak{b} est abélien et que $\dim \mathfrak{b}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{b} \leq 2$ [5]. D'autre part, on a

$$\dim \mathfrak{b} = \dim (\mathfrak{b}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{b}) + \dim (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{b}) \leq 2 + 1 = 3.$$

Considérons

$$\mathfrak{b}^{\xi^0} = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle \xi^0, [X, Y] \rangle = 0 \forall Y \in \mathfrak{b}\},$$

\mathfrak{b}^{ξ^0} est l'orthogonal de \mathfrak{b} pour la forme bilinéaire:

$$(X, Y) \longmapsto \langle \xi^0, [X, Y] \rangle.$$

ASSERTION 2. — \mathfrak{b}^{ξ^0} est un idéal de \mathfrak{g} tel que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^{\xi^0}$ et $\mathfrak{b}^{\xi^0} \neq \mathfrak{g}$.

Preuve. — Comme \mathfrak{b} est abélien, il est inclus dans \mathfrak{b}^{ξ^0} . Supposons que $\mathfrak{b}^{\xi^0} = \mathfrak{g}$ alors ξ^0 s'annule sur l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]$.

Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] = 0$ alors \mathfrak{b} est un idéal central dans \mathfrak{g} ce qui est absurde.

Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \neq 0$ alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]$ est un idéal de \mathfrak{g} , non trivial, sur lequel ξ^0 s'annule ce qui n'est pas le cas. Donc $\mathfrak{b}^{\xi^0} \neq \mathfrak{g}$. \square

Nous allons choisir maintenant une bonne suite de sous algèbres de \mathfrak{g} passant par \mathfrak{b}^{ξ} . \mathfrak{b} étant un idéal minimal non central, $\dim \mathfrak{b} \leq 3$ et nous allons considérer les différents cas selon la dimension de \mathfrak{b} .

4.3. $\dim \mathfrak{b} = 1$

Comme ξ^0 ne s'annule pas sur \mathfrak{b} , il existe Y_0 dans \mathfrak{b} tel que $\langle \xi^0, Y_0 \rangle = 1$. Pour tout élément Z de \mathfrak{b}^{ξ^0} , on a

$$\langle \xi^0, [Z, Y_0] \rangle = Z^-(\tilde{Y}_0) = 0, \quad \tilde{Y}_0(\exp Z \cdot \xi^0) = \tilde{Y}_0(\xi^0)$$

donc l'application \tilde{Y}_0 est constante sur $\exp(\mathfrak{b}^{\xi^0}) \cdot \xi^0$. D'autre part on a

$$\dim(\mathfrak{b}^{\xi^0}) = \dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}(\xi^0)) - \dim(\mathfrak{b}) = n - 1$$

puisque $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}(\xi^0)$ est nul. Reprenant la construction de la carte adaptée Ψ du paragraphe 1, on considère alors un élément X_n de $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}^{\xi^0}$ et on pose $\tilde{X}_n = p_k$ alors

$$X_n^-(\tilde{Y}_0)(\xi^0) = \frac{d\tilde{Y}_0}{dq_k} = \langle \xi^0, [X_n, Y_0] \rangle = \alpha \langle \xi^0, Y_0 \rangle \neq 0.$$

Donc \tilde{Y}_0 est solution de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Y}_0}{dq_k} = \alpha \tilde{Y}_0, \\ \tilde{Y}_0(0, 0) = 1 \end{cases}$$

donc $\tilde{Y}_0(q_k) = e^{\alpha q_k}$ et par suite

$$q_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\tilde{Y}_0 - 1)^n.$$

Cette série converge pour la distance d_* , ce qui prouve que la fonction q_k est dans $\overline{\mathcal{A}}_1$. D'autre part on a vu que $p_k = \tilde{X}_n$ et pour $j < k$,

$$\begin{cases} p_j(\xi) = p_j^{(n-1)}(\exp(-q_k X_n \cdot \xi)) \\ q_j(\xi) = q_j^{(n-1)}(\exp(-q_k X_n \cdot \xi)). \end{cases}$$

Donc $\overline{\mathcal{A}}_1$ contient toutes les fonctions p_j et q_j . \square

4.4. $\dim \mathfrak{b} = 2$

Il y a deux cas possibles: $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ ou $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

4-4-1 $\dim \mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = 1$

Notons $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y \oplus \mathbb{R}Z$ où Y est non central et Z est central. Pour tout X dans \mathfrak{g} on a

$$[X, Z] = 0, \quad [X, Y] = \lambda(X)Y + \mu(X)Z,$$

où λ et μ sont deux formes linéaires sur \mathfrak{g} .

ASSERTION 3. — On a $\mu \neq 0$ et $\langle \xi^0, Z \rangle \neq 0$.

Preuve. — Si $\mu = 0$ alors pour tout X de \mathfrak{g} on a $[X, Y] = \lambda(X)Y$, $\mathbb{R}Y$ est un idéal non central strictement inclus dans \mathfrak{b} ce qui est absurde. De même, si $\langle \xi^0, Z \rangle = 0$, alors ξ^0 s'annule sur un idéal non trivial de \mathfrak{g} , ce qui n'est pas le cas. \square

On choisit alors Y et Z tels que

$$\langle \xi^0, Z \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \xi^0, Y \rangle = 0$$

et on obtient

$$\mathfrak{b}^{\xi^0} = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle \xi^0, [X, Y] \rangle = \langle \xi^0, [X, Z] \rangle = 0\},$$

c'est à dire \mathfrak{b}^{ξ^0} est le noyau de μ . Par la suite on considère deux cas selon le rang du système $\{\lambda, \mu\}$.

Premier cas: $\text{rg}\{\lambda, \mu\} = 1$

Il existe un nombre réel a tel que $\lambda = a\mu$ et on a alors

$$\begin{cases} [X, Y] &= \mu(X)(aY + Z) \\ [X, aY + Z] &= a\mu(X)(aY + Z). \end{cases}$$

$(aY + Z)$ est alors un idéal de \mathfrak{g} contenu dans \mathfrak{b} , c'est donc un idéal central et par suite $a = 0$, d'où $\lambda = 0$. D'autre part, pour tout élément T de \mathfrak{b}^{ξ} , on a

$$T^-(\tilde{Y})(\xi) = \langle \xi, [T, Y] \rangle = 0.$$

La fonction \tilde{Y} est donc constante sur $\exp(\mathfrak{b}^{\xi^0}).\xi^0$ et nulle en ξ^0 donc nulle $\tilde{Y}(\exp(\mathfrak{b}^{\xi^0}).\xi^0) = 0$. Par ailleurs, l'élément Z étant central dans \mathfrak{g} , pour tout élément ξ de l'orbite \mathcal{O} , on a

$$\tilde{Z}(\xi) = \langle \xi, Z \rangle = \langle \xi^0, Z \rangle = 1.$$

Choisissons X_n dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}^{\xi^0}$ tel que $\mu(X_n) = 1$, il en résulte que:

$$\langle \xi, [X_n, Y] \rangle = \langle \xi, Z \rangle = \langle \xi^0, Z \rangle = 1 \quad \forall \xi \in \mathcal{O}$$

et par suite on a $q_k = \tilde{Y}$, rappelons que $p_k = \tilde{X}_n$, q_k et p_k sont donc dans \mathcal{A}_1 (et à fortiori dans $\overline{\mathcal{A}}_1$). Si $j < k$, on a

$$\begin{cases} p_j(\xi) = p_j^{(n-1)}(\exp(-q_k X_n \cdot \xi)) \\ q_j(\xi) = q_j^{(n-1)}(\exp(-q_k X_n \cdot \xi)). \end{cases}$$

Donc les fonctions p_j et q_j sont aussi dans $\overline{\mathcal{A}}_1$.

Deuxième cas: $rg\{\lambda, \mu\} = 2$

Appelons \mathfrak{b}' l'espace $Ker\lambda \cap Ker\mu$, \mathfrak{b}' est un idéal de \mathfrak{g} tel que $dim \mathfrak{b}' = n - 2$. On choisit T dans $\mathfrak{b}^{\xi^0} \setminus \mathfrak{b}'$ et X_n dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}^{\xi^0}$ tels que:

$$\begin{cases} \lambda(T) = 1 \\ \mu(T) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda(X_n) = 0 \\ \mu(X_n) = 1. \end{cases}$$

Alors, pour tout U de \mathfrak{b}' , on a

$$\langle \exp U \cdot \xi^0, Y \rangle = \langle \xi^0, e^{-adU} Y \rangle = \langle \xi^0, Y \rangle = 0,$$

ce qui prouve que \tilde{Y} est constante sur $\exp(\mathfrak{b}' \xi^0) \cdot \xi^0$, il en est de même pour \tilde{Z} et donc on a

$$\tilde{Y}(\xi) = \tilde{Z}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \exp(\mathfrak{b}' \xi^0) \cdot \xi^0.$$

D'autre part, \mathfrak{b}^{ξ^0} est $\mathbb{R}T \oplus \mathfrak{b}'$ d'où $\exp \mathfrak{b}^{\xi^0} = \exp \mathbb{R}T \cdot \exp \mathfrak{b}'$ et par suite, pour tout ξ dans $\exp \mathfrak{b}^{\xi^0} \cdot \xi^0$, on a

$$\begin{aligned} \langle \xi, Y \rangle &= \langle \exp tT \exp U \cdot \xi^0, Y \rangle \\ &= \langle \xi^0, Ad(\exp - U) Ad(\exp - tT) Y \rangle, \quad (U \in \mathfrak{b}') \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\langle \xi, Y \rangle = \langle \xi^0, Ad(\exp - U) e^{-t} Y \rangle = e^{-t} \langle \xi^0, e^{-adU}(Y) \rangle = 0,$$

ce qui prouve que la fonction \tilde{Y} est constante sur $\exp \mathfrak{b}^{\xi^0} \cdot \xi^0$, il en est de même pour \tilde{Z} . Pour chaque X_n dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}^{\xi^0}$, on a:

$$\langle \xi, [X_n, Y] \rangle = \langle \xi, Z \rangle = \langle \xi^0, Z \rangle = 1 \quad \forall \xi \in \mathcal{O}.$$

On pose donc, comme ci-dessus, $\tilde{Y} = q_k$, $\tilde{X}_n = p_k$ et on prouve de même que, pour $j < k$, les fonctions p_j et q_j sont dans $\overline{\mathcal{A}}_1$. \square

4-4-2 $\dim \mathfrak{b} = 2$ et $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$

Alors \mathfrak{b} s'écrit $\mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2$ avec $[Y_1, Y_2] = 0$ et Y_1, Y_2 ne sont pas centraux.

ASSERTION 4. — *Les racines de \mathfrak{g} dans \mathfrak{b} ne sont pas réelles.*

Preuve. — Supposons que \mathfrak{g} possède une racine réelle ψ dans \mathfrak{b} alors comme \mathfrak{g} est résoluble, il existerait Y dans \mathfrak{b} tel que pour tout X de \mathfrak{g} on ait $[X, Y] = \psi(X)Y$ et donc $\mathbb{R}Y$ est un idéal contenu strictement dans \mathfrak{b} ce qui est absurde. \square

Donc les racines de \mathfrak{g} dans \mathfrak{b} sont complexes, de la forme $\psi = \rho(1 + i\alpha)$ et $\bar{\psi} = \rho(1 - i\alpha)$, avec α réel non nul et ρ dans \mathfrak{g}^* . Il existe une base (V_1, V_2) dans $\mathfrak{b}^{\mathbb{C}}$ formée de vecteurs propres communs à $ad X$ pour tous les X de \mathfrak{g} , par suite on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}^{\xi^0} &= \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle \xi^0, [X, Y] \rangle = 0 \forall Y \in \mathfrak{b}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle \xi^0, [X, V_1] \rangle = \langle \xi^0, [X, V_2] \rangle = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \rho(X) = 0\} \end{aligned}$$

Puisque les nombres $\langle \xi^0, V_j \rangle$ ne sont pas tous les deux nuls, \mathfrak{b}^{ξ^0} est le noyau de ρ . Maintenant, pour tout T de \mathfrak{b}^{ξ^0} , on a $\langle \xi^0, [T, Y_1] \rangle = \langle \xi^0, [T, Y_2] \rangle = 0$, les fonctions \tilde{Y}_1 et \tilde{Y}_2 sont donc constantes sur $\exp(\mathfrak{b}^{\xi^0}) \cdot \xi^0$. On pose

$$T_1 = \frac{(V_1 + V_2)}{2} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{(V_1 - V_2)}{2i},$$

on choisit un élément X_n de $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}^{\xi^0}$ tel que $\rho(X_n) = 1$, on pose $p_k = \tilde{X}_n$ et on obtient alors le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}_1}{dq_k} = \tilde{T}_1 - \alpha\tilde{T}_2 \\ \frac{d\tilde{T}_2}{dq_k} = \alpha\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2, \end{cases}$$

qui a pour solution:

$$\begin{cases} \tilde{T}_1 = e^{q_k} [\cos(\alpha q_k) \tilde{T}_1(\xi) - \sin(\alpha q_k) \tilde{T}_2(\xi)] \\ \tilde{T}_2 = e^{q_k} [\sin(\alpha q_k) \tilde{T}_1(\xi) + \cos(\alpha q_k) \tilde{T}_2(\xi)]. \end{cases}$$

Posons $\beta = \tilde{T}_1(\xi)^2 + \tilde{T}_2(\xi)^2$, la fonction $\tilde{T}_1^2 + \tilde{T}_2^2$ est donc la fonction βe^{2q_k} et la fonction q_k est

$$q_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{\tilde{T}_1^2 + \tilde{T}_2^2 - 1}{\beta} \right)^n,$$

elle appartient à $\overline{\mathcal{A}}_1$. On prouve que les fonctions p_j et q_j ($j < k$) sont aussi dans $\overline{\mathcal{A}}_1$ comme ci-dessus. \square

4.5. $\dim \mathfrak{b} = 3$

Dans ce cas on a $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ et par suite $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2 \oplus \mathbb{R}Z$, où Y_1 et Y_2 sont non centraux et Z est central. $\mathfrak{b}/\mathfrak{z}$ est un idéal de dimension 2 de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

ASSERTION 5. — $\mathfrak{b}/\mathfrak{z}$ est un idéal non central dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

Preuve. — Si $\mathfrak{b}/\mathfrak{z}$ est central dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ alors il existe λ_1 et λ_2 dans \mathfrak{g}^* tels que

$$[X, Y_1] = \lambda_1(X)Z \quad \text{et} \quad [X, Y_2] = \lambda_2(X)Z,$$

ce qui entraîne que $\mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Z$ et $\mathbb{R}Y_2 \oplus \mathbb{R}Z$ sont deux idéaux non centraux contenus dans \mathfrak{b} , ce qui est absurde. \square

Maintenant, si \mathfrak{a} contient \mathfrak{z} et $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ contenu dans $\mathfrak{b}/\mathfrak{z}$, alors \mathfrak{a} est un idéal de \mathfrak{g} contenu dans \mathfrak{b} et par suite $\mathfrak{b}/\mathfrak{z}$ est un idéal minimal non central de dimension 2 de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$.

Soit $\bar{\mathfrak{z}}$ le centre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, si Π est la projection canonique de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, posons

$$\bar{\mathfrak{z}} = \Pi(\{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \forall Y \in \mathfrak{g} \ [X, Y] \in \mathfrak{z}\}).$$

Si $\bar{\mathfrak{z}} \neq \{0\}$ alors il existe X dans \mathfrak{g} tel que, pour tout Y de \mathfrak{g} , on ait $[X, Y] = \lambda(Y)Z$ et par suite $\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Z$ est un idéal de \mathfrak{g} de dimension 2, ce qui nous ramène au cas 4-4-1.

Si $\bar{\mathfrak{z}} = \{0\}$ on choisit X_n dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{n-1}$ tel que $\rho(X_n) = 1$ alors, d'après le cas 4-4-2, on peut choisir Y_1 et Y_2 dans \mathfrak{b} tels que:

$$\begin{cases} [X_n, Y_1] = Y_1 - \alpha Y_2 + \delta_1(X)Z \\ [X_n, Y_2] = \alpha Y_1 + Y_2 + \delta_2(X)Z \\ [X_n, Z] = 0. \end{cases}$$

On définit la base (U_1, U_2) de \mathfrak{b} par:

$$U_1 = Y_1 - \langle \xi^0, Y_1 \rangle Z \quad \text{et} \quad U_2 = Y_2 - \langle \xi^0, Y_2 \rangle Z$$

de telle sorte que $\langle \xi^0, U_1 \rangle = \langle \xi^0, U_2 \rangle = 0$. On obtient:

$$\begin{cases} [X_n, U_1] = U_1 - \alpha U_2 + \mu_1 Z \\ [X_n, U_2] = \alpha U_1 + U_2 + \mu_2 Z. \end{cases}$$

On en déduit que les fonctions \tilde{U}_1 et \tilde{U}_2 sont données par:

$$\begin{cases} \tilde{U}_1 = \frac{\mu_1 + \alpha\mu_2}{1 + \alpha^2} [e^{q_k} (\cos(\alpha q_k) - 1)] + \frac{\mu_2 - \alpha\mu_1}{1 + \alpha^2} [e^{q_k} \sin(\alpha q_k)] \\ \tilde{U}_2 = \frac{\mu_2 - \alpha\mu_1}{1 + \alpha^2} [e^{q_k} (\cos(\alpha q_k) - 1)] + \frac{\mu_1 + \alpha\mu_2}{1 + \alpha^2} [e^{q_k} \sin(\alpha q_k)]. \end{cases}$$

On a donc

$$e^{2q_k} = \left[\tilde{U}_1 + \frac{\mu_1 + \alpha\mu_2}{1 + \alpha^2} \right]^2 + \left[\tilde{U}_2 + \frac{\mu_2 - \alpha\mu_1}{1 + \alpha^2} \right]^2$$

ce qui prouve que la fonction q_k (et donc aussi les fonctions p_j et q_j) appartient à $\bar{\mathcal{A}}_1$ et ceci achève la démonstration du théorème. \square

5. L'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$

5.1. Définition

On définit $\tilde{\mathcal{A}}$ comme étant l'algèbre engendrée par le complété de \mathcal{A}_1 pour la distance d_* . D'après ce qui précède on a:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathbb{C}[[q_1, \dots, q_k]][p_1, \dots, p_k]$$

($\tilde{\mathcal{A}}$ est l'algèbre des polynômes en les variables p_1, \dots, p_k à coefficients dans l'espace des séries formelles en q_1, \dots, q_k).

D'autre part, en reprenant la preuve de la construction des coordonnées $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(q_i)_{1 \leq i \leq k}$ dans la proposition 3 (paragraphe 1), on voit que ces fonctions dépendent non seulement de \mathfrak{h}^0 mais aussi du choix de la base coexponentielle à \mathfrak{h}^0 dans \mathfrak{g} . Notre algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ dépend donc a priori aussi de ces choix, mais en fait on a le résultat fondamental suivant:

5.2. Théorème

L'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ dépend du choix de la polarisation \mathfrak{h}^0 mais pas de celui de la base coexponentielle à \mathfrak{h}^0 dans \mathfrak{g} .

Preuve. — Soit $B = (Y_1, \dots, Y_k)$ et $B' = (Y'_1, \dots, Y'_k)$ deux bases coexponentielles à \mathfrak{h}^0 dans \mathfrak{g} , on considère les difféomorphismes θ_B et $\theta_{B'}$ de \mathbb{R}^k dans G/H^0 , définis par:

$$\theta_B(t_1, \dots, t_k) = \prod_{j=k}^1 \text{expt}_j Y_j . H^0 \quad \text{et} \quad \theta_{B'}(s_1, \dots, s_k) = \prod_{j=k}^1 \text{exps}_j Y'_j . H^0.$$

On peut aussi écrire $\theta_B(t) = \exp T(t)$ et $\theta_{B'}(s) = \exp T'(s)$ où $T(t)$ et $T'(s)$ sont données par la formule de Baker-Campbell-Hausdroff,

$$T(t) = \sum_{i=1}^k t_i Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i>j} t_i t_j [Y_i, Y_j] + P(t)$$

et

$$T'(s) = \sum_{i=1}^k s_i Y'_i + \frac{1}{2} \sum_{i>j} s_i s_j [Y_i, Y'_j] + P'(s).$$

Les fonctions $P(t)$ et $P'(s)$ sont entières, respectivement en $t = (t_1, \dots, t_k)$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$ de valuation au moins 3, à coefficients dans \mathfrak{g} . On veut expliciter l'application de changement de cartes $F = \theta_{B'}^{-1} \circ \theta_B$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de \mathfrak{g} telle que (e_1, \dots, e_m) soit une base de \mathfrak{h}^0 ($m = n - k$). Pour $j \leq k$ on a donc

$$Y_j = \sum_{i=1}^n y_{ij} e_i \quad \text{et} \quad Y'_j = \sum_{i=1}^n y'_{ij} e_i$$

et les matrices $A = (y_{ij})_{\substack{m+1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ et $A' = (y'_{ij})_{\substack{m+1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ sont inversibles.

D'autre part, l'élément $\exp(T(t)).\exp(-T'(s))$ de G s'écrit $\exp(Z(t, s))$ où $Z(t, s)$ est donnée par la formule de Baker-Campbell-Hausdroff:

$$Z(t, s) = T(t) - T'(s) - \frac{1}{2} [T(t), T'(s)] + Q(t, s),$$

où $Q(t, s)$ est une fonction entière en $t = (t_1, \dots, t_k)$ et $s = (s_1, \dots, s_k)$, de valuation au moins 3. Le vecteur $Z(t, s) = \sum_{i=1}^n z_i(t, s) e_i$ appartient à \mathfrak{h}^0 si et seulement si $z_i(t, s) = 0$ pour tout $i \geq m + 1$. Posons donc $Z_1(t, s) = \sum_{i=m+1}^n z_i(t, s) e_i$, on a bien sûr $Z_1(0, 0) = 0$. D'autre part, on a aussi:

$$Z(0, s) = -T'(s) = - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^k s_j y'_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j>j'} \sum_{l, l'=1}^n C_{i, l, l'}^j s_j s_{j'} y'_{jl} y'_{j'l'} \right] e_i + P(s)$$

où $C_{i, l, l'}^j$ sont les constantes de structure de \mathfrak{g} et $P(s)$ est entière, de valuation au moins 3. D'où

$$Z_1(0, s) = - \sum_{i=m+1}^n \left[\sum_{j=1}^k s_j y'_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j>j'} \sum_{l, l'=1}^n C_{i, l, l'}^j s_j s_{j'} y'_{jl} y'_{j'l'} \right] e_i + P(s)$$

et par suite :

$$\left(\frac{DZ_1}{Ds} \right) (0, 0) = \left(\frac{\partial z_j}{\partial s_i} (0, 0) \right)_{\substack{1 \leq j \leq k \\ m+1 \leq i \leq n}} = -A'.$$

Comme A' est inversible, on applique le théorème des fonctions implicites et on écrit les fonctions s_j telles que $Z_1(t, s)$ s'annule comme:

$$s_j = F_j(t) = \sum_{\substack{i=(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k \\ |i| > 0}} C_{i_1, \dots, i_k}^j t_1^{i_1} \dots t_k^{i_k},$$

le terme constant est nul car, pour $t = 0$, on a $s = 0$.

Maintenant $Z_1(t, F(t)) = 0$ et la partie linéaire de $Z_1(t, F(t))$ est celle de $T(t) - T'(F(t))$ d'où, si $F_i(t)$ s'écrit $\sum_{j=1}^k b_{j,i} t_j + O(t^2)$ ($i = m+1, \dots, k$), alors on a l'annulation des parties linéaires:

$$\sum_{i=m+1}^n \left(\sum_{j=1}^k (y_{ji} - b_{j,i} y'_{ji}) t_j \right) e_i = 0,$$

ce qui donne $(A - A'B)(t) = 0$ pour tout t et donc

$$F(t) = B(t) + O(t^2) = (A'^{-1} \circ A)(t) + O(t^2)$$

$$\text{où } B = \left(\frac{\partial F_j}{\partial t_i} \right) (0) = (b_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq k \\ m+1 \leq i \leq n}}.$$

Ceci prouve que l'application

$$\begin{aligned} F^* : \mathbb{R}[[t]] &\longrightarrow \mathbb{R}[[s]] \\ t &\longmapsto s = F(t) = (A'^{-1} \circ A)(t) + O(t^2), \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres associatives. F^* est aussi une isométrie pour d_* puisque les valuations (en t et en s) de u et de $F^*(u)$ sont les mêmes, pour tout u de $\mathbb{R}[[t]]$.

Lorsque l'on considère les bases adaptées construites au paragraphe 1, proposition 3, deux de ces systèmes de coordonnées (p_j, q_j) et (p'_j, q'_j) sont complètement définis par le choix des bases coexponentielles (Z_j) et (Z'_j) . En particulier, on a avec les notations ci dessus, $q' = F^*(q)$.

Maintenant on passe aux coordonnées (p_j) et (p'_j) . On a:

$$\begin{cases} \tilde{Z}'_k = p'_k \\ \tilde{Z}'_j = p'_j + \sum_{i=1}^k a'_{j,i}(q') p'_i + a'_{j,0}(q'). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}'_1 \\ \tilde{Z}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{Z}'_k \end{pmatrix} = A(q') \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \vdots \\ p'_{k-1} \\ p'_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{1,0}(q') \\ a'_{2,0}(q') \\ \vdots \\ a'_{k-1,0}(q') \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$A(q') = \begin{pmatrix} 1 + a'_{1,1}(q') & \cdots & a'_{1,k}(q') \\ a'_{2,1}(q') & 1 + a'_{2,2}(q') & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + a'_{k,k-1}(q') & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $A(q')$ est inversible dans $M(k, \mathbb{R}[[q']])$ puisque $\det A(q')|_{q'=0} = 1$, et par suite on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \vdots \\ p'_{k-1} \\ p'_k \end{pmatrix} = A(q')^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{Z}'_1 - a'_{1,0}(q') \\ \tilde{Z}'_2 - a'_{2,0}(q') \\ \vdots \\ \tilde{Z}'_k - a'_{k,0}(q') \end{pmatrix}.$$

En remplaçant q' par $F(q)$, cette relation montre que chaque fonction coordonnée p'_j appartient à l'espace $\mathbb{C}[[q]]_1[p]$ des fonctions affines en p_1, \dots, p_k à coefficients dans l'espace des séries formelles en q_1, \dots, q_k . Ainsi on a:

$$\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_k]] \xrightarrow{F^*} \mathbb{C}[[q'_1, \dots, q'_k]]$$

$$\mathbb{C}[[q_1, \dots, q_k]]_1[p_1, \dots, p_k] \xrightarrow{F_1} \mathbb{C}[[q'_1, \dots, q'_k]]_1[p'_1, \dots, p'_k],$$

où F^* est l'isométrie définie par l'isomorphisme: $q \longmapsto q'$, et F_1 est l'isomorphisme déduit par le changement de coordonnées: $(p_i, q_i) \longmapsto (p'_i, q'_i)$.

On prolonge enfin l'isomorphisme F_1 en un automorphisme \tilde{F} de l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$, c'est à dire

$$\tilde{F}(u) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(F^*(q)) F_1(p_1)^{i_1} \cdots F_1(p_k)^{i_k}$$

si $u = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(q) p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}$.

THÉORÈME. — *L'application $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ est un automorphisme d'algèbre associative qui est une isométrie pour d_* .*

Preuve. — Soit u un élément de $\tilde{\mathcal{A}}$. On décompose u en polynômes homogènes de degré r et s en (p) et (q) :

$$u = \sum_{r=0}^R \sum_s u_r^s, \quad u_r^s = \sum_{|i|=r} \sum_{|j|=s} a_{i,j} q_1^{j_1} \dots q_k^{j_k} p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}.$$

Alors $d_*(u, 0)$ est l'exponentielle de $-\inf\{s - r/u_r^s \neq 0\}$. D'autre part $\tilde{F}(u)$ est la somme des $\tilde{F}(u_r^s)$ et

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_r^s) &= \sum_{|i|=r} \sum_{|j|=s} a_{i,j} (F^*(q))^j (F_1(p))^i \\ &= \sum a_{i,j} \prod_{l=1}^k (F^*(q))^{j_l} \prod_{l=1}^k \left(\sum_{m=1}^k \alpha_{m,l}(q) p_m + \alpha_{0,l}(q) \right)^{i_l}. \end{aligned}$$

Comme $F^*(q)$ est de valuation 1, alors la valuation en q des $a_{i,j} (F^*(q))^j$ est s , lorsqu'on développe les termes $(\sum_{m=1}^k \alpha_{m,l}(q) p_m + \alpha_{0,l}(q))^{i_l}$, on obtient une somme de termes homogènes en (p) de degré k avec $|k| \leq r$, donc dans la décomposition de $\tilde{F}(u_r^s)$ en polynômes $v_{|k|}^t$ homogènes en chacune des variables (p) et (q) , n'apparaît que des termes $v_{|k|}^t$ tels que $t \geq s$ et $|k| \leq r$ soit $t - |k| \geq s - r$. Donc $d_*(\tilde{F}(u), 0) \leq d_*(u, 0)$. En remplaçant F par F^{-1} , on obtient l'inégalité inverse puisque si $d_{*'}$ est la distance définie avec les variables (p') et (q') , on a par définition de F , $d_{*'}(\tilde{F}(u), 0) = d_*(u, 0)$, donc:

$$d_{*'}(\tilde{F}^{-1}(v), 0) \leq d_{*'}(v, 0) \quad \text{ou} \quad d_*(\tilde{F}(u), 0) \geq d_*(u, 0).$$

Donc

$$d_*(\tilde{F}(u), 0) = d_*(u, 0). \quad \square$$

5.3. Equivalence des produits de Moyal

L'espace $\tilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson $\{, \}$, stable par le produit de Moyal défini dans la carte (p, q) par:

$$u \star v = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i)^n} \frac{1}{n!} P^n(u, v),$$

Cette série est en fait une somme finie. Elle est donc convergente. De même, le produit de Moyal défini dans la carte (p', q') converge et par suite comme les algèbres $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{A}}'$ sont en bijection isométrique nous avons:

PROPOSITION. — *Le produit de Moyal dépend d'une manière canonique de la base coexponentielle choisie, plus précisément si \star et \star' désignent les produits de Moyal définis respectivement par les cartes (p, q) et (p', q') , alors l'application de changement de coordonnées \tilde{F} de \tilde{A} dans elle même vérifie:*

$$\tilde{F}(u \star v) = \tilde{F}(u) \star' \tilde{F}(v).$$

Bibliographie

- [1] ARNAL (D.) et CORTET (J.C.). — *Représentations \star des groupes exponentiels*, Journal of Functional Analysis 92, 103-135 (1990).
- [2] AUSLANDER (L.) and KOSTANT (B.). — *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. 14, 255-354 (1971).
- [3] BAYEN (F.), FRONSDAL (M.), LICHNEROWICZ (A.) et STERNHEIMER (D.). — *Déformation and quantization*, Ann. Phys 1-111 (1978).
- [4] BEN AMMAR (M.). — *Déformations d'algèbres de Weyl*, C.R.A.S Paris, fascicule n° 11, (1998).
- [5] BERNAT (P.) et al. — *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Société Mathématique de France, Dunod, Paris (1972).
- [6] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative, chapitre 3: Graduations, filtrations et topologies*, Hermann, Paris (1962).
- [7] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes*, Gauthier Villars (1979).
- [8] PEDERSEN (N.V.). — *On the symplectic structure of coadjoint orbits of solvable Lie groups and application I*, Math. Ann. 633-669 (1988).
- [9] PEDERSEN (N.V.). — *Geometric quantization and the universal enveloping algebra of a nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. math. Soc. Volume 315, Number 2 (1989).
- [10] VERGNE (M.). — *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente*, Bull. Soc. Math. France 100, 301-335 (1972).