

CLAUS HERTLING

**Formules pour la multiplicité et le nombre de
Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 9, n^o 4
(2000), p. 655-670

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_4_655_0

© Université Paul Sabatier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ (*)

CLAUS HERTLING ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On établit des formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage saturé sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, à partir des données provenant d'une réduction. On définit un polynôme, qui généralise le polynôme caractéristique d'une singularité isolée d'une courbe plane.

ABSTRACT. — Formulas for the multiplicity and the Milnor number of any saturated foliation on $(\mathbb{C}^2, 0)$ are given, in terms of the data of a reduction. A polynomial is defined which generalizes the characteristic polynomial of an isolated plane curve singularity.

Dans [C-LN-S] une formule est donnée pour la multiplicité d'un feuilletage saturé sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ sans composante dicritique. Elle fait usage des données d'une réduction. Dans [A'C] une formule est donnée pour le nombre de Milnor d'une singularité isolée d'une courbe plane, également en fonction des données d'une réduction.

Ici les deux formules sont généralisées pour tous les feuilletages saturés sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. On trouve les données initiales dans [C-LN-S] et [M-M]. Le travail ici consiste à assembler et approfondir systématiquement les relations.

La formule pour le nombre de Milnor a, dans le cas d'une singularité de courbe, des raffinements : des formules pour le polynôme caractéristique de

(*) Reçu le 15 juillet 1999, accepté le 29 novembre 2000

(1) Mathematisches Institut der Universität Bonn, Beringstraße 1, 53115 Bonn, Allemagne
e-mail: hertling@math.uni-bonn.de

la monodromie [A'C] et pour les couples spectraux [S-S-S]. En généralisant ces formules on peut définir un polynôme et quelques couples de nombres pour des feuilletages. Mais la signification est obscure. On termine par quelques remarques sur les couples spectraux.

Un feuilletage holomorphe \mathcal{F} sur un germe (M, p) de variété complexe M de dimension 2 est donné par une forme holomorphe $\omega \in \Omega_{M,p}^1 - \{0\}$. Deux formes ω et ω' définissent le même feuilletage s'il existe une unité $u \in \mathcal{O}_{M,p}^*$ avec $\omega = u \cdot \omega'$.

Un feuilletage \mathcal{F} donné par ω est *saturé* si le germe

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, p) = (\{q \in M \mid \omega|_q = 0 \in T_{M,q}^*\}, p)$$

des points singuliers est $\{p\}$ ou l'ensemble vide. Si $\text{Sing}(\mathcal{F}, p)$ est une courbe, il existe une fonction $g \in \mathcal{O}_{M,p}$ tel que $\frac{\omega}{g}$ soit holomorphe et définisse un feuilletage holomorphe saturé, appelé la *saturation* de \mathcal{F} .

Une courbe $(S, p) \subset (M, p)$ est invariante par rapport à un feuilletage saturé \mathcal{F} , si $S - p$ consiste de feuilles de \mathcal{F} , i.e. si $\omega|_S$ est nulle aux points lisses de S . Les courbes invariantes $(S, p) \subset (M, p)$ sont les *séparatrices* de (\mathcal{F}, p) .

Un feuilletage \mathcal{F} sur (M, p) a une singularité réduite en p , s'il existent des coordonnées $(x, y) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telles que le 1-jet $j_1\omega$ de ω soit $j_1\omega = ydx$ (dans ce cas la singularité est une *selle-nœud*) ou $j_1\omega = \lambda_1 y dx - \lambda_2 x dy$ avec $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{>0}$ (comparer avec [C-LN-S] p 144).

On fera usage des données suivantes d'un feuilletage \mathcal{F} sur (M, p) . Pour la définition on choisit des coordonnées $(x, y) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ et une forme $\omega = a dx + b dy$, $a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}$, qui définit le feuilletage \mathcal{F} ; mais les données sont indépendantes des choix.

1) a) La multiplicité $\text{mult}(\mathcal{F}, p)$ d'un feuilletage \mathcal{F} (saturé ou non) en p :

$$\text{mult}(\mathcal{F}, 0) = \min(k \mid a, b \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^k) = \min(\text{ord}_0 a, \text{ord}_0 b),$$

b) la multiplicité modifiée $\widetilde{\text{mult}}(\mathcal{F}, p)$ d'un feuilletage \mathcal{F} (saturé ou non):

$$\widetilde{\text{mult}}(\mathcal{F}, 0) = \min(\text{mult}(\mathcal{F}, 0) + 1, \text{ord}_0(xa + yb) - 1),$$

elle vaut $\text{mult}(\mathcal{F}, p) + 1$ dans le cas dicritique et $\text{mult}(\mathcal{F}, p)$ autrement.

2) Le nombre de Milnor $\mu(\mathcal{F}, p)$ d'un feuilletage saturé \mathcal{F} :

$$\mu(\mathcal{F}, 0) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(a, b)} < \infty .$$

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

3) L'indice $\text{ind}(\mathcal{F}, S, p)$ d'une courbe lisse invariante (S, p) par rapport à un feuilletage saturé \mathcal{F} ([C-LN-S] p 152 et (avec un autre symbole) p 159):

$$\text{si } S = \{(x, y) \mid y = 0\}, \text{ alors } \text{ind}(\mathcal{F}, S, 0) = \text{ord}_0 b(x, 0).$$

(ne pas confondre avec l'indice de [C-S][Ca], qui sera utilisé implicitement dans la proposition 5.)

4) L'ordre tangent $\text{tan}(\mathcal{F}, S, p)$ d'une courbe lisse non invariante (S, p) par rapport à un feuilletage saturé \mathcal{F} ([C-LN-S] p 167):

$$\text{si } S = \{(x, y) \mid y = 0\}, \text{ alors } \text{tan}(\mathcal{F}, S, 0) = \text{ord}_0 a(x, 0).$$

Un feuilletage \mathcal{F}_0 sur une variété M_0 de dimension 2 est localement défini par des formes holomorphes modulo multiplication par des unités, ainsi que sa saturation.

Regardons un feuilletage saturé \mathcal{F}_0 sur M_0 . L'ensemble

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_0) = \{p \in M_0 \mid \mu(\mathcal{F}_0, p) \geq 1\} = \{p \in M_0 \mid \text{mult}(\mathcal{F}_0, p) \geq 1\}$$

des points singuliers de \mathcal{F}_0 est discret. Soit $E_1 : (M_1, D_1) \rightarrow (M_0, p_0)$ l'éclatement d'un point p_0 avec diviseur exceptionnel D_1 . L'éclatement induit un feuilletage non saturé $E_1^* \mathcal{F}_0$ sur M_1 ; sa saturation est désignée par \mathcal{F}_1 . Si D_1 n'est pas une courbe invariante de \mathcal{F}_1 , il est appelé *dicritique* (comparer avec 1)b)). La transformée stricte dans M_1 d'une courbe lisse $S \subset M_0$ passant par p_0 est aussi appelée S . Soit $\nu_1 := \text{mult}(\mathcal{F}_0, p_0)$.

LEMME 1 ([C-LN-S], [M-M])

i) Pour $q \in D_1 - \text{Sing}(\mathcal{F}_1)$

$$\nu_1 = \text{mult}(E_1^* \mathcal{F}_0, q). \quad (1)$$

ii)

$$\mu(\mathcal{F}_0, p_0) = \nu_1(\nu_1 - 1) - 1 + \sum_{q \in D_1} \mu(\mathcal{F}_1, q). \quad (2)$$

iii) Si D_1 n'est pas dicritique, alors

$$\nu_1 + 1 = \sum_{q \in D_1} \text{ind}(\mathcal{F}_1, D_1, q). \quad (3)$$

iv) Si D_1 est dicritique, alors

$$\nu_1 - 2 = \sum_{q \in D_1} \text{tan}(\mathcal{F}_1, D_1, q). \quad (4)$$

v) Pour une courbe lisse invariante $S \subset M_0$ passant par p_0 on a

$$1 - \nu_1 = \text{ind}(\mathcal{F}_1, S, S \cap D_1) - \text{ind}(\mathcal{F}_0, S, p_0) . \quad (5)$$

vi) Pour une courbe lisse non invariante $S \subset M_0$ passant par p_0 on a

$$-\nu_1 = \text{tan}(\mathcal{F}_1, S, S \cap D_1) - \text{tan}(\mathcal{F}_0, S, p_0) . \quad (6)$$

Preuve. — i) et ii) [M-M] pp 513+514; iii) [C-LN-S] p 160; iv) [C-LN-S] p 172; v) pour D_1 non dicritique on le trouve implicitement dans [C-LN-S] pp 160+161, pour D_1 quelconque on peut le voir sans difficulté avec les notations et calculs de [M-M] pp 513+514; vi) [C-LN-S] p 168. \square

Regardons une suite $(E_k)_{k=1..h}$ d'éclatements $E_k : (M_k, D_k) \rightarrow (M_{k-1}, p_{k-1})$. Le diviseur $D_i \subset M_i$ de E_i sera identifié avec sa transformée stricte dans M_k par $E_{i+1} \circ \dots \circ E_k$ pour $k > i$;

$$\begin{aligned} E(k) &:= E_1 \circ \dots \circ E_k : M_k \rightarrow M_0, \\ D(k) &:= E(k)^{-1}(p_0) = \bigcup_{i \leq k} D_i \subset M_k, \\ I(k) &:= \{i \leq k \mid D_i \text{ non dicritique}\}, \\ J(k) &:= \{i \leq k \mid D_i \text{ dicritique}\}. \end{aligned}$$

Naturellement on demande que $p_{k-1} \in D(k-1)$. Le saturé du feuilletage $E(k)^*\mathcal{F}_0$ sur M_k est désigné par \mathcal{F}_k .

La suite $(E_k)_{k=1..h}$ s'appelle *réduction luxueuse* de (\mathcal{F}_0, p_0) si elle vérifie les conditions i) et ii) de [C-LN-S] (p 167) et aussi iii) :

- i) toutes les singularités dans $\text{Sing}(\mathcal{F}_h) \cap D(h)$ sont réduites ;
- ii) tous les points $q \in D_i$ sur les composantes dicritiques $D_i \subset M_h$ satisfont $\text{tan}(\mathcal{F}_h, D_i, q) = 0$ (alors $\bigcup_{i \in J(h)} D_i \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_h) = \emptyset$, et les feuilles sont transverses aux composantes dicritiques $D_i \subset M_h$) ;
- iii) dans M_h les composantes dicritiques ne s'intersectent pas.

Il y a une réduction luxueuse minimale, unique modulo certains changements de l'ordre des éclatements (voir [C-LN-S] Ch. II, [M-M] App. I et les références dans [C-LN-S][M-M]). Mais ici on regarde aussi des réductions luxueuses qui ne sont pas minimales.

Soit (à comparer avec le lemme 1 i))

$$\begin{aligned} \nu_k &:= \widetilde{\text{mult}}(\mathcal{F}_{k-1}, p_{k-1}) \\ &= \text{mult}(E_k^*\mathcal{F}_{k-1}, q) \text{ pour } q \in D_k - \text{Sing}(\mathcal{F}_k) , \end{aligned} \quad (7)$$

$$m_k := \text{mult}(E(k)^*\mathcal{F}_0, q) \text{ pour } q \in D_k - \text{Sing}(\mathcal{F}_k) . \quad (8)$$

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

$P(i) := \{j \mid p_{i-1} \in D_j \subset M_{i-1}\}$ désigne les “parents” de D_i .
 $V_k(i) := \{j \leq k \mid i \neq j, D_i \cap D_j \neq \emptyset \text{ dans } M_k\}$ désigne les “voisins” de D_i dans M_k . Si \mathcal{F}_{k-1} est donné localement autour p_{k-1} par une forme saturée ω_{k-1} , alors on peut choisir des coordonnées locales centrées telles que le feuilletage non saturé $E(k-1)^*\mathcal{F}_0$ soit donné par la forme

$$\begin{aligned} x^{m_i} \omega_{k-1} & \quad \text{si } P(k) = \{i\}, \\ x^{m_i} y^{m_j} \omega_{k-1} & \quad \text{si } P(k) = \{i, j\}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a toujours

$$m_k = \nu_k + \sum_{i \in P(k)} m_i. \quad (9)$$

Enfin on a besoin des poids des composantes D_i ([C-LN-S] p 159):

$$\rho_1 := 1, \quad \rho_k := \sum_{i \in P(k)} \rho_i \quad \text{pour } k \geq 2. \quad (10)$$

Maintenant on a toutes les données et relations initiales qu'il faut et on peut obtenir plusieurs formules par récurrence.

Dans le cas d'une singularité isolée de courbe $f : (M_0, p_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le diviseur

$$(f \circ E(k))^{-1}(0) = \sum_{i \leq k} (m_i + 1) D_i + (\text{transformée stricte dans } M_k)$$

est équivalent au diviseur $(f \circ E(k))^{-1}(t)$ pour $t \neq 0$, et il a l'indice d'intersection 0 avec tous les D_i , $i \leq k$. Les formules (12) et (13) du lemme suivant généralisent cela. $I_k(D_i, D_i)$ désigne l'indice d'auto-intersection de D_i dans M_k .

LEMME 2. — Dans M_k on a pour chaque composante D_i ($i \leq k$):

$$0 = \delta_{1i} + \rho_i I_k(D_i, D_i) + \sum_{j \in V_k(i)} \rho_j, \quad (11)$$

pour D_i non dicritique :

$$0 = (m_i + 1) I_k(D_i, D_i) + \sum_{j \in V_k(i)} m_j + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \text{ind}(\mathcal{F}_k, D_i, q), \quad (12)$$

pour D_i dicritique :

$$0 = 2 + m_i I_k(D_i, D_i) + \sum_{j \in V_k(i)} m_j + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \tan(\mathcal{F}_k, D_i, q). \quad (13)$$

Preuve. — Récurrence sur k . Il faut regarder les différences des formules pour k et $k - 1$ et distinguer les cas $i = k$ et $i < k$. (11) résulte de (10), (12) de (3)+(5)+(9), (13) de (4)+(6)+(9). \square

Exemples. — On regarde deux cas particuliers de l'exemple iii) dans [C-LN-S] p 166. Le feuilletage \mathcal{F}_0 sur $(M, p) = (\mathbb{C}^2, 0)$ est donné par la forme

$$\omega^{(0)} = (x^4 y P(\frac{y}{x}) + x^6) dx - x^5 P(\frac{y}{x}) dy ,$$

où $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré 4. Pour le premier éclatement on a besoin que de la carte $(x_1, t_1) \mapsto (x_1, x_1 t_1) = (x, y)$ et on obtient

$$\omega^{(1)} = x_1^6 (dx_1 - P(t_1) dt_1) .$$

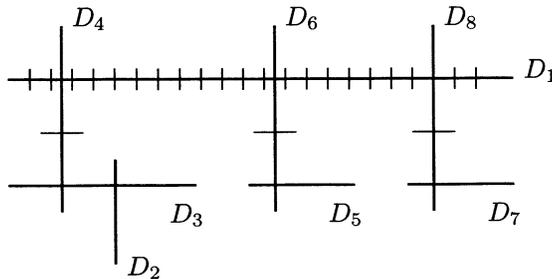
La première composante exceptionnelle D_1 est la seule qui est dicritique. Il n'y a pas de selle-nœud. On a $\text{mult}(F_0, 0) = 5$ et

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}_0, 0) &= \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x, x^4 y P(\frac{y}{x}) + x^6)} + \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^4 P(\frac{y}{x}), x^4 y P(\frac{y}{x}) + x^6)} \\ &= 5 + 24 = 29 . \end{aligned}$$

Mais la réduction luxueuse dépend des multiplicités des zéros de $P(z)$.

Premier exemple. — $P(z) = z^2(z^2 - 1)$.

Une réduction luxueuse avec $h = 8$ est indiquée par le diagramme suivant.



Les segments courts indiquent les séparatrices isolées, qui intersectent $D(h)$, et quelques-unes des séparatrices par la composante dicritique D_1 . Les nombres $\varepsilon_i^{(h)}$ et $e_i^{(h)}$ dans la table suivante seront définis dans les Théorèmes 3 et 4.

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ν_i	6	0	1	1	0	1	0	1
m_i	6	6	13	20	6	13	6	13
ρ_i	1	1	2	3	1	2	1	2
$\varepsilon_i^{(h)}$	-1	0	0	1	0	1	0	1
$-2 + e_i^{(h)}$	0	-1	0	1	-1	1	-1	1

Le polynôme $p_{(\mathcal{F}_0, 0)}$ du Théorème 4 d)+e) est ici

$$p_{(\mathcal{F}_0, 0)} = (t-1)(t^{21}-1)(t^{14}-1)^2(t^7-1)^{-3} = \Phi_1 \cdot \Phi_2^2 \cdot \Phi_3 \cdot \Phi_{14}^2 \cdot \Phi_{21},$$

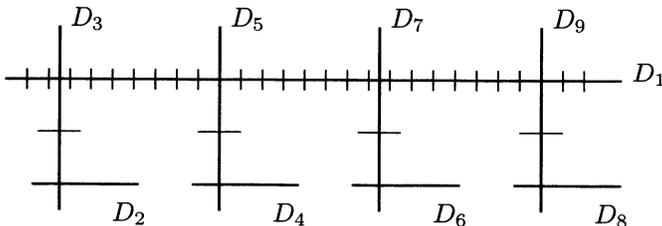
Φ_k dénote le polynôme cyclotomique des racines primitives d'ordre k .

Les formules suivantes des couples spectraux ne sont que spéculation!
 Pour la définition difficile il faut comparer la remarque à la fin avec [S-S-S]
 Ch. 2.

$$\begin{aligned} Spp_2^{(i)} &= (0; 1) + a + c^{(i)}, \quad i = 1, 2, \\ a &= \sum_{s \in \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}} \left[\left(\frac{-s}{21}, 1 \right) + \left(\frac{s}{21}, 1 \right) \right] \\ &\quad + \sum_{s \in \{1, 3, 5\}} 2 \cdot \left[\left(\frac{-s}{14}, 1 \right) + \left(\frac{s}{14}, 1 \right) \right], \\ c^{(1)} &= \left(\frac{-2}{3}, 2 \right) + \left(\frac{-1}{3}, 2 \right) + 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}, 2 \right), \\ c^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-2}{3}, 2 \right) + \left(\frac{-1}{3}, 2 \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) + \left(\frac{2}{3}, 0 \right) \right] + \left(\frac{-1}{2}, 2 \right) + \left(\frac{1}{2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Deuxième exemple. — $P(z) = z(z+2)(z^2-1)$.

On obtient une réduction luxueuse avec $h = 9$.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν_i	6	0	1	0	1	0	1	0	1
m_i	6	6	13	6	13	6	13	6	13
ρ_i	1	1	2	1	2	1	2	1	2
$\varepsilon_i^{(h)}$	-2	0	1	0	1	0	1	0	1
$-2 + e_i^{(h)}$	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

$$p_{(\mathcal{F}_0, 0)} = (t-1)(t^{14}-1)^4(t^7-1)^{-4} = \Phi_1 \cdot \Phi_2^4 \cdot \Phi_{14}^4,$$

$$Spp_2^{(i)} = (0; 1) + \sum_{s \in \{1, 3, 5\}} 4 \cdot [(\frac{-s}{14}, 1) + (\frac{s}{14}, 1)] + c^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$c^{(1)} = 4 \cdot (\frac{-1}{2}, 2),$$

$$c^{(2)} = 2 \cdot [(\frac{-1}{2}, 2) + (\frac{1}{2}, 0)],$$

(fin des exemples).

Camacho, Lins Neto et Sad donnent dans [C-LN-S] (Théorème 1) une formule pour $\text{mult}(\mathcal{F}_0, p_0)$ dans le cas sans composante dicritique. La partie a) du théorème 3 est une généralisation pour les feuilletages saturés quelconques \mathcal{F}_0 sur (M_0, p_0) .

THÉORÈME 3. — a) Pour chaque $k = 1, \dots, h$ on a

$$\text{mult}(\mathcal{F}_0, p_0) + 1 = \sum_{i \leq k} \rho_i \cdot \varepsilon_i^{(k)}, \quad (14)$$

ici, pour D_i non dicritique, $\varepsilon_i^{(k)}$ est :

$$\varepsilon_i^{(k)} = -|V_k(i) \cap I(k)| + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \text{ind}(\mathcal{F}_k, D_i, q), \quad (15)$$

et pour D_i dicritique :

$$\varepsilon_i^{(k)} = 2 - |V_k(i) \cap I(k)| + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \tan(\mathcal{F}_k, D_i, q). \quad (16)$$

b) Si $(E_k)_{k=1..h}$ est une réduction luxueuse de (\mathcal{F}_0, p_0) , le nombre $\sum_{i: \rho_i = \rho} \varepsilon_i^{(h)}$ (pour $\rho \in \mathbb{N}$ quelconque) ne change pas par un autre éclatement. Alors l'élément

$$\sum_{\rho \in \mathbb{N}} (\sum_{i: \rho_i = \rho} \varepsilon_i^{(h)}) \cdot [\rho] \in \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \quad (17)$$

est indépendant du choix de la réduction luxueuse de (\mathcal{F}_0, p_0) .

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

c) ([C-LN-S] Théorème 3, p. 163) Si (\mathcal{F}_0, p_0) est un feuilletage sans composantes dicritiques et sans selle-nœuds sur M_0 , le nombre $\sum_{i:\rho_i=\rho} \varepsilon_i^{(h)}$ est le nombre de séparatrices de (\mathcal{F}_0, p_0) , qui ont la multiplicité ρ comme singularités de courbes.

d) Chaque composante D_i non dicritique satisfait $\varepsilon_i^{(k)} \geq 0$.

e) Si $h \geq 2$ et $2 \leq k \leq h$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} \text{mult}(\mathcal{F}_0, p_0) &= \varepsilon_1^{(1)} \geq \sum_{i \leq k-1} \varepsilon_i^{(k-1)} \geq \sum_{i \leq k} \varepsilon_i^{(k)} \\ &\geq \sum_i \varepsilon_i^{(h)} \geq 1 + |J(h)|. \end{aligned} \quad (18)$$

Preuve. — a) On peut réécrire les $\varepsilon_i^{(k)}$ avec (12) et (13), tels qu'ils ne contiennent plus "ind" et "tan", mais $I_k(D_i, D_i)$. Dans la somme on peut éliminer ces $I_k(D_i, D_i)$ avec (11) et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k} \rho_i \cdot \varepsilon_i^{(k)} &= \sum_{i \in I(k)} (m_i + 1) \cdot \delta_{1i} + \sum_{i \in J(k)} m_i \cdot \delta_{1i} \\ &= \text{mult}(\mathcal{F}_0, p_0) + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

b) Si on éclate dans M_h un point d'intersection $D_i \cap D_j$ à un diviseur D_{h+1} (toujours non dicritique), alors $\varepsilon_{h+1}^{(h+1)} = 0$ et $\varepsilon_i^{(h)} = \varepsilon_i^{(h+1)}$, $\varepsilon_j^{(h)} = \varepsilon_j^{(h+1)}$. Si on éclate un point qui n'est que dans D_i , alors $\rho_{h+1} = \rho_i$ et $\varepsilon_i^{(h+1)} + \varepsilon_{h+1}^{(h+1)} = \varepsilon_i^{(h)}$.

c) On fixe une séparatrice avec multiplicité ρ comme singularité de courbe. On peut regarder $(E_k)_{k=1..h}$ comme réduction de cette séparatrice et appliquer (14). La transformée stricte de la séparatrice n'intersecte qu'une composante D_i . On obtient $\varepsilon_j^{(h)} = 0$ pour $j \neq i$ et $\varepsilon_i^{(h)} = 1$, alors $\rho_i = \rho$.

d) Tous les points $D_i \cap D_j$ avec $i, j \in I(h)$ ont $\text{ind}(\mathcal{F}_k, D_i, D_i \cap D_j) \geq 1$.

e) (12) et (13) donnent

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k} \varepsilon_i^{(k)} &= \sum_{i \in I(k)} (m_i + 1)(-I_k(D_i, D_i) - |V_k(i)|) \\ &+ \sum_{i \in J(k)} m_i(-I_k(D_i, D_i) - |V_k(i)|); \end{aligned} \quad (20)$$

on regarde la différence pour k et $k - 1$ et on applique (9),

$$\sum_{i \leq k} \varepsilon_i^{(k)} - \sum_{i \leq k-1} \varepsilon_i^{(k-1)} = (1 - |P(k)|) \cdot (\nu_k - 1 - |k \cap J(k)| + |P(k) \cap J(k)|) \quad (21)$$

En discutant les différents cas on voit que c'est toujours ≤ 0 . Dans le cas général l'inégalité $\sum_i \varepsilon_i^{(h)} \geq 1 + |J(h)|$ résultera du théorème 4 f)+g). Dans le cas non dicritique ($J(h) = \emptyset$) elle résulte déjà de (14) et de la partie d) $\varepsilon_i^{(h)} \geq 0$. \square

A'Campo donne dans [A'C] une formule pour le polynôme caractéristique de la monodromie d'une singularité isolée d'une courbe plane, avec des données provenant d'une réduction. Le degré donne une formule pour le nombre de Milnor. La partie b) du théorème suivant généralise cette formule pour le cas d'un feuilletage quelconque comme ci-dessus. Pour cela on établit dans la partie a) une formule qui est vraie pour chaque pas d'une suite d'éclatements $(E_k)_{k=1..h}$. En généralisant la formule d'A'Campo on peut définir une fonction rationnelle; d'après la partie e) celle-ci est toujours un polynôme.

THÉORÈME 4. — a) Pour chaque $k = 1, \dots, h$ on a

$$\mu(\mathcal{F}_0, p_0) = -k + \sum_{q \in D(k)} \mu(\mathcal{F}_k, q) + \sum_{i=1}^k \nu_i(\nu_i - 1) \quad (22)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \nu_i(\nu_i - 1) &= \sum_{i \in I(k)} m_i(-2 + e_i^{(k)}) \\ &+ \sum_{i \in J(k)} (m_i + 1)(-2 + e_i^{(k)}) + 2N_{dic}^{(k)}; \end{aligned} \quad (23)$$

ici $e_i^{(k)}$ est, pour D_i non dicritique,

$$e_i^{(k)} = |V_k(i) \cap J(k)| + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \text{ind}(\mathcal{F}_k, D_i, q) = \varepsilon_i^{(k)} + |V_k(i)| \quad (24)$$

et pour D_i dicritique

$$e_i^{(k)} = 2 + |V_k(i) \cap J(k)| + \sum_{q \in D_i \subset M_k} \tan(\mathcal{F}_k, D_i, q) = \varepsilon_i^{(k)} + |V_k(i)|; \quad (25)$$

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

$N_{dic}^{(k)}$ est le nombre des composantes connexes de $\bigcup_{i \in J(k)} D_i \subset M_k$, c.à.d.

$$2N_{dic}^{(k)} = 2|J(k)| - \sum_{i \in J(k)} |V_k(i) \cap J(k)|.$$

b) Si $(E_k)_{k=1..h}$ est une réduction luxueuse de (\mathcal{F}_0, p_0) , alors $-2 + e_i^{(h)} = 0$ pour $i \in J(h)$ et

$$\mu(\mathcal{F}_0, p_0) = 1 + \sum_i (m_i + 1)(-2 + e_i^{(h)}) + \sum_{q \in SS(\mathcal{F}_h)} (\mu(\mathcal{F}_h, q) - 1); \quad (26)$$

ici $SS(\mathcal{F}_h)$ est l'ensemble des selle-nœuds dans $\text{Sing}(\mathcal{F}_h) \cap D(h)$, qui n'ont pas une séparatrice holomorphe avec valeur propre 0 ou pour lesquels cette séparatrice n'est pas contenue dans le diviseur $D(h)$.

c) L'élément

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} (\delta_{1m} + \sum_{i: m_i+1=m} (-2 + e_i^{(h)})) \cdot [m] \in \mathbb{Z}[\mathbb{N}] \quad (27)$$

est indépendant du choix de la réduction luxueuse.

d) La fonction rationnelle

$$p_{(\mathcal{F}_0, p_0)}(t) := (t-1) \prod_i (t^{m_i+1} - 1)^{-2+e_i^{(h)}} \quad (28)$$

a une unique décomposition en facteurs $(t^m - 1)$, et le coefficient de $[m]$ dans l'élément de c) est la multiplicité du facteur $(t^m - 1)$ dans $p_{(\mathcal{F}_0, p_0)}(t)$.

e) Cette fonction $p_{(\mathcal{F}_0, p_0)}(t)$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$.

f) La multiplicité du facteur $(t-1)$ dans $p_{(\mathcal{F}_0, p_0)}(t)$ est $1 + \sum_i (-2 + e_i^{(h)}) \geq |J(h)|$.

g) Pour chaque $k = 1, \dots, h$ on a

$$1 + \sum_i (-2 + e_i^{(k)}) = -1 + \sum_i \varepsilon_i^{(k)} \geq |J(h)|. \quad (29)$$

Remarque. — Dans le cas d'une singularité isolée de courbe plane le polynôme $p_{(\mathcal{F}_0, p_0)}(t)$ est le polynôme caractéristique de la monodromie [A'C]. On ne sait pas, si le polynôme a une signification comparable pour des feuilletages quelconques, ni si l'on peut ajouter une partie appropriée pour un point $q \in SS(\mathcal{F}_h)$: peut-être

$$(t-1)^{\mu(\mathcal{F}_h, q)-1} \quad (30)$$

ou

$$\frac{t^{\mu(\mathcal{F}_h, q)} - 1}{t - 1}. \quad (31)$$

Preuve du théorème 4. — a) (22) résulte par récurrence de (2). Il reste à prouver (23). On peut réécrire les $e_i^{(k)}$ avec (12) et (13), tels qu'ils ne contiennent plus "ind" et "tan", mais $I_k(D_i, D_i)$. En changeant l'ordre des termes des sommes, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I(k)} m_i(-2 + e_i^{(k)}) + \sum_{i \in J(k)} (m_i + 1)(-2 + e_i^{(k)}) + 2N_{dic}^{(k)} \\ &= \sum_{i \leq k} (-m_i(m_i + 1)I_k(D_i, D_i) - 2m_i - m_i \sum_{j \in V_k(i)} m_j). \end{aligned} \quad (32)$$

On voit facilement avec (9), que la différence des termes pour k et $k - 1$ est justement $\nu_k(\nu_k - 1)$.

b) Si $(E_k)_{k=1..h}$ est une réduction luxueuse, alors $N_{dic}^{(h)} = |J(h)|$ et $e_i^{(h)} = 2$ pour $i \in J(h)$. Pour un selle-nœud $q \in D(h) - SS(\mathcal{F}_h)$, la séparatrice associée à la valeur propre 0 est un diviseur D_i et satisfait $\text{ind}(\mathcal{F}_h, D_i, q) = \mu(\mathcal{F}_h, q)$. Le graphe de la réduction est un arbre. Avec ces faits on déduit facilement (26) de (22) et (23).

c) Semblable au théorème 3 b).

d) Simple.

e)+f) Après la proposition 5.

g) L'équation résulte de la définition de $e_i^{(k)}$ et $\varepsilon_i^{(k)}$ et du fait que le graphe de la réduction est un arbre. L'inégalité résulte de f) et de (18). \square

Pour la preuve du théorème 4 e)+f) on a besoin d'une variante des résultats principaux de [C-S][Ca]. Regardons une réduction luxueuse $(E_k)_{k=1..h}$ pour un feuilletage (\mathcal{F}_0, p_0) sur (M_0, p_0) comme ci-dessus. Le résultat principal de [C-S] est l'existence d'une séparatrice (S, p) de (M_h, \mathcal{F}_h) avec $p \in D(h)$, $S \not\subset D(h)$, dans le cas non dicritique. La Proposition 5 en est une petite généralisation pour le cas dicritique. On regarde la décomposition de l'union des composantes non dicritiques en composantes connexes C_α ,

$$\bigcup_{i \in I(h)} D_i = \bigcup_{\alpha} C_\alpha.$$

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

PROPOSITION 5. — *Pour chaque composante C_α il y a au moins une séparatrice (S_α, q_α) de (M_h, \mathcal{F}_h) avec $q_\alpha \in C_\alpha$, $S_\alpha \not\subset D(h)$.*

Preuve. — Le graphe de la composante C_α est un arbre et la restriction de la forme d'intersection à ce dernier est définie négative. Un résultat de [Ca] dit que dans cette situation il existe une séparatrice (S_α, q_α) avec $q_\alpha \in C_\alpha$, $S_\alpha \not\subset C_\alpha$. On a $S_\alpha \not\subset D(h)$ à cause de la condition ii) d'une réduction luxueuse. (Avec un résultat de Grauert Camacho obtient le résultat principal de [Ca]: le germe (V, p) de surface à singularité normale avec un feuilletage lisse sur $V - \{0\}$ contient une séparatrice $(S, p) \subset (V, p)$, si le graphe d'une résolution de (V, p) est un arbre.) \square

Preuve du théorème 4 e)+f)

e) On fixe $m \in \mathbb{N}$. Il faut prouver $\delta_{1m} + \sum_{i:m|m_i+1} (-2 + e_i^{(h)}) \geq 0$. On regarde la décomposition de l'union des composantes D_i non dicritiques avec $m|m_i + 1$ en composantes connexes $C_\beta^{(m)}$,

$$\bigcup_{i \in I(h): m|m_i+1} D_i = \bigcup_{\beta} C_\beta^{(m)}.$$

Le graphe d'un $C_\beta^{(m)}$ est un arbre. Avec (24) on obtient l'estimation

$$\sum_{D_i \subset C_\beta^{(m)}} (-2 + e_i^{(h)}) \geq -2 + |\{D_j \not\subset C_\beta^{(m)} \mid D_j \cap C_\beta^{(m)} \neq \emptyset\}|, \quad (33)$$

et on a l'égalité, si et seulement si (34) et (35) sont satisfaites,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_h) \cap D_i \subset \bigcup_{j \in V_h(i)} D_i \cap D_j \quad \text{pour } D_i \subset C_\beta^{(m)}, \quad (34)$$

$$\text{ind}(\mathcal{F}_h, D_i, q) \leq 1 \quad \text{pour } q \in D_i \subset C_\beta^{(m)}. \quad (35)$$

Fixons β et supposons que $\sum_{D_i \subset C_\beta^{(m)}} (-2 + e_i^{(h)}) < 0$.

Alors $|\{D_j \not\subset C_\beta^{(m)} \mid D_j \cap C_\beta^{(m)} \neq \emptyset\}| \leq 1$ et $= 1$ seulement si (34) et (35) sont satisfaites.

Assertion. — Il existe un C_α avec $C_\beta^{(m)} = C_\alpha$.

Dans le cas contraire on aurait une composante non dicritique D_i avec $\{D_i\} = \{D_j \not\subset C_\beta^{(m)} \mid D_j \cap C_\beta^{(m)} \neq \emptyset\}$. Avec (35) et (12) on obtiendrait $m|m_i + 1$ et $D_i \subset C_\beta^{(m)}$, ce qui est une contradiction. \square

Alors $C_\beta^{(m)} = C_\alpha$ pour un α . A cause de la proposition 5, la condition (35) n'est pas satisfaite pour C_α . L'inégalité (33) est stricte. On obtient $\sum_{D_i \subset C_\alpha} (-2 + e_i^{(h)}) = -1$ et $C_\alpha = D(h)$. Il existe exactement une singularité $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}_h) \cap D(h)$ avec $p \notin \bigcup_{i \neq j} D_i \cap D_j$; elle satisfait $\text{ind}(\mathcal{F}_h, D_i, p) = 1$. Encore une fois avec (12) on obtient $m|1$, c.à.d. $m = 1$.

Conclusion. — Pour $m > 1$ on a $\sum_{D_i \subset C_\beta^{(m)}} (-2 + e_i^{(h)}) \geq 0$ pour tous les composantes $C_\beta^{(m)}$; pour $m = 1$ on a $1 + \sum_i (-2 + e_i^{(h)}) \geq 0$.

f) Soit $J(h) \neq \emptyset$. A cause de la proposition 5, l'inégalité (33) est stricte pour chaque $C_\alpha = C_\beta^{(1)}$, alors

$$\begin{aligned} 1 + \sum_i (-2 + e_i^{(h)}) &\geq 1 + \sum_\alpha (-1 + |\{j \in J(h) \mid D_j \cap C_\alpha \neq \emptyset\}|) \\ &= |J(h)| \end{aligned}$$

□

Remarque sur les couples spectraux. — Il existe un raffinement de la formule d' A'Campo pour le polynôme caractéristique d'une monodromie d'une singularité isolée d'une courbe plane. Schrauwen, Steenbrink et Stevens donnent dans [S-S-S] (Théorème 2.1) une formule pour les couples spectraux d'une singularité (isolée ou non) de courbe. Ces sont des couples dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ avec multiplicités, auxquels on associe un élément $Spp = \sum_{\alpha, w} Spp(\alpha, w) \cdot (\alpha, w)$ dans $\mathbb{Z}[\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}] \cong \{g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid |g^{-1}(\mathbb{Z} - \{0\})| < \infty\}$. Ils viennent de la structure de Hodge mixte et de la monodromie sur H^* (fibre de Milnor). Les nombres $e^{2i\pi\alpha}$ sont des valeurs propres de la monodromie, les nombres w viennent de la filtration par le poids. Spp satisfait

$$\begin{aligned} Spp(\alpha, w) &= 0 \text{ pour} \\ (\alpha, w) &\notin (-1, 0) \times \{2\} \cup (-1, 1) \times \{1\} \cup (0, 1) \times \{0\} \end{aligned} \quad (36)$$

et la symétrie

$$Spp(\alpha, w) = Spp(1 - w - \alpha, w) . \quad (37)$$

Dans le cas des singularités isolées de courbes on a

$$Spp \in \mathbb{N}_0[\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}] \text{ et } \sum_{\alpha, w} Spp(\alpha, w) = \mu , \quad (38)$$

et de plus la symétrie

$$Spp(\alpha, w) = Spp(-\alpha, 2 - w) . \quad (39)$$

Formules pour la multiplicité et le nombre de Milnor d'un feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

Dans [S-S-S] (2.1) Spp est déterminé par le graphe de la réduction et par les multiplicités, avec contributions des composantes exceptionnelles, des arêtes entre ces composantes et des arêtes de la transformée stricte. La partie d'une composante D_i et les moitiés des parties des arêtes de D_i correspondent au facteur $(t^{m_i+1} - 1)^{-2+e_i^{(h)}}$ dans (28).

Dans le cas d'une singularité non isolée les contributions qui brisent la symétrie (39) sont exactement les contributions des arêtes des composantes de la transformée stricte de multiplicité > 1 .

La preuve fait usage des résultats difficiles de Steenbrink sur les structures de Hodge mixtes de singularités. Mais dans le cas de singularités isolées il y a une interprétation un peu plus simple. D'après [S-S-S] les couples spectraux sont équivalents à la forme de Seifert réelle. Du Bois et Hunault [DH] ont donné un système d'invariants complet pour la forme de Seifert rationnelle avec les données d'une réduction.

A la vue de (26) et (28) on peut spéculer sur des généralisations de Spp pour les feuilletages. Il n'est pas clair de voir la contribution des selle-nœuds $p \in SS(\mathcal{F}_h)$; le choix

$$Spp_1^{(1)} = (\mu(\mathcal{F}_h, p) - 1) \cdot (0; 1) \quad (40)$$

s'arrange avec (30),(36) et les symétries (37),(39); les choix

$$Spp_1^{(2)} = \sum_{i=1}^{\mu(p)-1} \left(\frac{1}{k} - 1; 2\right) \text{ et } Spp_1^{(3)} = \sum_{i=1}^{\mu(p)-1} \left(\frac{1}{k}, 0\right) \quad (41)$$

s'arrangent avec (31),(36) et la symétrie (37).

Pour la contribution de (28) on applique les formules de [S-S-S] (Théorème (2.1)) en remplaçant les multiplicités dans [S-S-S] Ch. 2 par les nombres $m_i + 1$ pour $i \in I(h)$ et m_i pour $i \in J(h)$.

Dans cette façon on obtient un $Spp_2 \in \mathbb{N}_0[\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}]$ avec les deux symétries (37) et (39) dans le cas sans composante dicritique.

Dans le cas avec composantes dicritiques celles-ci ne devraient pas contribuer directement (seulement par leur influence aux formules des autres composantes et des arêtes). On pourrait traiter les arêtes des composantes dicritiques comme on traite les arêtes des composantes de la transformée stricte avec multiplicités > 1 dans le cas des singularités non isolées. On obtient un $Spp_2^{(1)}$ non seulement de $\mathbb{Z}[\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}]$, mais $\mathbb{N}_0[\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}]$ (c'est un raffinement du théorème 4 e)) avec la symétrie (37). Si on veut traiter les

