ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDESSELAM BOUARICH

Exactitude à gauche du foncteur $H_b^n(-, \mathbf{R})$ de cohomologie bornée réelle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 10, nº 2 (2001), p. 255-270

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2001_6_10_2_255_0>

© Université Paul Sabatier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n° 2, 2001
pp. 255–270

Exactitude à gauche du foncteur $H_b^n(-,\mathbb{R})$ de cohomologie bornée réelle (*)

ABDESSELAM BOUARICH [1]

RÉSUMÉ. — On considère la classe Λ des groupes discrets Π tels que tout homomorphisme surjectif $\sigma : \Gamma \to \Pi$ induise des homomorphismes injectifs $0 \to H_b^*(\Pi,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^*(\Gamma,\mathbb{R})$ en cohomologie bornée.

La classe Λ contient la classe $\mathcal{M}$ des groupes discrets moyennables et les groupes libres non abéliens.

Dans cet article on étudie la stabilité de la classe Λ pour les opérations suivantes: passage au quotient par un sous-groupe distingué moyennable, extension d'un groupe moyennable par un élément de la classe Λ, et produit libre de groupes moyennables. Nous en déduisons l'appartenance à la classe Λ des groupes fuchsien et des groupes de variétés de dimension trois fibrées sur le cercle et fibrées de Seifert.

ABSTRACT. — Let Λ be the class of discrete groups such that any surjective homomorphism $\sigma : \Gamma \to \Pi$ with $\Pi \in \Lambda$ induces injective homomorphisms of vector spaces, $0 \to H_b^*(\Pi,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^*(\Gamma,\mathbb{R})$. Note that Λ contains the class of non abelian free groups and the class of amenable groups.

In this paper, we study the stability of Λ under the following operations: factorization by amenable normal subgroup, extension of amenable group by element of Λ, and free product of amenable groups. As a consequence, we show that Λ contains the Fuchsian groups, the fundamental groups of 3-manifolds fibered over the circle, and the fundamental groups of closed 3-manifolds modeled on the following seven geometries: $\mathbb{R}^3$, Nil^3, S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ and Sol^3.

(*) Reçu le 30 novembre 1999, accepté le 31 août 2001

(1) Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 523 Beni Mellal, tél. 48 51 12/22/82, fax 48 52 01, Maroc/Morocco.
e-mail: bouarich@fstbm.ac.ma

1. Introduction

Etant donné un groupe discret G, on désigne par $C_b^n(G;\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des n-cochaînes bornées, $c : G^n \to \mathbb{R}$. La différentielle de degré $n \geqslant 0$ d'une n-cochaîne c est définie par,

1. Pour $n \geqslant 1$ et pour tout $(g_0, g_1, \ldots, g_n) \in G^{n+1}$ on pose,

$$\begin{aligned} d_n c(g_0, g_1, \ldots, g_n) &= c(g_1, \ldots, g_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i c(g_0, g_1, \ldots, g_{i-1}g_i, g_{i+1}, \ldots, g_n) \\ &+ (-1)^{n-1} c(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

2. $d_0 : C_b^0(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est l'application nulle.

L'homologie du complexe différentiel $(C_b^*(G;\mathbb{R}), d_*)$ s'appelle la cohomologie bornée réelle du groupe G au sens de Gromov (cf. [12], [14]) et elle est notée $H_b^*(G, \mathbb{R})$.

DÉFINITION 1.— *On dit qu'un groupe discret G est moyennable s'il existe une forme linéaire $\mu : C_b^1(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positive, non nulle et G-invariante. C'est-à-dire pour tout $g \in G$ et pour toute fonction positive $u \geqslant 0$ bornée sur G on a, $\mu(g \star u) = \mu(u) \geqslant 0$; où $g \star u(x) = u(g^{-1}x)$.*

On désigne par $\mathcal{M}$ la classe des groupes discrets moyennables. Il est connu que la classe $\mathcal{M}$ est héréditaire et qu'elle est stable par passage au quotient et par limite inductive (cf. [11]).

Les deux propositions suivantes (cf. [12] et [14]) seront souvent utilisées dans ce travail.

PROPOSITION 2.— *Soit G un groupe discret. Soit A un sous-groupe moyennable et normal dans G. Alors la surjection canonique $q : G \to \dfrac{G}{A}$ induit un isomorphisme en cohomologie bornée réelle. En particulier si G est moyennable, $H_b^n(G, \mathbb{R}) = 0$ si $n \geqslant 1$.*

PROPOSITION 3.— *Soit G un groupe discret. Soit H un sous-groupe normal dans G tel que le groupe quotient $\dfrac{G}{H}$ soit moyennable. Alors l'injection canonique $i : H \to G$ induit une injection en cohomologie bornée réelle.*

DÉFINITION 4.— *On dit que l'extension de groupes discrets,* $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$, *est à holonomie moyennable si la représentation extérieure* $\theta : \Pi \to Out(G)$ *qui lui est associée a une image moyennable.*

Dans la section 2 nous démontrons notre premier résultat principal :

THÉORÈME 5.— *Soit* $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ *une extension de groupes discrets à holonomie moyennable. Alors pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$, *la surjection* $\sigma : \Gamma \to \Pi$ *induit une injection,* $0 \to H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^n(\Gamma,\mathbb{R})$.

DÉFINITION 6.— *On définit la classe* Λ *des groupes discrets* Π *tels que tout homomorphisme surjectif* $\sigma : \Gamma \to \Pi$ *induise des homomorphismes injectifs* $0 \to H_b^*(\Pi,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^*(\Gamma,\mathbb{R})$.

REMARQUE 7.— *La classe* Λ *contient la classe* $\mathcal{M}$ *des groupes discrets moyennables et les groupes libres non abéliens.*

COROLLAIRE 8.— *Soit* $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ *une extension de groupes discrets à holonomie moyennable. Si le groupe* Γ *est dans la classe* Λ *alors il en est de même pour le groupe* Π.

Dans la section 3, nous nous proposons de démontrer que la classe Λ est stable par les opérations suivantes : factorisation par un sous-groupe normal moyennable, extension par un groupe moyennable, produit libre avec des groupes moyennables. Ces opérations nous permettrons d'exhiber plusieurs exemples de groupes appartenant à la classe Λ, notamment:

1. les groupes fuchsiens sont dans la classe Λ, et en particulier les groupes fondamentaux des surfaces fermées;
2. le groupe fondamental d'une variété différentiable fermée M^3 est dans la classe Λ, si M^3 est modelée sur l'une des structures géométriques: $\mathbb{E}^3, Nil, S^2 \times \mathbb{R}, S^3, \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou Sol^3;
3. le groupe fondamental d'une variété M^3 fibrée sur le cercle S^1 est dans la classe Λ. Dans cette famille d'exemples il y a des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques. En effet, si la monodromie de la fibration $M^3 \to S^1$ est pseudo-Anosov, la variété M^3 admet une structure hyperbolique d'aprés le Théorème de l'hyperbolisation de W. Thurston [18] [23], [21]).

Quant à la question de stabilité de la classe Λ par produit libre elle reste ouverte.

Remerciement. — Je tiens à remercier le Professeur Pierre DE LA HARPE de l'Université de Genève pour ses critiques et ses conseils qui ont permis d'améliorer la forme et les énoncés de certains résultats de la version préliminaire de ce travail. Je tiens aussi à remercier le rapporteur qui m'a permis de nettoyer la preuve du résultat principal de la section 2.

2. Extension de groupes à holonomie moyennable

Etant donnée une extension de groupes discrets $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$, on lui associe un homomorphisme de groupes $\theta : \Pi \to Out(G)$ qu'on appelera ici représentation "*d'holonomie* ". Quand le groupe image $Im(\theta)$ est moyennable on dit que l'extension donnée est à "*holonomie moyennable*". Notons que si le groupe G n'a pas de centre alors l'extension $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ est induite par l'extension $1 \to G \xrightarrow{i} Aut(G) \xrightarrow{q} Out(G) \to 1$ via le produit fibré de la représentation d'holonomie $\theta : \Pi \to Out(G)$. Par conséquent, si on suppose $\theta(\Pi) = \{1\}$ (holonomie triviale) il en résulte que l'extension donnée est scindée.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ *une extension de groupes discrets à holonomie moyennable. Alors pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$, *l'homomorphisme surjectif* $\sigma : \Gamma \to \Pi$ *induit un homomorphisme injectif,* $0 \to H_b^n(\Pi, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma_b} H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$.

Preuve. — Avec les notations ci-dessus on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \to & Ker(\theta) \times_{j=\sigma} \Gamma & \xrightarrow{pr_\Gamma} & \Gamma & \xrightarrow{\sigma} & Im(\theta) & \to 1 \\
& {\scriptstyle pr_{Ker(\theta)}} \downarrow & & \sigma \downarrow & & \| & \\
1 \to & Ker(\theta) & \xrightarrow{j} & \Pi & \xrightarrow{\theta} & Im(\theta) & \to 1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

où $j : Ker(\theta) \to \Pi$ désigne l'injection canonique du noyau de θ et $Ker(\theta) \times_{j=\sigma} \Gamma$ désigne le produit fibré des homomorphismes j et σ au-dessus du groupe Π.

Dans cette preuve nous considérons d'abord le cas particulier suivant:

2.1. Le groupe G n'a pas de centre

Puisque dans ce cas le groupe G est sans centre et que l'holonomie de la première ligne verticale (depuis la gauche) est triviale, il en résulte que

$pr_{Ker(\theta)}$ est scindée, et donc $(pr_{Ker(\theta)})_b : H_b^n(Ker(\theta),\mathbb{R}) \to H_b^n(Ker(\theta) \times_{j=\sigma} \Gamma,\mathbb{R})$ est injective pour chaque $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, puisque le groupe image $Im(\theta)$ est moyennable, $j_b : H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^n(Ker(\theta),\mathbb{R})$ est injective. Par conséquent, l'injectivité de $(pr_{ker(\theta)})_b \circ j_b = (pr_\Gamma)_b \circ \sigma_b$ implique celle de σ_b.

Nous traitons maintenant le cas génŕal :

2.2. Cas général

Soit G un groupe discret. Si son centre est non trivial, il existe un sous-groupe caractéristique et moyennable $Z \subset G$, qui contient le centre de G et qui est maximal pour l'inclusion parmi les sous-groupes caractéristique et moyennables contenant le centre de G. L'existence d'un tel groupe est assuré par le Lemme de Zorn, puisque la réunion d'une famille croissante de groupes caractéristiques et moyennables est un groupe caractéristique et moyennable (cf. [11]). La maximalité de Z parmi les sous-groupes caractéristiques et moyennables contenant le centre de G implique que le groupe quotient G/Z n'a pas de centre.

Observons que puisque $Z \subset G$ est un sous-groupe caractéristique, la surjection canonique $p : G \to G/Z$ induit un homomorphisme $p^\natural : Out(G) \to Out(G/Z)$. Notons aussi que l'homomorphisme composé $\theta' = p^\natural \circ \theta : \Pi \to Out(G/Z)$ a une image moyennable. De plus, l'homomorphisme θ' n'est autre que la représentation d'holonomie de l'extension, $1 \to G/Z \xrightarrow{i'} \Gamma/Z \xrightarrow{\sigma'} \Pi \to 1$.

Du fait que le groupe quotient G/Z est sans centre, l'étape précédente nous permet de déduire que l'homomorphisme $(\sigma')_b : H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma/Z,\mathbb{R})$ est injectif. D'autre part, puisque la surjection canonique $\Gamma \to \Gamma/Z$ induit un isomorphisme en cohomologie bornée réelle (cf. Proposition 2) il en résulte que l'homomorphisme $\sigma_b : H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma,\mathbb{R})$ est injectif. $\square$

REMARQUE 2.2.— *Le théorème 2.1 n'est pas une généralisation du théorème de Traubert (cf. Proposition 2), ni une de ses variantes. En effet, si G est un groupe moyennable infini, en général les sous-groupes du groupe des automorphismes extérieures $Out(G)$ ne sont pas nécessairement moyennables. C'est le cas par exemple de $Out(\mathbb{Z}^2) = GL(2,\mathbb{Z})$ qui contient le groupe libre non abélien de rang 2.*

PROPOSITION 2.3.— *Soit $1 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\sigma} \Pi \to 1$ une extension de groupes discrets à holonomie moyennable. Si le groupe Γ est élément de la classe Λ alors il en est de même pour le groupe Π.*

Preuve. — Pour tout homomorphisme surjectif $q : X \to \Pi$ considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}\Gamma \times_{q=\sigma} X & \overset{pr_X}{\to} & X \\ pr_\Gamma \downarrow & & q \downarrow \\ \Gamma & \overset{\sigma}{\to} & \Pi\end{array}$$

Puisque le groupe Γ est supposé dans la classe Λ ceci entraîne que $(pr_\Gamma)_b : H_b^*(\Gamma, \mathbb{R}) \to H_b^*(X \times_{q=\sigma} \Gamma, \mathbb{R})$ est injective. De même, puisque l'extension donnée est à holonomie moyennable, il en résulte que $\sigma_b : H_b^*(\Pi, \mathbb{R}) \to H_b^*(\Gamma, \mathbb{R})$ est injective. Ainsi, de la commutativité du diagramme précédent on déduit que $(pr_\Gamma)_b \circ \sigma_b = (pr_X)_b \circ q_b$ est injective et par suite q_b est injective. D'où $\Pi \in \Lambda$. $\square$

COROLLAIRE 2.4.— *Soit* $1 \to G \overset{i}{\to} \Gamma \overset{\sigma}{\to} \Pi \to 1$ *une extension de groupes discrets où* G *est le groupe fondamental d'une surface compacte* Σ^2 *avec ou sans bord. Si tout quotient propre du groupe* Π *ne contient pas le groupe libre non abélien de rang deux, alors* $\sigma_b : H_b^n(\Pi, \mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$ *est injective pour chaque entier* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. — La preuve du corollaire est une conséquence des deux résultats suivants :

1) D'après l'alternative de Tits [17] : si G est le groupe fondamental d'une surface fermée, alors un sous-groupe de $Out(G)$ contient soit un sous-groupe résoluble d'indice fini (moyennable), soit un sous-groupe libre non abélien de rang 2.

2) D'après M. Bestvina et al [2], si $G = L_n$ est le groupe fondamental d'une surface compacte à bord, un sous-groupe de $Out(L_n)$ contient soit un groupe libre non abélien de rang 2, soit un sous-groupe abélien d'indice fini (moyennable).

Par conséquent, sous les hypothèses du corollaire 2.4, l'holonomie de l'extension donnée est nécessairement moyennable et donc $\sigma_b : H_b^n(\Pi, \mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$ est injective pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Comme exemples de groupes Π qui répondent aux conditions du corollaire 2.4 citons:

1. Le groupe **F** de Tompson : c'est le groupe des homéomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$ qui sont linéaires par morceaux, fixent 0 et ont un nombre fini de cassures. Il est connu que le groupe **F** ne contient

aucun sous-groupe libre non abélien de rang deux et que tous ses quotients propres sont abéliens.

2. Dans [7] il est démontré que tout homomorphisme $\theta : \Pi \to Out(\pi_1(\Sigma^2))$ à une image fini lorsque Π est un réseau irréductible dans un groupe de Lie semi-simple de rang réel au moins égal à deux et que Σ^2 est une surface compacte.

3. Opérations sur la classe Λ

Dans cette section nous nous proposons d'étudier la stabilité de la classe Λ par rapport à certaines opérations classiques sur les groupes discrets.

3.1. Stabilité de la classe Λ par le produit $\mathcal{M} \circ \Lambda$

DÉFINITION 3.1.— *On définit le produit $\mathcal{M} \circ \Lambda$ de la classe $\mathcal{M}$ des groupes moyennables par la classe Λ par :* $\Pi \in \mathcal{M} \circ \Lambda \iff \exists G \in \Lambda,\ G \trianglelefteq \Pi$ *et* $\Pi/G \in \mathcal{M}$.

THÉORÈME 3.2.— *La classe Λ contient la sous-classe produit $\mathcal{M} \circ \Lambda$.*

Preuve. — Soit $\Pi \in \mathcal{M} \circ \Lambda$. Avec les notations de la définition 3.1, à la donnée d'un homomorphisme surjectif $\sigma : \Gamma \to \Pi$ on associe le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & G \times_{i=\sigma} \Gamma & \xrightarrow{pr_\Gamma} & \Gamma & \xrightarrow{\bar{q}} & M & \to & 1 \\
 & & {\scriptstyle pr_G}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma}\downarrow & & \| & & \\
1 & \to & G & \xrightarrow{i} & \Pi & \xrightarrow{q} & M & \to & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

Puisque le groupe $G \in \Lambda$ et que le groupe M est moyennable, il en résulte que les homomorphismes $(pr_G)_b : H_b^n(G,\mathbb{R}) \to H_b^n(G \times_{i=\sigma} \Gamma, \mathbb{R})$ et $i_b : H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^n(G,\mathbb{R})$ sont injectifs, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la relation $(pr_G)_b \circ i_b = (pr_\Gamma)_b \circ \sigma_b$ implique que l'homomorphisme $\sigma_b : H_b^n(\Pi,\mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma,\mathbb{R})$ est injectif. D'où, $\Pi \in \Lambda$. □

Toutes les propositions énoncées dans la suite se déduisent du théorème 3.2.

COROLLAIRE 3.3.— *Soient A et B deux groupes discrets et K un sous-groupe tel que l'indice $[A : K] = [B : K] = 2$. Si K est dans la classe Λ alors il en est de même pour le produit libre amalgamé $A \star_K B$.*

Preuve. — Il suffit de remarquer que le sous-groupe K est normal dans le produit libre amalgamé $A \star_K B$ et que le groupe quotient $A \star_K B/K$ est isomorphe au groupe diédral infini $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$ qui est moyennable. D'où $A \star_K B \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

COROLLAIRE 3.4. — *Pour qu'un groupe G appartienne à la classe Λ il suffit que l'un de ses groupes dérivés d'ordre supérieur $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$ soit dans la classe Λ.*

Preuve. — On procède par récurrence. Puisque le groupe quotient $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ est abélien il est moyennable. Donc, si on suppose que $G^{(n+1)} \in \Lambda$, on en déduit que $G^{(n)} \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

COROLLAIRE 3.5. — *Le groupe fondamental d'un nœud fibré non trivial $K \subset S^3$ appartient à la classe Λ.*

Preuve. — En effet, on sait que le premier groupe dérivé $[\pi_1(S^3 \setminus K), \pi_1(S^3 \setminus K)]$ du groupe fondamental d'un nœud fibré non trivial $K \subset S^3$ est libre non abélien de type fini (théorème de Neuwirth-Stallings [4]). Par conséquent $\pi_1(S^3 \setminus K) \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

THÉORÈME 3.6. — *Soit K un groupe discret qui contient un sous-groupe G d'indice fini appartenant à la classe Λ. Alors K appartient à la classe Λ.*

Preuve. — On désigne par $k_1, k_2, \cdots, k_n$ les représentants à gauche des classes de K modulo G et on pose $\overline{G} = \bigcap_{i=1}^{i=n} k_i^{-1} G k_i$ qui est un sous-groupe normal d'indice fini dans K.

Observons d'abord qu'en appliquant le théorème de Trauber (cf. Proposition 3) à l'homomorphisme composé $\overline{G} \to G \xrightarrow{in} K$, on obtient que $(in)_b : H_b^*(K, \mathbb{R}) \to H_b^*(G, \mathbb{R})$ est injectif.

Si on considère un homomorphisme surjectif $\sigma : \Gamma \to K$ et son produit fibré avec l'homomorphisme in au-dessus de K, on obtient alors la relation $in \circ pr_G = \sigma \circ pr_\Gamma$ qui devient en cohomologie bornée réelle $(pr_\Gamma)_b \circ \sigma_b = (pr_G)_b \circ (in)_b$.

Enfin, puisque le groupe $G \in \Lambda$, l'homomorphisme $(pr_G)_b \circ (in)_b$ est injectif et donc σ_b est aussi injectif. D'où, $K \in \Lambda$. $\square$

Nous décrivons maintenant deux familles de groupes discrets qui appartiennent à la classe Λ, déduites directement des résultats précédents :

Action simpliciale. — Soit G un groupe discret qui agit sur un arbre simplicial $\mathcal{T}$. Si pour tout sommet $v \in V(\mathcal{T})$ le stabilisateur G_v est fini, et que le graphe quotient $\mathcal{T}/G$ est fini ou que $\sup\{\#(G_v)/v \in V(\mathcal{T})\} < +\infty$, alors $G \in \Lambda$. En effet, sous ces hypothèses, selon J.P. Serre [20], le groupe G contient un sous-groupe normal libre non abélien d'indice fini.

Le groupe $SL(2,\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}_4 \star_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ est un exemple bien connu de cette famille de groupes.

Groupes de Bianchi. — Pour tout entier naturel d on désigne par $\mathcal{O}_d$ l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Le groupe modulaire de Bianchi $\mathbf{G}_d = PSL(2,\mathcal{O}_d)$ est un sous-groupe discret du groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ des isométries qui préservent l'orientation de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Puisque $\mathbf{G}_d$ contient des éléments d'ordre fini cela fait de l'espace des orbites $\mathbb{H}^3/\mathbf{G}_d$ une orbifold au sens de W. Thurston.

Graces aux travaux de W. Ried, C. Maclachlan et al, on peut dresser une liste d'entiers d pour lesquels le groupe $\mathbf{G}_d$ appartient à la classe Λ. Par exemple, le groupe $\mathbf{G}_3 = PSL(2,\mathcal{O}_3)$ est dans la classe Λ. En effet, le groupe fondamental du complémentaire du nœud fibré 4_1 est d'indice fini dans le groupe $\mathbf{G}_3$ et on sait que $\pi_1(S^3 \setminus 4_1) \in \Lambda$ (cf. corollaire 3.5); d'où $\mathbf{G}_3 \in \Lambda$.

3.2. L'opération de suspension

Soit G un groupe discret engendré par une famille de générateurs $\mathcal{A}$. Pour tout automorphisme α de G on désigne par, $G_\alpha =< \mathcal{A} \cup \{t\}/t^{-1}at = \alpha(a); a \in \mathcal{A} >$ le groupe obtenu par *suspension* de l'automorphism α. Observons qu'on a ainsi la suite exacte courte, $1 \to G \to G_\alpha \to \mathbb{Z} \to 0$.

Du point de vue topologique le groupe G_α peut être réalisé comme le groupe fondamental d'un espace topologique X fibré sur le cercle S^1, où G est isomorphe au groupe fondamental de la fibre type F de X et l'automorphisme α est induit par la monodromie de la fibration $F \hookrightarrow X \to S^1$. Ainsi, en vertu du théorème 3.2 on a le :

COROLLAIRE 3.7. — *La classe Λ est stable par l'opération de suspension.*

PROPOSITION 3.8. — *Soit Σ^2 une surface topologique compacte avec ou sans bord. Alors le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma^2)$ appartient à la classe Λ.*

Preuve. — Le groupe fondamental d'une surface compacte, non orientable contient, comme sous-groupe d'indice 2, le groupe fondamental d'une surface compacte orientable. Il suffit donc de démontrer la proposition dans le cas d'une surface orientable.

1) Si $\partial\Sigma^2 \neq \emptyset$, le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma^2)$ est libre non abélien de rang $n \geqslant 2$ ou bien il est cyclique infini. D'où $\pi_1(\Sigma^2) \in \Lambda$.

2) Si la surface Σ^2 est compacte sans bord , désignons par g son genre.

Dans le cas $g = 0$ on a $\pi_1(\Sigma^2) = 1 \in \Lambda$, et si $g = 1$ on a $\pi_1(\Sigma^2) = \mathbb{Z}^2 \in \Lambda$.

Si $g \geqslant 2$ on considère un revêtement infini cyclique $p : X \to \Sigma^2$ dont l'espace total X est une surface non compacte dont le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est denombrable, libre et non abélien. Comme le quotient $\pi_1(\Sigma^2)/p_*(\pi_1(X)) = \mathbb{Z}$ est moyennable, $\pi_1(\Sigma^2) \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

Signalons que le résultat de la proposition 3.8 permet de mettre dans la classe Λ les groupes fondamentaux de toutes les variétés M^3 fibrées en cercles ainsi que toutes celles qui fibrent sur le cercle.

Pour pouvoir explorer d'avantage la liste des groupes fondamentaux de variétés de dimension trois qui appartiennent à la classe Λ nous faisons un bref rappel sur les groupes fuchsiens.

On dit qu'un groupe discret G est fuchsien s'il admet une présentation finie du type suivant:

$$G =< a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, q_1, \cdots, q_p \mid q_1^{\alpha_1} = \cdots = q_p^{\alpha_p} = 1, r\prod_{i=1}^{i=p} q_i = 1 >$$

où $r = \prod_{i=1}^{i=g}[a_i, b_i]$, les $\alpha_i \geqslant 0$ sont des entiers naturels et l'entier $g \geqslant 0$ est appelé le genre du groupe G. A chaque groupe fuchsien G, on associe un invariant numérique $\chi(G)$ appelé la caractéristique d'Euler-Poincaré que l'on définit par : $\chi(G) = 2 - 2g - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}$ si les $\alpha_i \geqslant 2$, par $\chi(G) = 2 - 2g$ si les $\alpha_i = 1$ et par $\chi(G) = 2 - 2g - p$ si les $\alpha_i = 0$. L'invariant $\chi(G)$ permet de classer les groupes fuchsiens G en sphériques si $\chi(G) > 0$, euclidiens si $\chi(G) = 0$ et hyperboliques si $\chi(G) < 0$. Notons que parmi les groupes fuchsiens on reconnait le groupe fondamental d'une surface à bord (resp, fermée) si les entiers $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ (resp, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 1$). Ajoutons que d'après la théorie géométrique des groupes fuchsiens, si $\chi(G) = 0$, $p \neq 0$ et $\alpha_i \geqslant 2$ alors $g = 0$ et le groupe G contient un sous-groupe abélien d'indice fini (il correspond à un pavage régulier euclidien). De même, si $\chi(G) > 0$ et $p \geqslant 3$ on a $g = 0$ et le groupe G est fini (il correspond à un pavage régulier sphérique). Par contre si $\chi(G) < 0$ et $p \geqslant 3$ alors, dans ce cas, le genre g est quelconque et le groupe G est infini non moyennable (il correspond à un pavage régulier hyperbolique).

COROLLAIRE 3.9. — *Tout groupe fuchsien G appartient à la classe Λ.*

Preuve. — Dans le rappel ci-dessus sur les groupes fuchsiens on a vu que les groupes de type Sphériques et de type Euclidiens ($\chi(G) \geqslant 0$) sont moyennables, donc ils sont dans la classe Λ.

Dans le cas des groupes fuchsiens de type hyperboliques ($\chi(G) < 0$), on sait que le groupe G contient un sous-groupe de surface de genre $g \geqslant 2$ et d'indice fini (cf. [6] page 76). Ainsi, la proposition 3.8 et le théorème 3.6 montrent que $G \in \Lambda$. $\square$

Voici un autre corollaire de la proposition 3.8 qui n'est pas immédiat sans le résultat du théorème 3.2.

COROLLAIRE 3.10. — *Soit M^3 une variété différentiable compacte dont le groupe fondamental $\pi_1(M^3)$ vérifie la suite exacte, $1 \to G \xrightarrow{i} \pi_1(M^3) \xrightarrow{\sigma} Q \to 1$, où $1 \neq G \neq \mathbb{Z}$ est un sous-groupe normal de présentation finie et Q est infini. Alors $\pi_1(M^3) \in \Lambda$.*

Preuve. — Dans les conditions du corollaire, on sait que le groupe G est isomorphe à un groupe infini cyclique ou au groupe fondamental d'une surface avec ou sans bord.

Dans le premier cas les travaux de [5] et [9] montrent que Q est isomorphe à un groupe fucshien et donc $Q \in \Lambda$. Comme dans ce cas là G est moyennable, $\pi_1(M^3) \in \Lambda$.

Dans le second cas Q contient un sous-groupe normal fini K tel que Q/K est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$, soit au groupe diédral infini $\mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2$ (cf. J. Hempel [13] chapitre 11). Donc, le groupe Q est moyennable et le groupe $\pi_1(M^3) \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

Soit Σ_g^2 une surface fermée de genre $g \geqslant 2$. D'après [3] et [1], on sait que le second groupe de cohomologie bornée $H_b^2(\Sigma_g^2, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension infinie. De même d'après [24], on sait que le troisième groupe de cohomologie bornée $H_b^3(\Sigma_g^2, \mathbb{R})$ est aussi de dimension infinie. Avec ces deux informations on a les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 3.11. — *Si un groupe discret G se surjecte sur un groupe de surface fermée de genre $g \geqslant 2$, alors ses groupes de cohomologie bornée $H_b^2(G, \mathbb{R})$ et $H_b^3(G, \mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels réels de dimension infinie.*

COROLLAIRE 3.12. — *Soient $\Sigma_h^2 \xrightarrow{i} M^4 \xrightarrow{p} \Sigma_g^2$ un fibré en surfaces fermées. Alors les groupes de cohomologie bornées $H_b^2(M^4, \mathbb{R})$ et $H_b^3(M^4, \mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels réels de dimension infinie dans les deux cas suivant: ($g \geqslant 2$ et $h \geqslant 0$) ou ($g = 0$ et $h \geqslant 2$).*

Preuve. — 1) Pour $g \geqslant 2$ et $h \geqslant 0$, il suffit de remarquer que la fibration $p : M^4 \to \Sigma_g$ induit un homomorphisme surjectif, $p_* : \pi_1(M^4) \to \pi_1(\Sigma_g^2)$, et que $\pi_1(\Sigma_g^2) \in \Lambda$.

2) De même, pour $g = 0$ et $h \geqslant 2$, il suffit de remarquer que la suite exacte d'homotopie associée à la fibration $p : M^4 \to S^2$ induit l'isomorphisme, $i_* : \pi_1(\Sigma_h^2) \to \pi_1(M^4)$. □

COMMENTAIRE. — *La classe Λ et les structures géométriques en dimension 3*

1) En dimension trois W. Thurston a démontré qu'il n' y a que huit géométries homogènes possibles pour modeler une variété compacte. Ce sont les géométries données par les modèles suivants : Nil, $\mathbb{R}^3$, S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl(2, \mathbb{R})}$, Sol^3 et $\mathbb{H}^3$ (cf. [22], [19]).

En outre (cf. Théorème 5.3 page 477 [19]), une variété fermée M^3 admet une structure géométrique modelée sur Nil, $\mathbb{R}^3$, S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\widetilde{Sl(2, \mathbb{R})}$ si et seulement si M^3 est une variété de Seifert. Par conséquent, le groupe fondamental d'une telle variétés M^3 contient un sous-groupe d'indice fini qui est une extension centrale d'un groupe fuchsien, c'est-à-dire que $\pi_1(M^3) \in \Lambda$.

Quant aux variétés fermées M^3 modelées sur la géométrie Sol^3, elles possèdent un revêtement fini qui est un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur le cercle S^1. Par conséquent, le groupe fondamental $\pi_1(M^3)$ est moyennable et donc il appartient à la classe Λ.

COROLLAIRE 3.13. — *Le groupe fondamental d'une variété différentiable fermée de dimension* 3 *modélée sur l'une des structures géométriques, Nil, $\mathbb{R}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $S^3, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl_2(\mathbb{R})}$, ou Sol^3 appartient à la classe Λ.*

2) *La classe Λ et la géométrie hyperbolique $\mathbb{H}^3$*

Soient S une surface compacte à courbure négative et $\phi : S \to S$ un difféomorphisme. On désigne par M_ϕ la suspension du difféomorphisme ϕ, obtenue à partir de $S \times \mathbb{R}$ par l'identification des couples (x, t) et $(\phi(x), t + 1)$. La variété M_ϕ est fibrée sur le cercle avec pour fibre type S et pour monodromie ϕ. On a donc $\pi_1(M_\phi) \in \Lambda$ (cf. corollaire 3.7).

D'après le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston, M_ϕ admet une structure hyperbolique si et seulement si ϕ est pseudo-Anosov (cf. [23], [18]). La classe Λ contient donc aussi des sous-groupes discrets, à covolume fini, du groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

La conjecture de W. Thurston, qu'une variété hyperbolique et à volume fini possède un revêtement fini fibré sur le cercle, permet d'espérer mettre dans la classe Λ tous les groupes Kleiniens $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{C})$, à covolume fini.

3.3. Stabilité de la classe Λ pour le produit libre de groupes moyennables

Soient A et B deux groupes. J.P Serre a démontré que le sous-groupe $[A,B]$ engendré par les commutateurs mixtes $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ est libre non abélien et normal dans le produit libre $A \star B$ (cf. [20] page 6). Ceci nous permet d'écrire la suite exacte, $1 \to [A,B] \xrightarrow{j_1} A * B \xrightarrow{q} A \times B \to 1$.

Plus généralement, pour toute famille non vide de groupes discrets $\{G_i, i \in I\}$ on désigne par $G = \star_{i\in I} G_i$ le produit libre des G_i [15], et par $C(G)$ le sous-groupe normal de G engendré par la fermeture normale des sous-groupes $[G_i, G_j] \subset G$ des commutateurs mixtes lorsque $i \neq j$ dans I. Puisque tout élément $g \in G$ est le produit d'un nombre fini d'éléments des G_i, sa classe modulo $C(G)$ est un produit d' un nombre fini de termes différents de 1 et qui commutent entre eux. Par conséquent, le groupe quotient $G/C(G)$ est isomorphe au *produit direct* $\prod_{i\in I} G_i$. D'aprés O. N. Golovin [10] le sous-groupe normal $C(G)$ est toujours libre (cf. [16] page 412). Notons aussi que si, pour un ensemble d'indices I dénombrable, les groupes G_i sont moyennables, alors $\star_{i\in I} G_i / C(G) \equiv \prod_{i\in I} G_i$ est un groupe moyennable.

THÉORÈME 3.14. — *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathcal{M}_n$ la classe de groupes G isomorphes à un produit libre de n groupes moyennables. Alors on a, $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1} \subset \varinjlim \mathcal{M}_n \subset \Lambda$.*

Preuve. — Il suffit de donner une preuve pour $n = 2$. Soit un groupe $G = M_1 \star M_2 \in \mathcal{M}_2$. Puisque $[M_1, M_2]$ est un groupe libre et puisque le produit cartésien $M_1 \times M_2 = G/[M_1, M_2]$ est moyennable on en déduit $M_1 \star M_2 \in \mathcal{M} \circ \Lambda \subset \Lambda$. $\square$

COROLLAIRE 3.15. — *Soit G un groupe discret. Pour que le second groupe de cohomologie bornée réelle $H_b^2(G,\mathbb{R})$ soit de dimension infinie il suffit que le groupe G se surjecte sur le produit libre de deux groupes moyennables $M_1 \star M_2 \neq \mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$.*

Preuve. — La preuve est une conséquence immédiate, du fait que $M_1 \star M_2 \in \Lambda$ et du Corollaire 1.1 de K. Fujiwara [8] qui affirme que le second groupe de cohomologie bornée $H_b^2(M_1 \star M_2, \mathbb{R})$ est de dimension infinie si $M_1 \star M_2 \neq \mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$. □

PROPOSITION 3.16. — *Soient G un groupe discret et M un sous-groupe moyennable, normal dans G. Pour que le groupe G soit dans la classe Λ il faut et il suffit que le groupe quotient G/M soit dans Λ.*

Preuve. — 1) Supposons $G/M \in \Lambda$ et désignons par $q : G \to G/M$ la surjection canonique. Soit $\sigma : \Gamma \to G$ un homomorphisme surjectif.

D'après M. Gromov [12], on sait que $q_b : H_b^n(G/M, \mathbb{R}) \to H_b^n(G, \mathbb{R})$ est un isomorphisme. Comme $G/M \in \Lambda$, $(q \circ \sigma)_b = \sigma_b \circ q_b$ est injectif. On en déduit alors que $\sigma_b : H_b^n(G, \mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$ est injective. C'est-à-dire $G \in \Lambda$.

2) Inversement supposons $G \in \Lambda$. Soient $\sigma : \Gamma \to G/M$ un homomorphisme surjectif et $G \times_{q=\sigma} \Gamma$ le produit fibré de q et de σ au-dessus du groupe G/M. Rappelons qu'on a la relation $q \circ pr_G = \sigma \circ pr_\Gamma$.

Puisque par hypothèse, $(pr_G)_b : H_b^n(G, \mathbb{R}) \to H_b^n(G \times_{q=\sigma} \Gamma, \mathbb{R})$ est injectif et que $q_b : H_b^n(G/M, \mathbb{R}) \to H_b^n(G, \mathbb{R})$ est un isomorphisme, il en résulte alors que $(pr_\Gamma)_b \circ \sigma_b = (pr_G)_b \circ q_b$ est injectif. Par conséquent, $\sigma_b : H_b^n(G/M, \mathbb{R}) \to H_b^n(\Gamma, \mathbb{R})$ est injectif et $G/M \in \Lambda$. □

COROLLAIRE 3.17. — *Soient M_1 et M_2 deux groupes moyennables qui contiennent M comme sous-groupe normal. Alors le produit libre amalgamé $M_1 \star_M M_2$ appartient à la classe Λ.*

Preuve. — Sous ces hypothèses on a la suite exacte courte,

$$1 \to M \to M_1 \star_M M_2 \to \frac{M_1}{M} \star \frac{M_2}{M} \to 1$$

qui résulte du théorème de la forme normale [15]. Puisque le produit libre $\frac{M_1}{M} \star \frac{M_2}{M} \in \mathcal{M}_2 \subset \Lambda$, on a $M_1 \star_M M_2 \in \Lambda$. □

COROLLAIRE 3.18. — *Soient M un groupe moyennable, N un sous-groupe normal de M et $\varphi : N \to N$ un automorphisme. Alors la HNN-extension $M\star_{N,\varphi} =< M, t/t^{-1}nt = \varphi(n), \forall n \in N >$ appartient à la classe Λ.*

Preuve. — Puisque le sous-groupe N est supposé normal dans M cela implique d'une part qu'il est normal dans la HNN-extension $M\star_{N,\varphi}$, et d'autre part, le groupe quotient $\frac{M\star_{N,\varphi}}{N}$ est isomorphe avec le produit libre $\frac{M}{N}\star\mathbb{Z}\in\mathcal{M}_2\subset\Lambda$. D'où, $M\star_{N,\varphi}\in\Lambda$. □

DÉFINITION 3.19.— *Le groupe* $BS(m,n)=<x,y;x^{-1}y^mx=y^n>$ *s'appelle groupe de Baumslag-Solitar d'indice* $m,n\in\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 3.20.— *Pour tout entier* $|n|>1$ *le groupe de Baumslag-Solitar* $BS(n,\pm n)$ *appartient à la classe* Λ. *En particulier, tout groupe* G *qui se surjecte sur* $BS(n,\pm n)$ *a un second groupe de cohomologie bornée réelle* $H_b^2(G,\mathbb{R})$ *de dimension infinie.*

Preuve.— Observons d'abord que le sous-groupe cyclique $<y^n>$ est normal dans $BS(n,\pm n)$. En effet, la relation $x^{-1}y^nx=y^n$ implique que le groupe cyclique $<y^n>$ est central dans $BS(n,n)$, et la relation $x^{-1}y^nx=y^{-n}$ implique $xy^nx^{-1}=(xy^{-n}x^{-1})^{-1}=y^{-n}$. D'autre part, le groupe quotient $BS(n,\pm n)/<y^n>$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}_{|n|}$ qui appartient à la classe Λ. D'où $B(n,\pm n)\in\Lambda$.

Puisque $H_b^2(\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}_{|n|},\mathbb{R})$ est de dimension infinie d'après le Corollaire 1.1 de K. Fujiwara [8], $H_b^2(B(n,\pm n),\mathbb{R})$ est de dimension infinie. □

Bibliographie

[1] BARGE (J.), GHYS (E.). — Surfaces et cohomologie bornée, Invent Math (1988) (92) (509-526).

[2] BESTVINA (M.) et al. — The Tits Alternative for $Out(F_n)$ I: Dynamics of exponential growing Automorphisms, preprint, 1996.

[3] BROOKS (R.), SERIES (C.). — Bounded cohomology for surfaces groups, Topology, (23) (1984) (29-36).

[4] BURDE (G.), ZIESCHANG (H.). — Knots, Walmter de Gruyter 1985.

[5] CASSON (A.), JUNGREIS (D.). — Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, Invent. Math. (118) (1994) (441-456).

[6] COLLINS (D.J.), ZIESCHANG (H.). — Algebra VII : I. Combinatorial group theory application to geometry, Springer-Verlag.

[7] FARB (B.), MAZUR (H.). — Superrigidity and mapping class groups, Topology (1999).

[8] FUJIWARA (K.). — The second bounded cohomology of an amalgamated free product of groups, preprint.

[9] GABAI (D.). — Convergence groups are Fuchsian groups, Ann. of Math. (136) (1992) (447-510).

[10] GOLOVIN (O.N.). — Nilpotent Products of groups, Amer. Math. Soc. Translation, Ser. (2) (2) (1956) (89-1116).

[11] GREENLEAF. — Invariant Means on Topological Groups and their Applications, Van. Nostrand, Math. Stud. (16) (1969).

[12] GROMOV (M.). — Volume and Bonded cohomology, Publ. Math. IHES (56) (1982) (5-99).

[13] HEMPEL (J.). — 3-manifolds, Ann. Math. Stud, 1976.

[14] IVANOV (N.V.). — Foundation of the theory of Bonded cohomology, J. of Soviet Math, (37) (1987) (1090-1115).

[15] LYNDON (R.), SCHUPP (P.). — Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag 1977.

[16] MAGNUS (W.), KARASS (A.), SOLITAR (D.). — Combinatorial group theory: presentation of groups in terms of generators and relations, Dover 1975.

[17] MCCARTY (J.). — A Tits alternative for subgroups of surface mapping class groups, Trans. Amer. Math. Soc. (35) (1985) (583-612).

[18] OTAL (J.P.). — Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrés de dimension 3, Astérisque (235) (1996).

[19] SCOTT (P.). — The geometry of 3-manifold, Bull. London Math. Soc. (15) (1983) (401-487).

[20] SERRE (J.P.). — Tress, Springer-Verlag, 1980.

[21] SULLIVAN (D.). — Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrés sur S^1, Séminaire Bourbaki, exposé n=F8 554, 1979/78.

[22] THURSTON (W.P.). — Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hypebolic geometry, Bull. AMS, (6) (3) (1982) (357-381).

[23] THURSTON (W.P.). — Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds whish fiber over the circle, preprint 1981 rev. 1986 eprint 1998, math.GT/9801045.

[24] YOSCHIDA (T.). — On 3-dimensional cohomology of surfaces, Adv. Stu. Pur. Math, (9) (1986) (173-176).