

SALOMON SAMBOU

**Résolution du $\bar{\delta}$ pour les courants prolongeables
définis dans un anneau**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 11,
n° 1 (2002), p. 105-129

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_1_105_0

© Université Paul Sabatier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau^(*)

SALOMON SAMBOU⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On résout le $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables sous des hypothèses de concavité sur un domaine Ω d'une variété analytique complexe. On applique ces résultats avec ceux de [13] à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans le cas hypersurface réelle.

ABSTRACT. — We solve the $\bar{\partial}$ for extendable currents under concavity conditions on a domain Ω of an analytic manifold. We apply these results with those of [13] to the study of the Dolbeault isomorphism on real hypersurface.

Introduction

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord C^∞ de X . Posons $D = X \setminus \bar{\Omega}$. Un courant T défini sur D est dit prolongeable, si T est la restriction à D d'un courant \tilde{T} défini sur X . Supposons que X est une extension q -convexe de Ω . On veut résoudre $\bar{\partial}U = T$ sur D , où T est un courant prolongeable $\bar{\partial}$ -fermé.

(*) Reçu le 5 novembre 2001, accepté le 11 octobre 2002

(1) Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR5582 (UJF-CNRS), BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France.

Ce problème entre donc dans le cadre général de la résolution du $\bar{\partial}$. On sait que pour les formes différentielles de classe C^∞ sur D , cette équation n'a pas toujours une solution. Même dans le cas où l'on sait résoudre, on ignore parfois si pour une donnée de classe C^∞ jusqu'au bord, on a une solution C^∞ jusqu'au bord. D'après l'isomorphisme de Dolbeault si le $\bar{\partial}$ admet une solution pour les formes différentielles de classe C^∞ $\bar{\partial}$ -fermées sur D , alors il admet une solution pour les courants $\bar{\partial}$ -fermés sur D . Les courants prolongeables sont pour les courants ce que les formes différentielles de classe C^∞ définies jusqu'au bord sont pour les formes différentielles de classe C^∞ définies dans un domaine. Il est donc naturel de se demander si T est un courant prolongeable $\bar{\partial}$ -fermé sur D , s'il existe un courant prolongeable U défini sur D , solution de $\bar{\partial}U = T$. Ce problème a déjà été étudié dans [13] dans le cas d'un domaine complètement strictement q -convexe à bord C^∞ .

Sous l'hypothèse $\overset{\circ}{D} = D$, on sait d'après [11] que l'espace $\check{D}_D^{p,r}(X)$ des courants prolongeables de bidegré (p, r) définis sur D est le dual topologique de l'espace $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\bar{D})$ des $(n-p, n-r)$ -formes différentielles de classe C^∞ , à support compact dans \bar{D} . On va donc comme dans [13] résoudre le $\bar{\partial}$ avec conditions de support et obtenir par dualité la résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables. Mais contrairement au cas convexe, $\mathcal{D}^{n-p, n-r}(\bar{D})$ n'est pas un espace de Fréchet mais simplement une limite inductive d'espaces de Fréchet, d'où des difficultés à appliquer le théorème de l'application ouverte. Grâce à des artifices d'analyse fonctionnelle, on parvient à surmonter ce problème pour prouver le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient X une variété de Stein de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord C^∞ de X tels que X soit une extension q -convexe de Ω , $1 \leq q \leq n-1$. Alors*

i) Pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n-2$,

$$\bar{\partial}\check{D}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p, r-1}(X) = \check{D}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p, r}(X) \cap \ker \bar{\partial} .$$

ii) Si $q = n-1$,

$$\bar{\partial}\check{D}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p, n-2}(X) = \left\{ T \in \check{D}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p, n-1}(X) \mid \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, 1}(X \setminus \Omega) \cap \ker \bar{\partial} \right\} .$$

Ce théorème est pour les courants prolongeables l'analogie du corollaire 2.2.13 de [8] sur les formes différentielles définies jusqu'au bord dans un anneau local q -concave.

Notons $\check{H}^{p,r}(D)$ respectivement $H_{\text{cour}}^{p,r}(D)$ le (p, r) ^{ième} groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables respectivement des courants.

On a comme conséquence du théorème 4.1 de [13] et du théorème ci-dessus, les relations entre $\check{H}^{p,r}(D)$ et $H_{\text{cour}}^{p,r}(D)$ suivantes :

THÉORÈME. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord C^∞ de X . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave, $1 \leq q \leq n - 1$, alors l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} \check{S} : \check{H}^{0,r}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q - 1 \\ \text{et} &&& \\ \check{S} : \check{H}^{0,q}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(D), && \text{est injective.} \end{aligned}$$

b) bD est strictement q -convexe, $1 \leq q \leq n - 1$, l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} \check{S} : \check{H}^{0,r}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } r > n - q \\ \text{et} &&& \\ \check{S} : \check{H}^{0,n-q}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(D) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

La partie b) du théorème a été démontrée dans [9], théorème 3.13 pour un domaine à bord C^∞ par morceaux.

Si $H_\infty^{0,r}(\bar{D})$ respectivement $H_\infty^{0,r}(D)$ désigne le $(0, r)$ -ième groupe de cohomologie de Dolbeault pour les formes différentielles de classe C^∞ sur \bar{D} respectivement sur D , on a sous les hypothèses du théorème ci-dessus les mêmes conclusions pour l'application induite par restriction $\mathcal{S} : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$.

On applique ces différentes relations entre groupe de cohomologie à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles. On sait que pour une variété analytique complexe X , l'application naturelle entre $H_\infty^{p,r}(X)$ et $H_{\text{cour}}^{p,r}(X)$ est un isomorphisme. Dans le cas d'une hypersurface réelle S de X , à cause de l'absence du lemme de Poincaré pour le $\bar{\partial}_S$ dans les degrés intermédiaires, l'application naturelle entre $H_\infty^{p,r}(S)$ et $H_{\text{cour}}^{p,r}(S)$ semble ne pas être toujours un isomorphisme. On montre :

THÉORÈME. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe C^∞ de X . Si la forme de Lévi de S admet en chaque point de S :

i) q valeurs propres de même signe $q \geq \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est surjective si $n - q \leq r \leq q - 1$, et $H_\infty^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est injective si $n - q + 1 \leq r \leq q$.

ii) q paires de valeurs propres de signe contraire, $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$, l'application naturelle de $H_{\infty}^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \text{et} \quad H_{\infty}^{0,q}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(S) && \text{est injective} \\ H_{\infty}^{0,n-q}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(S) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Le cas ii) correspond au cas de la codimension 1 dans [9]. Ces résultats ont été annoncés dans [14].

1. Préliminaires

Notations 1.1. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine de X . Posons $D = X \setminus \bar{\Omega}$. On note $\mathcal{D}^{p,r}(X \setminus \Omega)$ l'espace des (p,r) -formes différentielles de classe C^{∞} sur X et à support compact dans $X \setminus \Omega$. On munit $\mathcal{D}^{p,r}(X \setminus \Omega)$ de sa topologie usuelle de limite inductive d'espace de Fréchet. $\check{\mathcal{D}}_D^{p,r}(X)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p,r) dans D prolongeables à X . D'après [11], si $\check{D} = D$, alors $\check{\mathcal{D}}_D^{p,r}(X)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}^{n-p,n-r}(X \setminus \Omega)$.

Définition 1.2. — Une fonction ρ de classe C^{∞} sur X est dite q -convexe, $1 \leq q \leq n$, si sa forme de Lévi possède au moins q valeurs propres strictement positives. ρ est dite q -concave si $-\rho$ est q -convexe.

Définition 1.3. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact de X . Ω est complètement strictement q -convexe, $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe une fonction $\varphi(q+1)$ -convexe, définie dans un voisinage $U_{\bar{\Omega}}$ de $\bar{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in U_{\bar{\Omega}} \mid \varphi(z) < 0\}$.

S'il existe une fonction φ qui est $(q+1)$ -convexe dans un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω , telle que $\Omega \cap U_{b\Omega} = \{z \in U_{b\Omega} \mid \varphi(z) < 0\}$, on dit alors que Ω est strictement q -convexe.

X est une extension q -convexe de Ω , $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe une fonction $\varphi(q+1)$ -convexe, définie sur un voisinage U de $X \setminus \Omega$ telle que $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \varphi(z) < 0\}$ et pour tout réel α , $0 < \alpha < \sup_{z \in U} \varphi(z)$, l'ensemble $\{z \in U \mid 0 \leq \varphi(z) \leq \alpha\}$ est compact.

Remarque 1. — Puisque si U est un voisinage de $X \setminus \Omega$, U est aussi un voisinage du bord $b\Omega$ de Ω , alors si X est une extension q -convexe de Ω , Ω est strictement q -convexe.

2. Résolution du $\bar{\partial}$ avec conditions de support

Nous allons d'abord résoudre le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles appartenant à $\mathcal{D}^{p,r}(X \setminus \Omega)$.

THÉORÈME 1. — *Soient X une variété de Stein de dimension n et $\Omega \subset X$ un domaine relativement compact à bord C^∞ de X tel que X soit une extension q -convexe de Ω , $1 \leq q \leq n - 1$. Alors,*

$$i) \quad \text{si } n - q + 1 \leq r \leq n - 1, \quad \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,r-1}(X \setminus \Omega) = \mathcal{D}^{p,r}(X \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}.$$

$$ii) \quad \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(X \setminus \Omega) \text{ est fermé dans } \mathcal{D}^{p,n}(X \setminus \Omega).$$

iii) *si $r = n - q$ et $q \leq n - 2$, soit $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(X \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{D}^{p,n-q-1}(X)$ tels que $\bar{\partial}g_\varepsilon = f$ et $|g_\varepsilon|_{\ell, \bar{\Omega}} < \varepsilon$, où $|\cdot|_{\ell, \bar{\Omega}}$ désigne la norme C^ℓ sur $\bar{\Omega}$.*

Démonstration.

i) Soit $f \in \mathcal{D}^{p,r}(X \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, $f \in \mathcal{D}^{p,r}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$. Puisque X est de Stein, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,r-1}(X)$, $1 \leq r \leq n - 1$, telle que $\bar{\partial}h = f$ sur X . Comme X est une extension q -convexe de Ω , Ω est strictement q -convexe dans une variété de Stein, donc complètement strictement q -convexe, cf. [3], théorème 5.14.

Puisque $2 \leq n - q + 1 \leq r$, c'est-à-dire $1 \leq n - q \leq r - 1$ et $\bar{\partial}h = 0$ sur Ω complètement strictement q -convexe, il existe (cf. [10], théorème 2) une $(p, r - 2)$ -forme différentielle de classe C^∞ θ sur $\bar{\Omega}$ telle que $\bar{\partial}\theta = h$ sur Ω . Soit $\tilde{\theta}$ une extension C^∞ à support compact dans X de θ , $u = h - \bar{\partial}\tilde{\theta}$ convient.

ii) Pour montrer que $\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(X \setminus \Omega)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{p,n}(X \setminus \Omega)$, il suffit de montrer que :

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(X \setminus \Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,n}(X \setminus \Omega) \mid \int_X f \wedge g = 0, \text{ pour toute } \right. \\ \left. (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X \right\}.$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(X \setminus \Omega) \subset \left\{ f \in \mathcal{D}^{p,n}(X \setminus \Omega) \mid \int_X f \wedge g = 0, \text{ pour toute } \right. \\ \left. (n-p)\text{-forme } g \text{ holomorphe dans } X \right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{D}^{p,n}(X \setminus \Omega)$ telle que $\int_X f \wedge g = 0$, pour toute $(n-p)$ -forme g holomorphe dans X . D'après la proposition 20.2 de [3] et la régularité du $\bar{\partial}$, cf. [7], chapitre 5, corollaire 4.5, il existe $h \in \mathcal{D}^{p,n-1}(X)$ telle que $\bar{\partial}h = f$. On termine alors comme dans *i*). Par conséquent $f \in \bar{\partial}\mathcal{D}^{p,n-1}(X \setminus \Omega)$, d'où l'inclusion dans l'autre sens, ce qui donne l'égalité.

iii) Si $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(X \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$, alors $f \in \mathcal{D}^{p,n-q}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$. Il existe $h \in \mathcal{D}^{p,n-q-1}(X)$ telle que :

$$\bar{\partial}h = f \text{ sur } X .$$

$\bar{\partial}h = 0$ sur Ω et h est une $(p, n-q-1)$ -forme différentielle $\bar{\partial}$ -fermée sur Ω . On ne sait pas résoudre $\bar{\partial}U = h$ dans Ω .

Pour compléter *iii*) nous allons utiliser le lemme ci-dessous qui est une version \mathcal{C}^∞ du théorème 12.11 de [3].

LEMME 2.1. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $D \subset\subset X$ un domaine strictement q -convexe tel que X soit une extension q -convexe de D , $0 \leq q \leq n-1$. Alors pour tous $n-q-1 \leq r \leq n$ et $\ell \in \mathbb{N}$, l'image de l'application restriction de $Z_{0,r}^\ell(X) \rightarrow Z_{0,r}^\ell(\bar{D})$ est dense pour la norme $|\cdot|_{\ell, \bar{D}}$.

Démonstration du lemme. — Elle est analogue à celle du théorème 12.11 de [3], où les résultats locaux avec estimations uniformes de Henkin et Leiterer sont remplacés par des résultats locaux correspondants avec estimations c^ℓ de Lieb et Range [10].

D'après le lemme 2.1, il existe une famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de formes différentielles dans X , $\bar{\partial}$ -fermées qui convergent vers $h|_{\bar{\Omega}}$ pour la topologie de la convergence uniforme des formes différentielles et de leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à ℓ sur $\bar{\Omega}$. Puisque $q \leq n-2$, il existe une famille $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(p, n-q-2)$ formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur X telles que $\bar{\partial}\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ sur X .

Soit χ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact dans X qui vaut 1 dans $\bar{\Omega}$. Posons $\theta_\varepsilon = \chi\psi_\varepsilon$ et $g_\varepsilon = h - \bar{\partial}\theta_\varepsilon$. $f = \bar{\partial}g_\varepsilon$, g_ε est une $(p, n-q-1)$ forme différentielle à support compact dans X avec $|g_\varepsilon|_{\ell, \bar{\Omega}} < \varepsilon$.

Notons que pour les assertions *i*) et *ii*) il suffit que D soit complètement strictement q -convexe. Le fait que X soit une extension q -convexe de D ne sert que pour *iii*).

Remarque 2. — Le théorème 1 reste vrai sous les hypothèses légèrement plus faibles suivantes : X est une variété analytique complexe de dimension

n et $\Omega \subset\subset X$ est un domaine relativement compact à bord C^∞ de X . On suppose que X est une extension q -convexe de Ω et qu'il existe un ouvert de Stein U tel que $\Omega \subset\subset U \subset X$.

3. Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables

Comme conséquence de la résolution à support compact et de la dualité entre $\check{\mathcal{D}}_D^{p,r}(X)$ et $\mathcal{D}^{n-p,n-r}(X \setminus \Omega)$, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — Soient X une variété de Stein de dimension n , $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact à bord C^∞ de X tels que X soit une extension q -convexe de Ω , $1 \leq q \leq n - 1$. Alors,

i) Pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n - 2$,

$$\bar{\partial} \check{\mathcal{D}}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p,r-1}(X) = \check{\mathcal{D}}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p,r}(X) \cap \text{Ker } \bar{\partial} .$$

ii) Si $q = n - 1$,

$$\bar{\partial} \check{\mathcal{D}}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p,n-2}(X) = \left\{ T \in \check{\mathcal{D}}_{X \setminus \bar{\Omega}}^{p,n-1}(X) \mid \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p,1}(X \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial} \right\} .$$

Pour faire la démonstration du théorème, on a besoin de deux lemmes :

LEMME 3.1. — Sous les hypothèses de la remarque 2, soit K un compact d'intérieur non vide de $U \setminus \Omega$. Si T est un courant de bidegré (p, r) sur $U \setminus \bar{\Omega}$, $\bar{\partial}$ -fermé et prolongeable à U , il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U \setminus \bar{\Omega}$ prolongeable à U tel que $\bar{\partial} S^{(K)} = T$ dans $\overset{\circ}{K}$, pour $1 \leq r \leq q$ et $r \leq n - 2$.

Si $q = n - 1$ pour tout $T \in \{ F \in \check{\mathcal{D}}_{U \setminus \bar{\Omega}}^{p,n-1}(U) \mid \langle F, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p,1}(U \setminus \Omega) \cap \text{ker } \bar{\partial} \}$,

il existe un courant $S^{(K)}$ défini dans $U \setminus \bar{\Omega}$ prolongeable à U tel que $\bar{\partial} S^{(K)} = T$ dans $\overset{\circ}{K}$.

Démonstration du lemme. — D'après la remarque 2, $\bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p,n-r}(U \setminus \Omega)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{n-p,n-r+1}(U \setminus \Omega)$ pour $2 \leq n - q + 1 \leq n - r + 1 \leq n$, c'est-à-dire $1 \leq r \leq q$.

Donc si $1 \leq r \leq q$, pour un compact K de $U \setminus \Omega$, notons $\mathcal{D}_K^{n-p,n-r+1}(U \setminus \Omega)$ le sous-espace des formes différentielles appartenant à $\mathcal{D}^{n-p,n-r+1}(U \setminus \Omega)$ et qui ont leur support dans K .

$\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega)$ est fermé dans $\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega)$ qui est un espace de Fréchet, c'est donc un espace de Fréchet.

$\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{K_\nu}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \right)$; où $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de $U \setminus \Omega$. Il existe ν_0 tel que $\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{K_{\nu_0}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega)$ soit de deuxième catégorie de Baire. L'opérateur $\bar{\partial}$ est alors un opérateur fermé de domaine de définition $\{\varphi \in \mathcal{D}_{K_{\nu_0}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \mid \bar{\partial}\varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega)\}$ entre les espaces de Fréchet $\mathcal{D}_{K_{\nu_0}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega)$ et $\mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega)$ dont l'image est de seconde catégorie de Baire. Le théorème de l'application ouverte implique alors que cet opérateur est surjectif et ouvert. Donc

$$\bar{\partial} \mathcal{D}_{K_{\nu_0}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \cap \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) = \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega).$$

Posons $\tilde{K} = K_{\nu_0}$. L'application

$$L_T^K : \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \bar{\partial}\varphi \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

est bien définie. En effet, si $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\varphi'$, on a $\bar{\partial}(\varphi - \varphi') = 0$. $\varphi - \varphi'$ est une $(n-p, n-r)$ forme différentielle, $\bar{\partial}$ -fermée à support compact dans \tilde{K} , en particulier dans $U \setminus \Omega$.

* Si $r \leq q-1$, d'après *i*) du théorème 1 et la remarque 2, il existe $\theta \in \mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \Omega)$ tel que $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}\theta$ car $n-r \geq n-q+1$. Par densité de $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \bar{\Omega})$ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \Omega)$, il existe une suite $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \bar{\Omega})$ qui convergent uniformément vers θ dans $\mathcal{D}^{n-p, n-r-1}(U \setminus \Omega)$ et par conséquent $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle + \langle T, \bar{\partial}\theta \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$ car T étant $\bar{\partial}$ -fermé, $\langle T, \bar{\partial}\theta \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, \bar{\partial}\theta_j \rangle = 0$. Donc

$$L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi').$$

** Si $r = q$ et $r \leq n-2$, soit \tilde{T} une extension de T à U . $\bar{\partial}\tilde{T}$ est un courant à support compact sur $\bar{\Omega}$, donc $\bar{\partial}\tilde{T}$ est d'ordre fini ℓ . Puisque $\varphi - \varphi' \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(U \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a d'après *iii*) du théorème 1 et la remarque 2, une $(n-p, n-q-1)$ forme différentielle h_ε de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans U telle que $\varphi - \varphi' = \bar{\partial}h_\varepsilon$ et $|h_\varepsilon|_{\ell, \bar{\Omega}} \leq \varepsilon$.

$$|\langle \tilde{T}, \bar{\partial}h_\varepsilon \rangle| = |\langle \bar{\partial}\tilde{T}, h_\varepsilon \rangle| \leq c|h_\varepsilon|_{\ell, \bar{\Omega}}.$$

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau

Donc $|\langle \tilde{T}, \bar{\partial} h_\varepsilon \rangle| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, d'où $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi' \rangle$, ainsi $L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi')$.

*** Si $q = n - 1$ et $T \in \{F \in \check{\mathcal{D}}_{U \setminus \bar{\Omega}}^{p, n-1}(U) \mid \langle F, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, 1}(U \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}\}$, $\varphi - \varphi' \in \mathcal{D}^{n-p, 1}(U \setminus \Omega) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$ et d'après l'hypothèse sur T , $\langle T, \varphi - \varphi' \rangle = 0$. D'où $L_T^K(\bar{\partial}\varphi) = L_T^K(\bar{\partial}\varphi')$.

L'application L_T^K est linéaire, mais également continue comme composée de deux applications continues :

$$T : \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\delta : \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \longrightarrow \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega)$$

qui vérifie $\bar{\partial} \circ \delta = I$ et qui est obtenue par application du théorème de l'application ouverte appliqué à

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \{ \varphi \in \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \mid \bar{\partial}\varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \} &\subset \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega) \\ &\longrightarrow \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \cap \bar{\partial} \mathcal{D}_{\tilde{K}}^{n-p, n-r}(U \setminus \Omega). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre L_T^K à une application $\tilde{L}_T^K : \mathcal{D}^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est linéaire et continue. Donc \tilde{L}_T^K est un courant prolongeable défini dans $U \setminus \bar{\Omega}$ et $\bar{\partial} \tilde{L}_T^K = (-1)^{p+r} T$ sur $\overset{\circ}{K}$ car si $\text{supp } \varphi \subset K$, $\bar{\partial}\varphi \in \mathcal{D}_K^{n-p, n-r+1}(U \setminus \Omega)$ et $\langle \tilde{L}_T^K, \bar{\partial}\varphi \rangle = (-1)^{p+r} \langle T, \varphi \rangle$. On pose $S^{(K)} = (-1)^{p+r} \tilde{L}_T^K$. \square

LEMME 3.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2, soient K_1, K_2, K_3 trois compacts d'intérieur non vide de $X \setminus \Omega$ tels que $\overset{\circ}{K}_1 \subset \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset \subset \overset{\circ}{K}_3$ et $\overset{\circ}{K}_i \cup \bar{\Omega} = \{z \in X \setminus \rho(z) < \eta_i\}, i = 1, 2, 3$, où ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique qui existe du fait que X est de Stein. Soit T un courant prolongeable sur $X \setminus \bar{\Omega}$ tel qu'il existe S_2 et S_3 deux $(p, r - 1)$ courants définis sur $\overset{\circ}{K}_2$ et $\overset{\circ}{K}_3$ et prolongeables à X tels que, pour tout indice $i = 2, 3$, $\bar{\partial} S_i = T$ sur $\overset{\circ}{K}_i$ et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un courant prolongeable \tilde{S}_3 défini sur $\overset{\circ}{K}_3$ tel que : $\bar{\partial} \tilde{S}_3 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_3$ et*

$$i) \quad \tilde{S}_3|_{\overset{\circ}{K}_1} = S_2|_{\overset{\circ}{K}_1} \text{ si } 2 \leq r \leq q ;$$

$$ii) \quad |\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| < \varepsilon |\varphi|_{0, K_1}, \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\overset{\circ}{K}_1 \cup b\Omega) \text{ si } r = 1.$$

Démonstration du lemme.

i) Comme $\bar{\partial}S_2 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_2$ et $\bar{\partial}S_3 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_3$, $\bar{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur $\overset{\circ}{K}_2$. Puisque sur $\overset{\circ}{K}_2$, on peut résoudre le $\bar{\partial}$ pour les formes différentielles à support compact dans $\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega$ de bidegré (p, r) avec $2 \leq n - q + 1 \leq r \leq n - 1$ et $\bar{\partial}\mathcal{D}^{n-p, n-1}(\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{D}^{n-p, n}(\overset{\circ}{K}_2 \cup b\Omega)$, cf. Remarque 2, on a d'après le lemme 3.1 et pour K un compact tel que $\overset{\circ}{K}_1 \subset\subset K \subset\subset \overset{\circ}{K}_2$ un courant $S^{(K)}$ sur $\overset{\circ}{K}$ prolongeable à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}$ tel que $S_2 - S_3 = \bar{\partial}S^{(K)}$ sur $\overset{\circ}{K}$.

Soient χ une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ à support compact dans $\overset{\circ}{K} \cup \bar{\Omega}$ qui vaut 1 dans K_1 et $\tilde{S}^{(K)}$ une extension de $S^{(K)}$ à X

$$S_3 + \bar{\partial}(\chi\tilde{S}^{(K)}) = S_2 - \bar{\partial}((1 - \chi)\tilde{S}^{(K)}) \text{ sur } \overset{\circ}{K}_1 .$$

On pose

$$\tilde{S}_3 = S_3 + \bar{\partial}(\chi\tilde{S}^{(K)}) .$$

ii) Si $r = 1$, comme $\bar{\partial}S_2 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_2$ et $\bar{\partial}S_3 = T$ sur $\overset{\circ}{K}_3$, $\bar{\partial}(S_2 - S_3) = 0$ sur $\overset{\circ}{K}_2$. Il existe θ une p -forme holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_2$ telle que $S_3 - S_2 = \theta$ sur $\overset{\circ}{K}_2$.

$\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}$ est une variété de Stein, $\bar{\Omega}$ est un compact de $\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}$ et $\overset{\circ}{K}_2 = (\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}) \setminus \bar{\Omega}$ est connexe. Par le phénomène de Hartogs, toute p -forme holomorphe sur $\overset{\circ}{K}_2$ se prolonge holomorphiquement à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}$. Soit $\tilde{\theta}$ un tel prolongement de θ à $\overset{\circ}{K}_2 \cup \bar{\Omega}$. Il existe alors, cf. [5], théorème 5.2.8, une suite $(\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de p -formes holomorphes dans $\overset{\circ}{K}_3 \cup \bar{\Omega}$ qui convergent uniformément vers $\tilde{\theta}$ sur $K_1 \cup \bar{\Omega}$. Il existe j_0 tel que $\sup_{K_1 \cup \bar{\Omega}} |\theta_{j_0} - \tilde{\theta}| < \varepsilon$.

Posons $\tilde{S}_3 = S_3 - \theta_{j_0}$, on a $|\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| \leq \varepsilon \sup_{K_1 \cup \bar{\Omega}} |\varphi|$, pour tout $\varphi \in$

$\mathcal{D}^{n-p, n}(\overset{\circ}{K}_1 \cup b\Omega)$. \square

Démonstration du théorème. — Considérons une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de compacts de $X \setminus \Omega$. Supposons que $\overset{\circ}{K}_j \cup \bar{\Omega} = \{z \in X \mid \rho(z) < \eta_j\}$ où $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont des réels tels que $\eta_j < \eta_{j+1}$ et ρ est une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique de X . Pour $2 \leq r \leq q$, on associe à $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ grâce aux lemmes 3.1 et 3.2 une suite de courants $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définis dans K_j et prolongeables à X telle que $\bar{\partial}S_j = T$ sur $\overset{\circ}{K}_j$ et si $j, j+1, j+2$ sont trois indices consécutifs, $S_{j+2} = S_{j+1}$ sur $\overset{\circ}{K}_j$.

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau

La suite $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers un courant S défini sur $X \setminus \bar{\Omega}$ et prolongeable. De plus, S est solution de l'équation $\bar{\partial}U = T$ dans $X \setminus \bar{\Omega}$.

Pour $r = 1$, soit $\varepsilon > 0$, il existe d'après les lemmes 3.1 et 3.2, une solution \tilde{S}_3 de $\bar{\partial}S = T$ dans \mathring{K}_3 , une solution S_2 de $\bar{\partial}S = T$ dans \mathring{K}_2 telles que $|\langle \tilde{S}_3 - S_2, \varphi \rangle| \leq \varepsilon |\varphi|_{0, K_1}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_1 \cup b\Omega)$. On construit ainsi une suite $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de courants définis sur \mathring{K}_j et prolongeables à X tels que si $j, j+1, j+2$ sont trois indices consécutifs, $|\langle \tilde{S}_{j+2} - \tilde{S}_{j+1}, \varphi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2^j} |\varphi|_{0, K_j}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(\mathring{K}_j \cup b\Omega)$. La suite $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la topologie faible. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(X \setminus \Omega)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset \mathring{K}_N \cup b\Omega$ et pour tout $m > N$ et $\alpha > 0$

$$|\langle \tilde{S}_{m+\alpha} - \tilde{S}_m, \varphi \rangle| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{m+\alpha-1}} \right) |\varphi|_{0, K_N},$$

par conséquent $\langle \tilde{S}_{m+\alpha} - \tilde{S}_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Donc $(\tilde{S}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers S . S est linéaire. En effet, soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(X \setminus \Omega)$. $\varphi + \psi \in \mathcal{D}^{n-p, n}(X \setminus \Omega)$. Il existe K_N tel que $\text{supp } \varphi, \text{supp } \psi, \text{supp } (\varphi + \psi)$ soient inclus dans K_N .

$$\langle S, \varphi + \psi \rangle = \lim_{j > N} \langle S_j, \varphi + \psi \rangle = \lim_{j > N} \langle S_j, \varphi \rangle + \lim_{j > N} \langle S_j, \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle + \langle S, \psi \rangle.$$

Soit $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}^{n-p, n}(X \setminus \Omega)$ avec $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ dans $\mathcal{D}^{n-p, n}(X \setminus \Omega)$. Il existe un compact K_N tel que pour tout ν , $\text{supp } \varphi_\nu \subset K_N$. $|\langle S, \varphi_\nu \rangle| = |\lim_{j > N} \langle S_j, \varphi_\nu \rangle|$ et

$$|\langle S_j, \varphi_\nu \rangle| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{j-1} \frac{1}{2^k} |\varphi_\nu|_{0, K_N} + |\langle S_{N+1}, \varphi_\nu \rangle|.$$

S_{N+1} est un courant donc $\langle S_{N+1}, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$ et par hypothèse $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$, donc $|\varphi_\nu|_{0, K_N} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$. D'où $\langle S_j, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$. S est alors continu et est un courant prolongeable solution de l'équation $\bar{\partial}U = T$ dans $X \setminus \bar{\Omega}$. \square

4. Invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves et q -convexes

Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X . On note $H_\infty^{p, r}(D)$ respectivement $H_{\text{cour}}^{p, r}(D)$ le (p, r) ^{ième} groupe de cohomologie de Dolbeault des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ dans D respectivement des courants dans D .

Si $\check{Z}^{p,r}(D)$ désigne l'espace des courants de bidegré (p, r) sur D prolongeables, $\bar{\partial}$ -fermés et $\check{E}^{p,r}(D) = \bar{\partial}\check{D}'^{p,r-1}(X)$, alors on note

$$\check{H}^{p,r}(D) = \frac{\check{Z}^{p,r}(D)}{\check{E}^{p,r}(D)},$$

le (p, r) ^{ième} groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables définis sur D .

Nous étudions dans ce paragraphe l'injectivité et la surjectivité de l'application induite par restriction :

$$\check{S} : \check{H}^{0,r}(D) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D).$$

Définition 4.1. — Un domaine $D \subset X$ est dit à bord strictement q -convexe, respectivement q -concave, si :

- i) bD rencontre toutes les composantes connexes de X .
- ii) Il existe un voisinage U de bD , une fonction $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(q + 1)$ -convexe, respectivement $(q + 1)$ -concave, tels que

$$D \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}.$$

X est dit extension q -convexe généralisée, respectivement q -concave généralisée, de D si :

- 1) D rencontre toutes les composantes connexes de X .
- 2) Il existe une application $\rho : [0, +\infty[\times U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un voisinage de $X \setminus D$ telle que :
 - a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t, \cdot)$ est $(q + 1)$ -convexe, respectivement $(q + 1)$ -concave.
 - b) Pour tout $z \in U$, $\rho(\cdot, z)$ est une fonction décroissante.
 - c) L'application $t \rightarrow \rho(t, \cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.
 - d) $D \cap U = \{z \in U \mid \rho(0, z) < 0\}$ et pour tout $t > 0$, $\{z \in U \mid \rho(t, z) < 0\} \cap \bar{\mathcal{C}D}$ est relativement compact dans X .

Soit G un domaine de X . Supposons que G est une extension q -concave généralisée de D , $1 \leq q \leq n - 1$. On a d'après [6] les résultats suivants : l'application induite par restriction

$\mathcal{S} : H_\infty^{0,r}(G) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q - 1$, (théorème 1.1.3).

$\mathcal{S} : H_\infty^{0,q}(G) \rightarrow H_\infty^{0,q}(D)$ est injective, (théorème 1.1.4).

De plus, pour tout domaine Ω de X , l'application naturelle de $H_{\infty}^{0,r}(\Omega) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(\Omega)$, $0 \leq r \leq n$, est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. On en déduit l'équivalent pour les courants de l'invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves suivant : l'application induite par restriction

$S' : H_{\text{cour}}^{0,r}(G) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$,

$S' : H_{\text{cour}}^{0,q}(G) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(D)$, est injective.

Dans le cas convexe, on a l'analogie suivant du lemme 1.1.2 de [6].

LEMME 4.2. — Soit $\rho : [0, +\infty[\times X \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

- a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(t, \cdot)$ est $(q+1)$ -convexe.
- b) Pour tout $z \in X$, $\rho(\cdot, z)$ est une fonction décroissante.
- c) L'application $t \rightarrow \rho(t, \cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $C^{\infty}(X, \mathbb{R})$.
- d) ρ n'a pas de point critique dégénéré.

Posons $D_{\alpha} = \{z \in X \mid \rho(\alpha, z) < 0\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe α_0 tel que $\alpha < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha_0$, $\alpha' < \alpha$ et $D_{\alpha} \setminus \bar{D}_{\alpha'}$, est relativement compact dans X . Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout α, β vérifiant $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \varepsilon$, il existe un nombre fini de domaines $(A_i)_{i=0}^N$ tels que : $D_{\alpha} = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_N = D_{\beta}$ et pour tout j , $1 \leq j \leq N$, A_j se déduit de A_{j-1} à l'aide d'un élément d'extension q -convexe de X .

Démonstration. — Elle est identique à celle donnée dans [6], (cf. lemme 12.3 de [3]). \square

En utilisant le lemme 4.2, le lemme 12.4 de [3] et en procédant comme dans le paragraphe 12 de [3], on a

THÉORÈME 3. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , q un entier, $0 \leq q \leq n-1$ et D un domaine de X . On suppose que X est une extension q -convexe généralisée de D . Alors l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} S : H_{\infty}^{0,r}(X) &\longrightarrow H_{\infty}^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } r > n - q \\ \text{et} &&& \\ S : H_{\infty}^{0,n-q}(X) &\longrightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(D), && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Si D est relativement compact, alors $S : H_{\infty}^{0,n-q}(X) \rightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(D)$, est en plus injective.

Dans le cas compact le théorème 3 correspond au théorème 12.14 de [3].

THÉORÈME 4. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n , D un domaine à bord C^∞ de X . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave, $1 \leq q \leq n - 1$, alors l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} \check{S} : \check{H}^{0,r}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) \quad \text{est un isomorphisme pour } 0 \leq r \leq q - 1 \\ \text{et} \quad \check{S} : \check{H}^{0,q}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(D) \quad \text{est injective.} \end{aligned}$$

b) bD est strictement q -convexe, $1 \leq q \leq n - 1$, l'application induite par restriction

$$\begin{aligned} \check{S} : \check{H}^{0,r}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D) \quad \text{est un isomorphisme si } r > n - q \\ \text{et} \quad \check{S} : \check{H}^{0,n-q}(D) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(D) \quad \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Si de plus D est relativement compact, on a : $\check{S} : \check{H}^{0,n-q}(D) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(D)$ qui est en plus injective.

Démonstration.

a) Soient ρ une fonction définissante de D et $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X . Considérons une fonction $\chi_1 \in \mathcal{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_2$ qui vaut 1 dans K_1 . Il existe $t_1 > 0$ tel que $\rho_1 = \rho - t_1\chi_1$ soit $(q + 1)$ -concave dans un voisinage de $\{\rho_1 = 0\}$.

Posons $D_1 = D \cup \{\rho_1 < 0\}$. D_1 est un domaine de X à bord C^∞ strictement q -concave. $D_1 \setminus D = \{0 \leq \rho < t_1\chi_1\}$ est relativement compact et D_1 est une extension q -concave généralisée de D .

Soit $\chi_2 \in \mathcal{D}(X)$ à support dans $\overset{\circ}{K}_3$ qui vaut 1 dans K_2 . Il existe $t_2 > 0$ tel que $\rho_2 = \rho_1 - t_2\chi_2$ soit $(q + 1)$ -concave dans un voisinage de $\{\rho_2 = 0\}$. $D_2 = D_1 \cup \{\rho_2 < 0\}$ est un domaine à bord C^∞ strictement q -concave, $D_2 \setminus D_1 = \{0 \leq \rho_1 < t_2\chi_2\}$ est relativement compact et D_2 est une extension q -concave généralisée de D_1 . On construit ainsi une suite de domaines $(D_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ avec $D_0 = D$, $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_{\nu+1} \setminus D_\nu$ est relativement compact et $D_{\nu+1}$ est une extension q -concave généralisée de D_ν . $\tilde{D} = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} D_\nu \supset \bar{D}$ et est une extension q -concave généralisée de D .

• **Surjectivité de $\check{S} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q - 1$.**

Nous voulons montrer que pour tout $[T] \in H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, il existe $[\check{T}] \in \check{H}^{0,r}(D)$ tel que $\check{S}[\check{T}] = [T]$. Si $1 \leq r \leq q - 1$, cela revient à montrer qu'il

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau

existe \check{T} un courant $\bar{\partial}$ -fermé sur D , prolongeable et θ un $(0, r-1)$ courant dans D tels que :

$$\check{T} = T + \bar{\partial}\theta \text{ dans } D .$$

De la surjectivité de l'application $\mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0,r}(\tilde{D}) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q-1$, il existe un courant T' défini dans \tilde{D} , $\bar{\partial}$ -fermé et θ' un $(0, r-1)$ courant dans D tels que :

$$T' - T = \bar{\partial}\theta' \text{ dans } D \text{ pour } 1 \leq r \leq q-1 .$$

Il suffit de choisir $\check{T} = T'|_D$ d'où la surjectivité de $\check{\mathcal{S}}$ pour $1 \leq r \leq q-1$. De même

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}' : H_{\text{cour}}^{0,0}(\tilde{D}) & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,0}(D) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(\tilde{D}) & & \mathcal{O}(D) \end{array} \text{ est surjective,}$$

où $\mathcal{O}(D)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans D . Si $T \in \mathcal{O}(D)$, T est la restriction d'une fonction holomorphe T' définie dans \tilde{D} . On pose là aussi $\check{T} = T'|_D$.

Ainsi $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ est surjective pour $0 \leq r \leq q-1$.

• **Injectivité de $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $0 \leq r \leq q$.**

Pour $r = 0$, $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,0}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D)$.

Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0,0}(D)$ tel que $\check{\mathcal{S}}[\check{T}] = 0$ dans $D \cdot \check{T}|_D = 0$ et est un courant prolongeable. \check{T} appartient au dual topologique de $\mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$, il existe une suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{n,n}(D)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$.

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow 0} \langle \check{T}, \varphi_j \rangle = 0 \text{ car } \check{T}|_D = 0 .$$

Ainsi $\langle \check{T}, \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n}(\bar{D})$, d'où $\check{T} = 0$. Donc $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,0}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,0}(D)$ est injective.

Pour montrer l'injectivité de $\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$ pour $1 \leq r \leq q$, nous avons besoin de deux lemmes.

LEMME 4.3. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord C^∞ strictement q -concave. Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ , tel que pour tout domaine D_1 à bord C^∞*

suffisamment proche de D au sens de la topologie \mathcal{C}^2 et pour tout $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{D}}_{D_1}^{0,r}(X) \cap \ker \bar{\partial}$, $\bar{\partial}$ -exact dans D_1 , avec $1 \leq r \leq q$, il existe un courant $S \in \tilde{\mathcal{D}}^{0,r-1}(D_1 \cap \theta)$ tel que $\bar{\partial}S = \tilde{T}$ dans $D_1 \cap \theta$.

Avant de faire la preuve du lemme donnons d'abord une définition.

Définition 4.4. — Un domaine local q -concave dans \mathbb{C}^n ($1 \leq q \leq n-1$), cf. [8], est un triplet $[U, D, \rho]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) $U \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe.
- ii) ρ est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ définie dans un voisinage de U qui est strictement convexe par rapport aux $(q+1)$ premières coordonnées $z_1 \cdots z_{q+1}$ de $z \in U$.
- iii) $\{\rho < 0\} \neq \emptyset$ et $\{\rho < 1\} \subset\subset U$.
- iv) $D = \{0 < \rho < 1\}$ et $d\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in bD$.
- v) ρ est strictement convexe sur un voisinage de $\{\rho \geq 1\}$.

Démonstration du lemme. — Puisque D est à bord strictement q -concave, pour tout $1 \leq r \leq q$, D est aussi à bord strictement r -concave. Il suffit de faire la preuve pour q .

D'après le lemme 2.1.4 de [8], il existe un système de coordonnées (W, h) autour de ξ , un domaine local q -concave $[U, \tilde{D}, \rho]$ tels que :

a) $h(W) = U$, $\{\rho < 0\} \subset h(W \cap \{\varphi < 0\})$ où φ est une fonction définissante de $X \setminus \bar{D}_1$.

b) Il existe un voisinage $V \subset U$ de $h(\xi)$ pour lequel on a $V \cap \{\rho < 0\} = h(W \cap \{\varphi < 0\})$.

Posons $\tilde{\rho} = \rho \circ h$, $\Delta = \{0 < \tilde{\rho} < 1\} = h^{-1}(\tilde{D})$ vérifie les hypothèses du théorème 2. Posons $S_0 = \{\tilde{\rho} = 0\}$ le bord intérieur de Δ et $S_1 = \{\tilde{\rho} = 1\}$ le bord extérieur de Δ . Soient $\Omega = \{\tilde{\rho} < 1\}$ et $V_1 \subset\subset V_2 \subset\subset V_3 \subset\subset V_4 \subset\subset V_5$ des voisinages dans Ω de ξ tels que $V_5 \cap \mathbb{C}D_1 \subset\subset \{\tilde{\rho} < 0\}$. Considérons une fonction χ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , à valeurs dans $[0, 1]$ qui vaut 1 dans $V_3 \setminus \bar{V}_2$ et 0 dans $V_5 \setminus (V_4 \setminus \bar{V}_1)$. Pour ε suffisamment petit, $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi$ est $(q+1)$ -convexe dans un voisinage de S_0 et $\tilde{\rho} - \varepsilon\chi = \tilde{\rho}$ dans un voisinage de S_1 .

$\Delta' = \{0 < \tilde{\rho} - \varepsilon\chi < 1\} \subset \Delta$ vérifie encore les hypothèses du théorème 2.

Puisque $\check{T} \in \check{\mathcal{D}}_{D_1}^{0,q}(X) \cap \ker \bar{\partial}$ et \check{T} est $\bar{\partial}$ -exacte dans D_1 , il existe un courant γ défini dans D_1 tel que $\check{T} = \bar{\partial}\gamma$ dans D_1 . Soient $D_2 \subset D_1$ un domaine de X et χ_1 une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support dans D_1 qui vaut 1 dans D_2 . Posons $\tilde{T} = \check{T} - \bar{\partial}(\chi_1\gamma)$. \tilde{T} est un $(0, q)$ courant défini sur D_1 prolongeable, $\bar{\partial}$ -fermé et à support dans $D_1 \setminus D_2$. Choisissons D_2 suffisamment proche de D_1 de sorte que $(D_1 \setminus D_2) \cap \Delta'$ ait deux composantes connexes.

$$T' = \begin{cases} \tilde{T} & \text{sur } \Delta' \cap D_1 \cap V_3 \\ 0 & \text{sur } \Delta' \setminus (D_1 \cap V_2) \end{cases}$$

est un $(0, q)$ courant défini sur Δ' , nul au voisinage de S_1 , prolongeable à Ω et $\bar{\partial}$ -fermé.

Si $q \leq n - 2$, d'après le théorème 2, il existe un courant w défini dans Δ' prolongeable à Ω tel que $T' = \bar{\partial}w$ dans Δ' .

Si $q = n - 1$, posons $S'_0 = \{\bar{\rho} - \varepsilon\chi = 0\}$. D'après le théorème 2, *ii*),

$$\bar{\partial}\check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0,n-2}(\Omega) = \{T \in \check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0,n-1}(\Omega) \mid \langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}\}.$$

Donc pour montrer que $T' \in \bar{\partial}\check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0,n-2}(\Omega)$, il suffit de montrer que $\langle T', \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$.

Considérons T_0 une extension de T' à Ω . Puisque T' est nul au voisinage de S_1 , T_0 est à support compact dans Ω . Il appartient au dual des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω . Puisque T' est $\bar{\partial}$ -fermé dans Δ' , on a $\bar{\partial}T_0$ qui est à support dans $\Omega \setminus \Delta'$. $\bar{\partial}T_0$ est d'ordre fini ℓ . Soit $\varphi \in \mathcal{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$, $\varphi \in \mathcal{D}^{n,1}(\Omega) \cap \ker \bar{\partial}$ et Ω est complètement strictement $(n-1)$ -convexe. Donc il existe $\alpha \in \mathcal{D}^{n,0}(\Omega)$ telle que $\varphi = \bar{\partial}\alpha$ où $\alpha|_{\Omega \setminus \Delta'}$ est une n -forme \mathcal{C}^∞

dans $\Omega \setminus \Delta'$, holomorphe dans $\Omega \setminus \bar{\Delta}'$. Puisque Ω est une extension q -convexe de $\Omega \setminus \bar{\Delta}'$, il existe une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de n -formes holomorphes définies dans Ω qui converge pour la topologie C^ℓ vers α dans $\Omega \setminus \Delta'$.

$$|\langle T', \varphi \rangle| = |\langle T_0, \varphi \rangle| = |\langle \bar{\partial}T_0, \alpha - \alpha_j \rangle| \leq C|\alpha - \alpha_j|_{\ell, \Omega \setminus \Delta'}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'où $\langle T', \varphi \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n,1}(\Delta' \cup S'_0) \cap \ker \bar{\partial}$. Il existe donc $w \in \check{\mathcal{D}}_{\Delta'}^{0,n-2}(\Omega)$ tel que $\bar{\partial}w = T'$ dans Δ' . On pose $\theta = V_1$. Pour tout q , $1 \leq q \leq n - 1$, $\check{T} = \bar{\partial}(\chi\gamma + w)$ dans $D_1 \cap \theta$ et $\chi\gamma + w$ est un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$. \square

LEMME 4.5. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine à bord \mathcal{C}^∞ strictement q -concave ($1 \leq q \leq n - 1$). Soient \check{T} un $(0, r)$ courant, $1 \leq r \leq q$, $\bar{\partial}$ -exact dans D , prolongeable et S un compact de bD . Il existe un courant v_1 défini sur D , prolongeable, un

courant T_1 défini dans $D \cup W_S$, $\bar{\partial}$ -fermé, où W_S est un voisinage de S dans X tels que :

$$\check{T} = \bar{\partial}v_1 + T_1 \quad \text{dans } D .$$

Démonstration du lemme. — Soit Γ un fermé de S . On dit que Γ satisfait à la condition *Ex*, s'il existe $U \in \check{\mathcal{D}}_D^{0,r-1}(X)$ tel que $\check{T} - \bar{\partial}U$ admet une extension $\bar{\partial}$ -fermée à $D \cup W_\Gamma$, où W_Γ est un voisinage de Γ dans X .

Notons que d'après le lemme 4.3, si $\xi \in bD$, il existe $\Gamma \subset bD$ tel que Γ satisfait à la condition *Ex*. En effet, soient Γ un voisinage fermé de ξ dans bD tel que $\Gamma \subset\subset \theta \cap bD$, où θ est comme dans le lemme 4.3 et $w \in \check{\mathcal{D}}^{0,r-1}(D \cap \theta)$ (donné par le lemme 4.3) tel que $\bar{\partial}w = \check{T}$ dans $D \cap \theta$. Si χ est une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans θ qui vaut 1 dans un voisinage V_Γ de Γ , $U = \chi w$ est un courant défini dans D qui est prolongeable et $\check{T} - \bar{\partial}U$ admet une extension $\bar{\partial}$ -fermée à $D \cup V_\Gamma$.

Pour faire la démonstration du lemme, il suffit de montrer que S satisfait à la condition *Ex*. Puisque S est compact, il suffit de montrer que pour tout $\xi \in S$, il existe Λ un voisinage de ξ dans X tel que si $\Gamma \subset S$ satisfait à la condition *Ex*, alors $\Gamma \cup (\bar{\Lambda} \cap S)$ satisfait aussi à la condition *Ex*.

Fixons $\xi \in S$ et choisissons deux voisinages Λ et θ de ξ , $\Lambda \subset\subset \theta$, où θ est comme dans le lemme 4.3. Soit $\Gamma \subset S$ qui vérifie la condition *Ex*. Il existe v un courant prolongeable défini sur D , un voisinage W_Γ de Γ dans X tels que $\check{T} - \bar{\partial}v$ admet une extension \tilde{T} , $\bar{\partial}$ -fermée dans $D \cup W_\Gamma$. On choisit D_1 suffisamment proche de D au sens du lemme 4.3 tel que $D \subset D_1$, $\Gamma \subset\subset D_1 \subset D \cup W_\Gamma$. D'après le lemme 4.3, il existe w un courant prolongeable défini sur $D_1 \cap \theta$ tel que $\tilde{T} = \bar{\partial}w$ dans $D_1 \cap \theta$.

Soit $\chi' \in \mathcal{D}(X)$ à support dans θ et $\chi' \equiv 1$ dans un voisinage $U_{\bar{\Lambda}}$ de $\bar{\Lambda}$. Posons $U = v + \chi'w$ sur D . U est un courant prolongeable, $\check{T} - \bar{\partial}U$ est nul dans un voisinage $U_{\bar{\Lambda}}$ de $\bar{\Lambda}$. $\check{T} - \bar{\partial}U = (\check{T} - \bar{\partial}v) - \bar{\partial}(\chi'w)$ admet un prolongement $\bar{\partial}$ -fermé dans un voisinage $D_1 \cup U_{\bar{\Lambda}}$ de $\Gamma \cup \bar{\Lambda}$. \square

Fin de la démonstration de la partie a) du théorème. — Soit $[\check{T}] \in \check{H}^{0,r}(D)$ tel que $\check{S}[\check{T}] = 0$ dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$. Pour montrer l'injectivité de $\check{S} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $1 \leq r \leq q$, on va construire une suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$, avec $D_0 = D$ et $T_0 = \check{T}$ et où D_j est un domaine de X tel que $D_{j+1} \supset D_j$, D_{j+1} est une extension q -concave généralisée de D_j , $D_{j+1} \setminus D_j$ est relativement compact, $\tilde{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j \supset \bar{D}$ et T_j est un courant défini sur D_j , prolongeable, $\bar{\partial}$ -exact dans D_j tel que $T_{j+1} = T_j$ dans D_j .

Supposons la suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ construite. $\tilde{T} = \lim_j T_j$ est un courant défini dans \tilde{D} , $\bar{\partial}$ -fermé et $\tilde{T} = \tilde{T}$ dans D . Puisque par hypothèses \tilde{T} est $\bar{\partial}$ -exact dans D , \tilde{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$. Par invariance de la cohomologie pour les extensions q -concaves généralisées, \tilde{T} représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(\tilde{D})$. Il existe donc un courant $\tilde{\psi}$ défini dans \tilde{D} tel que $\tilde{T} = \bar{\partial}\tilde{\psi}$ dans \tilde{D} . $\tilde{T} = \bar{\partial}(\tilde{\psi}|_D)$, d'où $[\tilde{T}] = 0$ dans $\check{H}^{0,r}(D)$ pour $0 \leq r \leq q$.

Construction de la suite $(D_j, T_j)_{j \in \mathbb{N}}$. — Considérons une suite exhaustive $(S_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de compacts de bD . Posons $D_0 = D$ et $T_0 = \tilde{T}$. Supposons (D_k, T_k) construit pour $k \leq j$, D_j est un domaine à bord C^∞ strictement q -concave. T_j est un courant défini sur D_j , prolongeable à travers bD_j et $\bar{\partial}$ -exact dans D_j . Soit S'_{j+1} un compact de bD_j tel que :

$$bD_j \setminus S'_{j+1} = bD \setminus S_{j+1} .$$

D'après le lemme 4.5 appliqué à S'_{j+1} , D_j et T_j , il existe un courant v_{j+1} défini dans D_j prolongeable, un courant T'_j défini dans $D_j \cup W_{S'_{j+1}}$ (où $W_{S'_{j+1}}$ est un voisinage dans X de S'_{j+1}), $\bar{\partial}$ -fermé tels que $T_j = \bar{\partial}v_{j+1} + T'_j$ dans D_j . Considérons D_{j+1} et D'_{j+1} deux domaines de X , obtenus par une déformation C^2 de la fonction définissante de D_j . Supposons que D_{j+1} et D'_{j+1} vérifient : $D_j \cup S'_{j+1} \subset D_{j+1} \subset D'_{j+1} \subset D_j \cup W_{S'_{j+1}}$, D'_{j+1} est une extension q -concave généralisée de D_{j+1} , D_{j+1} est une extension q -concave généralisée de D_j , $D'_{j+1} \setminus D_{j+1}$ et $D_{j+1} \setminus D_j$ sont relativement compacts.

Le courant $T'_j|_{D'_{j+1}} \in Z_{\text{cour}}^{0,r}(D'_{j+1})$ est en fait $\bar{\partial}$ -exact dans D'_{j+1} . En effet, grâce à l'hypothèse de récurrence, $T_j = \bar{\partial}\psi_j$ dans D_j et par conséquent $T'_j = \bar{\partial}(\psi_j - v_{j+1})$ dans D_j . Le courant T'_j représente alors la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D_j)$. Les propriétés des extensions q -concave généralisées ([6], théorème (1.1.3)) et l'isomorphisme de Dolbeault impliquent que T'_j représente la classe nulle dans $H_{\text{cour}}^{0,r}(D'_{j+1})$. Il existe donc un courant v'_j dans D'_{j+1} tel que $T'_j = \bar{\partial}v'_j$ dans D'_{j+1} . On pose $T_{j+1} = \bar{\partial}((v'_j + v'_{j+1})|_{D_{j+1}})$, où v'_{j+1} est une extension de v_{j+1} à D'_{j+1} , ce qui donne (D_{j+1}, T_{j+1}) avec les propriétés requises.

Preuve de b) C'est une répétition de la démarche de la démonstration de la partie a) ; du théorème 3 et de l'isomorphisme de Dolbeault, on a une version courant du théorème 3 d'où l'on déduit la surjectivité de $\check{S} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $n - q \leq r \leq n$. Pour l'injectivité de $\check{S} : \check{H}^{0,r}(D) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(D)$, $r > n - q$ respectivement $r \geq n - q$ si D est relativement compact, on remplace le lemme 4.3 par le lemme suivant :

LEMME 4.6. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord C^∞ strictement q -convexe. Soit \tilde{T} un courant sur D , prolongeable et $\bar{\partial}$ -exact dans D . Pour tout $\xi \in bD$, il existe un voisinage θ de ξ dans X , un courant \check{U} sur $\theta \cap D$, prolongeable tel que $\tilde{T} = \bar{\partial}\check{U}$ dans $\theta \cap D$.

Démonstration du lemme. — Puisque bD est strictement q -convexe, D est localement biholomorphe à un domaine linéairement q -convexe. Pour tout $\xi \in bD$, on choisit un ouvert de coordonnées (U, h) autour de ξ , où U est biholomorphe à un convexe de \mathbb{C}^n . $U \cap D$ est un domaine complètement strictement q -convexe. Par les fonctions \max_β de [3], on peut construire un domaine $D_1 \subset U \cap D$, complètement strictement q -convexe à bord C^∞ tel que $\xi \in bD_1$. $\tilde{T}|_{D_1}$ est un courant prolongeable, $\bar{\partial}$ -fermé. D'après le théorème 4.1 de [13], il existe \check{U} un courant prolongeable sur D_1 solution de $\bar{\partial}S = \tilde{T}$ dans D_1 . Il suffit de choisir θ tel que $\theta \cap D \subset \bar{D}_1$. \square

Dans le cas des formes différentielles on a la relation suivante entre $H_\infty^{0,r}(\bar{D})$ et $H_\infty^{0,r}(D)$:

THÉORÈME 5. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord C^∞ . Supposons que :

a) bD est strictement q -concave, alors l'application induite par restriction :

$$\begin{aligned} S : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\longrightarrow H_\infty^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q-1 \\ \text{et} \\ S : H_\infty^{0,q}(\bar{D}) &\longrightarrow H_\infty^{0,q}(D) && \text{est injective.} \end{aligned}$$

b) Si bD est strictement q -convexe, alors l'application induite par restriction

$$\begin{aligned} S : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) &\longrightarrow H_\infty^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } n-q < r \leq n \\ \text{et} \\ S : H_\infty^{0,n-q}(\bar{D}) &\longrightarrow H_\infty^{0,n-q}(D) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Démonstration. — C'est une répétition de la preuve du théorème 4. Pour l'injectivité de $S : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$, $1 \leq r \leq q$ dans a) on utilise le lemme 3.2 de [8]. Pour l'injectivité de $S : H_\infty^{0,r}(\bar{D}) \rightarrow H_\infty^{0,r}(D)$, $n-q < r \leq n$ dans b), on remplace dans le lemme 4.6 le courant \tilde{T} par une forme différentielle $f \in Z_\infty^{0,r}(\bar{D})$, $\bar{\partial}$ -exacte dans D et le théorème 4.1 de [13] par le théorème 2 de [10]. \square

COROLLAIRE 4.7. — Soient X une variété analytique complexe de dimension n et D un domaine de X à bord C^∞ . Supposons que :

Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau

a) bD est strictement q -concave. Alors l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(\bar{D}) &\longrightarrow \check{H}^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q-1 \\ \text{et } H_{\infty}^{0,q}(\bar{D}) &\longrightarrow \check{H}^{0,q}(D) && \text{est injective.} \end{aligned}$$

b) bD est strictement q -convexe. Alors l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(\bar{D}) &\longrightarrow \check{H}^{0,r}(D) && \text{est un isomorphisme si } r > n-q \\ \text{et } H_{\infty}^{0,n-q}(\bar{D}) &\longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(D) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Démonstration.

a) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes 4, a), et 5, a). Pour $r = q$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^{0,q}(D) & \hookrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,q}(D) \\ \uparrow & & \uparrow \wr \\ H_{\infty}^{0,q}(\bar{D}) & \hookrightarrow & H_{\infty}^{0,q}(D) . \end{array}$$

D'où $H_{\infty}^{0,q}(\bar{D}) \rightarrow \check{H}^{0,q}(D)$ est injective.

b) C'est une conséquence de l'isomorphisme de Dolbeault et des théorèmes 4, b) et 5, b). Pour $r = n - q$, \tilde{D} un voisinage de \bar{D} qui est en plus une extension q -convexe généralisée de D , on a d'après le lemme 3 de [4], la surjectivité de l'application restriction de : $H_{\infty}^{0,n-q}(\tilde{D}) \rightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(\bar{D})$. Du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{\infty}^{0,n-q}(\tilde{D}) & \twoheadrightarrow & H_{\infty}^{0,n-q}(\bar{D}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ H_{\text{cour}}^{0,n-q}(\tilde{D}) & \twoheadrightarrow & \check{H}^{0,n-q}(D) , \end{array}$$

on a la surjectivité de l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,n-q}(\bar{D}) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(D)$.

□

5. Application à l'étude de l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles

Nous allons utiliser dans cette partie les relations entre la $\bar{\partial}$ -cohomologie et la $\bar{\partial}_b$ -cohomologie établies par [1], [2] pour les formes différentielles et

[12], [2] pour les courants afin d'étudier l'isomorphisme de Dolbeault dans les hypersurfaces réelles. On sait que l'application naturelle de $H_{\infty}^{0,r}(X) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(X)$ est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault. Si S est une hypersurface réelle, nous allons nous intéresser à l'application naturelle de $H_{\infty}^{0,r}(S) \rightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$, où $H_{\infty}^{0,r}(S)$ respectivement $H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$, est le $(0, r)^{\text{ème}}$ groupe de $\bar{\partial}_b$ -cohomologie des formes différentielles C^{∞} définies sur S respectivement des courants définis sur S .

THÉORÈME 6. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe C^{∞} de X . Si la forme de Lévi de S admet en chaque point de S ;*

i) q valeurs propres de même signe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S) && \text{est surjective si } n - q \leq r \leq q - 1 \\ \text{et} & & & \\ H_{\infty}^{0,r}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S) && \text{est injective si } n - q + 1 \leq r \leq q. \end{aligned}$$

ii) q paires de valeurs propres de signe contraire, $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$, l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S) && \text{est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q - 1 \\ & & & \text{et } n - q + 1 \leq r \leq n - 1, \\ \text{et} & & & \\ H_{\infty}^{0,q}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(S) && \text{est injective} \\ H_{\infty}^{0,n-q}(S) &\longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(S) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Remarque. — Le cas *ii)* correspond au cas de la codimension 1 dans [9].

Démonstration. — Quitte à restreindre X , on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^- .

i) On peut supposer sans perte de généralité que X^- se situe du côté concave de S . D'après le corollaire 4.7, *a)*, l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(\bar{X}^-) &\longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^-) && \text{est un isomorphisme si } 0 \leq r \leq q - 1 \\ \text{et} & & & \\ H_{\infty}^{0,q}(\bar{X}^-) &\longrightarrow \check{H}^{0,q}(X^-) && \text{est injective.} \end{aligned}$$

D'après le corollaire 4.7, *b)*, l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(\bar{X}^+) &\longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^+) && \text{est un isomorphisme si } r > n - q \\ \text{et} & & & \\ H_{\infty}^{0,n-q}(\bar{X}^+) &\longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^+) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

On applique ces informations au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \longrightarrow & H_{\infty}^{0,r}(X) & \longrightarrow & H_{\infty}^{0,r}(\bar{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,r}(\bar{X}^-) & \longrightarrow & H_{\infty}^{0,r}(S) \\
 & \downarrow c_r & & \downarrow a_r & & \downarrow b_r \\
 \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(X) & \longrightarrow & \check{H}^{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r}(X^-) & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(S) \\
 & & & & & \\
 & \longrightarrow & H_{\infty}^{0,r+1}(X) & \longrightarrow & H_{\infty}^{0,r+1}(\bar{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,r+1}(\bar{X}^-) & \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow c_{r+1} & & \downarrow a_{r+1} & \\
 & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r+1}(X) & \longrightarrow & \check{H}^{0,r+1}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r+1}(\bar{X}^-) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des applications naturelles et les suites horizontales les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes de complexes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{0,*}^{\infty}(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{0,*}^{\infty}(\bar{X}^+) \oplus \mathcal{C}_{0,*}^{\infty}(\bar{X}^-) \longrightarrow W^{0,*}(S) \longrightarrow 0$$

$W^{0,r}(S)$ désignant les sections de Whitney sur S du fibré des (p, r) -formes différentielles, et

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_S^{0,*}(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{0,*}(X) \longrightarrow \check{\mathcal{D}}_{X \setminus S}^{0,*}(X) \longrightarrow 0$$

$\mathcal{D}_S^{0,r}(X)$ désignant les courants de bidegré $(0, r)$ sur X à support dans S , modulo l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H_{\infty}^{0,r}(S)$ et ceux des sections de Whitney sur S et l'isomorphisme entre les groupes de cohomologie $H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ et ceux des courants sur X à support dans S .

Pour $q-1 \geq r \geq n-q+1$, a_r, c_r, c_{r+1} sont des isomorphismes et a_{r+1} injective. D'après le lemme des cinq, b_r est un isomorphisme.

De même, pour $r = q$, a_q est injective, c_q et c_{q+1} sont des isomorphismes. Par le lemme des quatre, b_q est injective.

Pour $r = n-q$, c_{n-q}, c_{n-q+1} sont des isomorphismes, a_{n-q+1} est injective et a_{n-q} est surjective. b_{n-q} est surjective par le lemme des quatre.

ii) Si la forme de Lévi de S admet q paires de valeurs propres de signe contraire, alors

$$\begin{array}{lcl}
 \check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,r}(X^{\pm}) & \longrightarrow & H_{\text{cour}}^{0,r}(X^{\pm}) \quad \text{est un isomorphisme} \\
 & & \text{pour } 0 \leq r \leq q-1 \text{ et} \\
 & & n-q+1 \leq r \leq n,
 \end{array}$$

$$\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,q}(X^{\pm}) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,q}(X^{\pm}) \quad \text{est injective et}$$

$$\check{\mathcal{S}} : \check{H}^{0,n-q}(X^{\pm}) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,n-q}(X^{\pm}) \quad \text{est surjective.}$$

De même

$$\begin{aligned} S : H_{\infty}^{0,r}(\overline{X}^{\pm}) &\longrightarrow H_{\infty}^{0,r}(X^{\pm}) && \text{est un isomorphisme} \\ &&& \text{pour } 0 \leq r \leq q-1 \text{ et} \\ &&& n-q+1 \leq r \leq n, \\ S : H_{\infty}^{0,q}(\overline{X}^{\pm}) &\longrightarrow H_{\infty}^{0,q}(X^{\pm}) && \text{est injective et} \\ S : H_{\infty}^{0,n-q}(\overline{X}^{\pm}) &\longrightarrow H_{\infty}^{0,n-q}(X^{\pm}) && \text{est surjective.} \end{aligned}$$

Donc l'application naturelle de :

$$\begin{aligned} H_{\infty}^{0,r}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,r}(\overline{X}^-) &\longrightarrow \check{H}^{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^{0,r}(X^-) && \text{est un isomorphisme} \\ &&& \text{pour } 0 \leq r \leq q-1 \text{ et} \\ &&& n-q+1 \leq r \leq n, \end{aligned}$$

$$H_{\infty}^{0,q}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,q}(\overline{X}^-) \longrightarrow \check{H}^{0,q}(X^+) \oplus \check{H}^{0,q}(X^-) \text{ est injective et}$$

$$H_{\infty}^{0,n-q}(\overline{X}^+) \oplus H_{\infty}^{0,n-q}(\overline{X}^-) \longrightarrow \check{H}^{0,n-q}(X^+) \oplus \check{H}^{0,n-q}(X^-) \text{ est surjective.}$$

On conclut alors par l'utilisation du lemme des quatre comme dans *i*).

□

COROLLAIRE 5.1. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de classe C^{∞} de X . Supposons que pour tout $z \in S$, la forme de Lévi de S a ℓ valeurs propres d'un même signe et q paires de valeurs propres de signes opposés avec $q \leq \ell$. Alors,*

i) Si $\ell \leq \frac{n}{2}$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$, est injective si $r = q$ et est surjective si $r = n-q$.

ii) Si $\ell = \frac{n+1}{2}$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$, injective si $r = q$ et ℓ , surjective si $r = n-\ell$ et $n-q$.

iii) Si $\ell \geq \frac{n}{2}+1$, l'application naturelle de : $H_{\infty}^{0,r}(S) \longrightarrow H_{\text{cour}}^{0,r}(S)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$, $n-\ell+1 \leq r \leq \ell-1$ et $n-q+1 \leq r \leq n-1$. Elle est injective si $r = q$ et ℓ , surjective si $r = n-\ell$ et $n-q$.

Bibliographie

- [1] ANDREOTTI A., HILL D.C., *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy Problem I*, Ann. norm. super. Pisa (1972), 325–363.
- [2] ANDREOTTI A., HILL D.C., LOJASIEWICZ S. and MACKICHAN B., *Complexes of differential operators: the Mayer-Vietoris sequence*, Inventiones Math. **26** (1976), 43–86.
- [3] HENKIN G.M., LEITERER J., *Andreotti-Grauert theory by integrals formulas*, Birkhäuser, 1986.
- [4] HILL C.D., NACINOVICH M., *On the Cauchy problem in complex analysis*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXXI (1996), 159–179.
- [5] HORMANDER L., *Introduction to analysis of several complex variables*, (IV edition) North-Holland company Publishing (1973).
- [6] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Phénomène de Hartogs-Bochner relatif dans une hypersurface réelle 2-concave d'une variété analytique complexe*, Math. Z. **212** (1993), 511–523.
- [7] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Inter-Editions et CNRS Editions, 1997.
- [8] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Andreotti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR forms*, Mathematical Notes, **38**, Princeton University (1993), 416–436.
- [9] LAURENT-THIÉBAUT CH. et LEITERER J., *Dolbeault isomorphism for CR manifolds*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 521, Grenoble (2000).
- [10] LIEB I., RANGE R.M., *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann komplex mit C^k Abschätzungen*, Math. Ann. **253** (1980), 145–165.
- [11] MARTINEAU A., *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Strasbourg RCP **25** (1966).
- [12] NACINOVICH M., VALLI G., *Tangential Cauchy-Riemann complexes on distributions*, Ann. di Matematica pura ed applicata (IV) vol. CXLVI (1987), 123–160.
- [13] SAMBOU S., *Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables*, Math. Nach. **235** (2002), 179–190.
- [14] SAMBOU S., *Équation de Cauchy-Riemann pour les courants prolongeables – Applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **332** (2001), 497–500.