

LEILA BEN ABDELGHANI

**Variété des caractères et slice étale de l'espace
des représentations d'un groupe**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 11,
n° 1 (2002), p. 19-32

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2002_6_11_1_19_0

© Université Paul Sabatier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Variété des caractères et slice étale de l'espace des représentations d'un groupe ^(*)

LEILA BEN ABDELGHANI ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Soient Γ un groupe de présentation finie dont l'abélianisé est isomorphe à \mathbb{Z} et G un groupe algébrique complexe connexe réductif. Nous utilisons la notion de slice étale pour étudier la structure locale de la variété des caractères $X(\Gamma, G)$ au voisinage d'une classe de représentations abéliennes. De plus, nous construisons un slice étale explicite; ce qui nous permet de montrer sur un exemple que l'espace tangent de Zariski à la variété des caractères peut ne pas être isomorphe au premier groupe de cohomologie.

ABSTRACT. — Let Γ be a finitely presented group such that Γ/Γ' is isomorphic to \mathbb{Z} and let G be an algebraic complex connected reductive group. We use the notion of slice étale to describe the local structure of the character variety $X(\Gamma, G)$ near a class of abelian representations. Furthermore, we construct an explicit slice étale and prove that the Zariski tangent space to the character variety may not be isomorphic to the first cohomology group.

0. Introduction

Soient Γ un groupe de présentation finie et G un groupe algébrique complexe connexe réductif. L'ensemble $R(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G est une variété algébrique affine non nécessairement irréductible. Le groupe G opère algébriquement sur $R(\Gamma, G)$ par conjugaison et le quotient algébrique $R(\Gamma, G)//G$ est par définition *la variété des caractères* de Γ et est noté $X(\Gamma, G)$.

(*) Reçu le 14 novembre 2001, accepté le 4 septembre 2002

(1) Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5000 Monastir, Tunisie.

e-mail : leila.benabdelghani@fsm.rnu.tn

Nous étudions la structure locale de la variété des caractères au voisinage d'une classe de représentations $[\rho]$. Pour cela, nous considérons un slice étale V en ρ de la projection algébrique $p : R(\Gamma, G) \rightarrow X(\Gamma, G)$. C'est l'analogue, dû à D. Luna, d'une section locale d'un fibré analytique.

La première partie est consacrée à la notion de représentations réduites au sens des schémas. A. Lubotzky et A. R. Magid ([L-M, Chapitre 1]) ont montré qu'on peut associer, de façon naturelle, à une représentation ρ l'espace tangent de Zariski en ρ au schéma $\mathcal{R}(\Gamma, G)$, mais cet espace ne coïncide pas nécessairement avec l'espace tangent en ρ à la variété $R(\Gamma, G)$. Lorsque ces deux espaces coïncident, on dit, suivant J. Porti ([P, Chapitre 3]), que la représentation est réduite au sens des schémas. En particulier, nous montrons que si Γ est un groupe de présentation finie, $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n | W_1, \dots, W_m \rangle$ dont l'abélianisé est isomorphe à \mathbb{Z} et ρ_0 est une représentation abélienne de Γ dans G telle que $\rho_0(X_1)$ est un élément semi-simple de G , alors ρ_0 est réduite au sens des schémas, (proposition 1.4).

Dans la deuxième partie, nous montrons que $T_{\rho_0}^{Zar} V$ est isomorphe à $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$, (proposition 2.8) et nous construisons un slice étale explicite, (théorème 2.10). Ce slice explicite a été utilisé par M. Heusener, J. Porti et E. Suárez pour la déformation de certaines structures hyperboliques ([H-P-S]).

La dernière partie est consacrée à une application immédiate du slice explicite. C'est un calcul des composantes des variétés des représentations et des caractères pour les noeuds toriques dans le groupe $SL_2(\mathbb{C})$. Une des conséquences immédiates de ce calcul est que l'espace tangent de Zariski à la variété des caractères peut ne pas être isomorphe au premier groupe de cohomologie (§3).

Dans la suite de cet article, toutes les variétés algébriques considérées sont définies sur le corps des complexes.

1. Espace tangent de Zariski et représentations réduites au sens des schémas

Soient G un groupe algébrique complexe connexe réductif et Γ un groupe qui admet une présentation finie de la forme $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n | W_1, \dots, W_m \rangle$.

Plongeons G dans $GL_N(\mathbb{C}) \subset M_N(\mathbb{C})$ pour N assez grand. La présentation donnée de Γ définit une sous-variété algébrique de $(M_N(\mathbb{C}))^n$ et donc un idéal \mathcal{I} engendré par les fonctions polynomiales qui la définissent. La \mathbb{C} -algèbre de type fini $\mathbb{C}[X_{ij}]/\mathcal{I}$, $1 \leq i, j \leq N$ ne dépend en fait, à isomorphisme près, ni du plongement ni de la présentation du groupe Γ et

définit un schéma noté $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ ([L-M, Proposition 1.2]). Le radical $I = \sqrt{\mathcal{I}}$ de \mathcal{I} est alors l'idéal de définition de la variété algébrique $R(\Gamma, G)$. En particulier, la structure de variété algébrique de $R(\Gamma, G)$ est indépendante de la présentation de Γ .

DÉFINITION 1.1. — Soit V une sous-variété affine de \mathbb{C}^n dont l'idéal de définition est $I(V)$. Soit p un point de V ; l'espace tangent de Zariski à V en p est l'espace vectoriel des dérivées des germes polynomiaux $\gamma(t)$ définis au voisinage de l'origine, à valeurs dans \mathbb{C}^n tels que $\gamma(0) = p$ et qui satisfont les équations de $I(V)$ modulo t^2 :

$$T_p^{Zar}(V) = \left\{ \frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=0} \in \mathbb{C}^n \mid \gamma \in (\mathbb{C}[t])^n, \right. \\ \left. \gamma(0) = p \text{ et } f \circ \gamma \in t^2\mathbb{C}[t] \text{ pour tout } f \in I(V) \right\}.$$

En général, $\dim(T_p^{Zar}(V)) \geq \dim V$ et on a égalité si et seulement si le point p n'est pas singulier.

Soit ρ un point de la variété $R(\Gamma, G)$; on lui associe l'espace $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$. On peut également considérer le schéma $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ et lui associer l'espace $T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$ défini par

$$T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G) = \\ \left\{ \frac{d\gamma(t)}{dt} \Big|_{t=0} \in \mathbb{C}^n \mid \gamma \in (\mathbb{C}[t])^n, \gamma(0) = \rho \text{ et } f \circ \gamma \in t^2\mathbb{C}[t] \text{ pour tout } f \in \mathcal{I} \right\}.$$

On a alors l'inclusion naturelle $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subset T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$ qui est conséquence de l'inclusion $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}} = I$.

De plus, l'espace tangent au schéma $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ admet une interprétation cohomologique. Soit $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$ l'espace vectoriel des 1-cocycles de Γ à coefficients dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G qui admet la structure de Γ -module via la représentation adjointe $Ad\rho$.

PROPOSITION 1.2 ([L-M, Proposition 2.2]). — Soit $\rho \in R(\Gamma, G)$, alors il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\Gamma, \mathcal{G}) & \longrightarrow & T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G) \\ V & \longmapsto & \frac{d\gamma_t}{dt} \Big|_{t=0} \end{array}$$

où γ_t est de la forme $\gamma_t = \exp(tV + o(t^2))\rho$. \square

On peut donc identifier de façon naturelle $T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$ à $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$ et $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ à un sous-espace de $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$.

Rappelons ([P, Définition 3.3]) qu'une représentation $\rho \in R(\Gamma, G)$ est dite *réduite au sens des schémas* si l'inclusion de $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ dans $T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$ est une égalité, autrement dit, si on peut identifier $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ à $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$.

DÉFINITION 1.3. — 1) On appelle *cône tangent* de $R(\Gamma, G)$ en ρ l'ensemble

$$C_\rho^T(\Gamma, G) = \left\{ \frac{d\gamma_t}{dt} \Big|_{t=0} \mid \gamma_t \text{ est un arc analytique dans } R(\Gamma, G) \text{ d'extrémité } \rho \right\}.$$

2) Soit V un élément de $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$; nous dirons que V est un *vrai vecteur tangent* si $V \in C_{\rho_0}^T(\Gamma, G)$.

3) Une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est dite *abélienne* si $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe abélien de G .

Dans le reste de cet article, nous désignerons par Γ un groupe de présentation finie $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n \mid W_1, \dots, W_m \rangle$ d'abélianisé isomorphe à \mathbb{Z} et q un homomorphisme de Γ dans \mathbb{Z} tel que $q(X_1) = 1$.

PROPOSITION 1.4. — *Soit ρ_0 une représentation abélienne de Γ dans G telle que $\rho_0(X_1)$ est un élément semi-simple de G ; alors ρ_0 est réduite au sens des schémas et on a l'égalité*

$$T_{\rho_0}^{Zar} R(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, \mathcal{G}).$$

Démonstration. — Pour montrer ce résultat, il suffit de montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $C_{\rho_0}^T(\Gamma, G)$ coïncide avec $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$. Comme la représentation ρ_0 est abélienne, elle est parfaitement déterminée par $\rho_0(X_1)$. Or $\rho_0(X_1)$ est un élément semi-simple de G donc $\rho_0(X_1)$ appartient à un sous-groupe de Cartan H de G d'algèbre de Lie \mathcal{H} et $\rho_0(X_1) = \exp h_0$ où $h_0 \in \mathcal{H}$ et $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$ est l'application exponentielle. La réductivité de l'algèbre de Lie \mathcal{G} implique que \mathcal{G} se décompose comme Γ -module sous la forme $\mathcal{G} \cong \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})} \mathcal{G}_\alpha$ où $\Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ désigne le système de racines de

l'algèbre de Lie \mathcal{G} par rapport à la sous-algèbre de Cartan \mathcal{H} et $\mathcal{G}_\alpha = \{X \in \mathcal{G} \mid [h, X] = \alpha(h)X, \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$ ([O-V, Chapitre 3]). Plus précisément, l'action de Γ est triviale sur \mathcal{H} et est donnée par la multiplication par $\omega = e^{\alpha(h_0)}$ sur \mathcal{G}_α pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$.

Soit V un cocycle de $Z^1(\Gamma, \mathcal{G}_\alpha)$, $\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$; alors un calcul simple, utilisant le fait que $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha] = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, montre que $\rho_t = \exp tV \rho_0$, $t \in \mathbb{R}$, est un chemin de représentations de Γ dans G . Donc tout

cocycle de $Z^1(\Gamma, \mathcal{G}_\alpha)$ est un vrai vecteur tangent. De plus, il est facile de voir que les cocycles de $Z^1(\Gamma, \mathcal{H})$ sont de vrais vecteurs tangents; donc le sous-espace vectoriel engendré par $C_{\rho_0}^T(\Gamma, G)$ est égal à $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$. \square

Remarque. — A. Lubotzky et A. R. Magid ont donné un exemple de représentation qui n'est pas réduite au sens des schémas ([L-M, Chapitre 2, Exemple 2.10.4]).

2. Variété des caractères- Slice étale

Soit X une variété affine. On désigne par $\mathbb{C}[X]$ son anneau des coordonnées; c'est une algèbre de type fini sur \mathbb{C} , non nécessairement intègre. Les points de X correspondent soit aux idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X]$, soit aux homomorphismes d'algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans \mathbb{C} . Les éléments de $\mathbb{C}[X]$ définissent des fonctions polynomiales de X à valeurs dans \mathbb{C} .

Soit G un groupe réductif qui opère algébriquement sur X . Le groupe G opère alors aussi sur $\mathbb{C}[X]$, par automorphismes d'algèbres et de façon semi-simple. Comme l'algèbre $\mathbb{C}[X]^G$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ laissés fixes par G est de type fini car G est réductif, il lui correspond une variété affine notée $X//G$. L'inclusion $\mathbb{C}[X]^G \subset \mathbb{C}[X]$ fournit un morphisme $p_X : X \rightarrow X//G$ qui est surjectif et tel que toute fibre contient exactement une unique orbite fermée. L'application p_X induit une application continue pour la topologie usuelle $X/G \rightarrow X//G$. Pour plus de détails, voir [P-V, II, §4.4].

Soient Γ un groupe de présentation finie et G un groupe algébrique complexe connexe réductif. On appelle *variété des caractères de $R(\Gamma, G)$* , le quotient algébrique $X(\Gamma, G) = R(\Gamma, G)//G$.

Rappelons que si G est un groupe affine qui opère algébriquement sur une variété affine V , alors toute orbite est une variété lisse ([B, Chapitre I, §1.8]).

DÉFINITION 2.5. — (*Morphisme étale* ([P-V, II, §6.2])) Soient U et V deux variétés affines. Un morphisme $f : U \rightarrow V$ est dit *étale en $u \in U$* si l'homomorphisme naturel entre les anneaux locaux complétés:

$$f^* : \hat{\mathcal{O}}_{f(u)}(V) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_u(U)$$

est un isomorphisme. Le morphisme f est dit *étale* s'il l'est en tout point $u \in U$.

Comme le corps de base est le corps des complexes, f est étale en $u \in U$ si et seulement si f réalise un isomorphisme analytique entre des voisinages bien choisis (pour la topologie usuelle) de u et de $f(u)$. De plus, si f est

étale en $u \in U$ alors l'application tangente $d_u f : T_u^{Zar} U \longrightarrow T_{f(u)}^{Zar} V$ est un isomorphisme ([M, Chapitre III, §5, Corollaire 1 du Théorème 3]).

Si u et $f(u)$ sont des points non singuliers de U et V , alors f est étale en u si et seulement si $d_u f$ est un isomorphisme entre les espaces tangents $T_u U$ et $T_{f(u)} V$.

Soit H un sous-groupe réductif d'un groupe réductif G et soit X une variété affine dans laquelle H opère à gauche. On fait opérer H dans $G \times X$ par $h(g, x) = (gh^{-1}, h \cdot x)$. On dénote par $G \times_H X$ le quotient algébrique de $G \times X$ par cette action.

Le groupe G opère sur lui-même par translations à gauche et induit une opération algébrique dans le quotient $G \times_H X$. On peut montrer que le quotient $(G \times_H X)//G$ est isomorphe à la variété affine $X//H$ (voir [P-V, II, §4.8]).

THÉORÈME 2.6. — (*Théorème du slice étale de Luna, [L]*) Soit G un groupe réductif qui opère dans une variété affine X . Soit x un point de X dont l'orbite $G(x)$ est fermée. Il existe alors une sous-variété V de X qui a les propriétés suivantes: elle est affine et contient x ; le groupe d'isotropie G_x laisse V stable; l'opération de G dans X induit un G -morphisme étale $\psi : G \times_{G_x} V \rightarrow X$; l'image U de ψ est un ouvert affine p_X -saturé de X (où p_X désigne la surjection $X \rightarrow X//G$); le morphisme

$$\psi//G : (G \times_{G_x} V)//G \cong V//G_x \longrightarrow U//G$$

est étale; enfin les morphismes ψ et $\pi : G \times_{G_x} V \rightarrow (G \times_{G_x} V)//G \cong V//G_x$ induisent un G -isomorphisme

$$G \times_{G_x} V \rightarrow U \times_{U//G} V//G_x$$

où $U \times_{U//G} V//G_x$ désigne l'espace total du fibré réciproque de $U \rightarrow U//G$ par $\psi//G$.

DÉFINITION 2.7. — On appelle *slice étale en x* toute sous-variété V de X qui a les propriétés énumérées dans le théorème 2.6.

Remarque. — Le théorème 2.6 montre l'existence de « vrais slices » analytiques : à savoir, des sous-variétés analytiques V' de X , contenant x , stables par G_x , et telles que l'opération de G dans X induit un isomorphisme analytique de $G \times_{G_x} V'$ sur un voisinage ouvert (dans la topologie usuelle) de $G(x)$ dans X .

PROPOSITION 2.8. — Soit $\rho_0 : \Gamma \rightarrow G$ une représentation abélienne telle que $\rho_0(X_1)$ est un élément semi-simple de G . Alors il existe un slice V en ρ_0 de $R(\Gamma, G)$. Son espace tangent $T_{\rho_0}^{Zar} V$ est isomorphe à $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ et l'espace tangent $T_{[\rho_0]}^{Zar} X(\Gamma, G)$ est isomorphe à $T_{[\rho_0]}^{Zar}(V//G_{\rho_0})$.

Démonstration. — L'existence du slice V est une conséquence du fait que l'orbite $G(\rho_0)$ est fermée dans $R(\Gamma, G)$ ([S, Chapitre II, §2.13, Corollaire 1 du Théorème 2]) et du théorème 2.6. On note par ψ le G -morphisme étale $\psi : G \times_{G_{\rho_0}} V \rightarrow R(\Gamma, G)$ et par U l'image de ψ .

Remarquons tout d'abord que ρ_0 est réduite au sens des schémas (proposition 1.4), donc $T_{\rho_0}^{Zar} R(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$.

Comme la fibration $G \rightarrow G/G_{\rho_0}$ est localement triviale, le morphisme $p : G \times_{G_{\rho_0}} V \rightarrow G/G_{\rho_0}$ donné par $p([g, v]) = [g]$ est aussi un fibré localement trivial de fibre gV pour la topologie étale ([P-V, II démonstration du Théorème 4.19]). Soit Z un ouvert trivialisant de G/G_{ρ_0} ; alors il existe un morphisme étale $\varphi : Z \times V \rightarrow p^{-1}(Z)$ tel que $p \circ \varphi = pr_1$ où $pr_1 : Z \times V \rightarrow Z$ désigne la projection sur la première composante.

Considérons la suite suivante de morphismes:

$$\begin{aligned} T_{\rho_0}^{Zar} V \xrightarrow{j_2} B^1(\Gamma, \mathcal{G}) \oplus T_{\rho_0}^{Zar} V \xrightarrow{d\theta \oplus id} T_e(G/G_{\rho_0}) \oplus T_{\rho_0}^{Zar} V \xrightarrow{d\varphi} \\ T_{[e, \rho_0]}^{Zar}(G \times_{G_{\rho_0}} V) \xrightarrow{d\psi} T_{\rho_0}^{Zar} R(\Gamma, G) = Z^1(\Gamma, \mathcal{G}) \xrightarrow{q} H^1(\Gamma, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

où j_2 désigne l'inclusion naturelle, q est la projection canonique et θ désigne l'isomorphisme $G(\rho_0) \rightarrow G/G_{\rho_0}$ donné par $\theta(g\rho_0g^{-1}) = [g]$ pour tout $g \in G$.

Puisque $p^{-1}(Z)$ est un ouvert de $G \times_{G_{\rho_0}} V$ et les morphismes φ et ψ sont étales, $d\varphi$ et $d\psi$ sont des isomorphismes. Il est aussi facile de voir que $d\psi \circ d\varphi \circ (d\theta \oplus id) \circ j_2 = di$ où $i : V \rightarrow R(\Gamma, G)$ désigne l'inclusion naturelle.

Considérons un chemin analytique g_t dans G d'extrémité e , alors $g_t\rho_0g_t^{-1}$ est dans $G(\rho_0)$ et $\psi \circ \varphi([g_t], \rho_0) = \psi([g_t, \rho_0]) = g_t\rho_0g_t^{-1}$. Autrement dit, si j_1 désigne l'inclusion $j_1 : B^1(\Gamma, \mathcal{G}) \rightarrow B^1(\Gamma, \mathcal{G}) \oplus T_{\rho_0}^{Zar} V$ alors la composée $d\psi \circ \varphi \circ (d\theta \oplus id) \circ j_1$ n'est autre que l'inclusion naturelle $B^1(\Gamma, \mathcal{G}) \rightarrow Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$. Il s'ensuit que $\alpha = q \circ di : T_{\rho_0}^{Zar} V \rightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ est un isomorphisme et que $s = di \circ \alpha^{-1}$ est une section de q . La dernière affirmation est une conséquence du fait que le morphisme $\psi//G : V//G_{\rho_0} \rightarrow U//G$ est étale en $[\rho_0]$ où U désigne l'image de ψ qui est un ouvert de $R(\Gamma, G)$. \square

Le but de ce qui suit est de construire explicitement dans la variété $R(\Gamma, G)$ un slice V en ρ_0 où G désigne un groupe algébrique complexe connexe réductif et ρ_0 est une représentation qui vérifie les hypothèses de la proposition 2.8.

DÉFINITION 2.9. — 1) Soit G un groupe algébrique complexe connexe réductif. Un élément $x \in G$ est dit *régulier* si son centralisateur $Z_G(x)$ est de dimension minimale parmi tous les centralisateurs des éléments de G , ou d'une manière équivalente, si la classe de conjugaison $C(x)$ de x est de dimension maximale comme sous-variété algébrique. La dimension minimale mentionnée ci-dessus est le rang de G , c'est-à-dire la dimension d'un tore maximal.

Si x est un élément semi-simple de G , alors x appartient à un tore maximal unique qui coïncide avec l'intérieur de $Z_G(x)$, (voir [S, Chapitre III, §3.5] pour plus de détails).

2) Soient G un groupe algébrique complexe connexe réductif et T un tore maximal de G . On notera par T^{reg} l'ouvert non vide de Zariski de T formé par les éléments réguliers.

THÉORÈME 2.10. — Soit $\rho_0 : \Gamma \rightarrow G$ une représentation abélienne de Γ dans G telle que $\rho_0(X_1)$ est un élément semi-simple régulier de G qui appartient à un tore maximal T . Alors il existe un ouvert $S_{\rho_0(X_1)}$ de T^{reg} qui contient $\rho_0(X_1)$ et tel que la variété

$$V = R(\Gamma, G) \cap (S_{\rho_0(X_1)} \times G^{n-1})$$

est un slice de $R(\Gamma, G)$ en ρ_0 .

Nous proposons la démonstration de ce théorème en trois étapes : en premier nous montrons le résultat dans le cas d'un groupe cyclique infini (lemme 2.11), ensuite dans le cas d'un groupe libre (lemme 2.12) et en dernier dans le cas général.

LEMME 2.11. — Soient G un groupe algébrique complexe connexe réductif et T un tore maximal de G . Alors la sous-variété T^{reg} contient en tout point $x \in T^{reg}$ un ouvert S_x qui est un slice étale en x .

Démonstration du lemme 2.11. — Soit x un élément de T^{reg} alors $T_x G(x) \cong \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})} \mathcal{G}_{\alpha}$ où \mathcal{H} désigne la sous-algèbre de Cartan correspondante au tore maximal T . Autrement dit, $\mathcal{H} \cong T_x T^{reg}$ est un espace T -invariant supplémentaire à $T_x G(x)$ dans $T_x G \cong \mathcal{G}$. Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \psi : G \times_{G_x} T^{reg} &\longrightarrow G \\ ([g, s]) &\longmapsto g \cdot s = g s g^{-1}. \end{aligned}$$

Le point x est un élément non singulier de T^{reg} donc d'après [P-V, II, §4.8, Proposition 4.22] le point $[e, x]$ est un point non singulier de $G \times_{G_x} T^{reg}$. Pour montrer que ψ est étale en $[e, x]$ il suffit de montrer que $d_{[e, x]} \psi$ réalise

un isomorphisme entre les espaces tangents (définition 2.5). De plus, pour tout $x \in T^{reg}$ on a, ([P-V, II, §4.8, Proposition 4.22]),

$$T_{[e,x]}(G \times_{G_x} T^{reg}) \cong T_x T^{reg} \oplus T_x G(x) \cong \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})} \mathcal{G}_{\alpha} \cong \mathcal{G} \cong T_x G$$

donc ψ est étale en tout point de la fibre T^{reg} et par là même en tout point de $G \times_{G_x} T^{reg}$. D'autre part, toutes les conditions de [P-V, II, §6.3, Lemme 6.2] sont vérifiées, donc T^{reg} contient un ouvert S_x qui est un slice étale en $x \in T^{reg}$.

Notons par U l'image de $\psi : G \times_{G_x} S_x \rightarrow G$; alors U est un ouvert de G .

LEMME 2.12. — *Soit F_n le groupe libre de base (X_1, \dots, X_n) . Supposons que ρ est une représentation de F_n dans G telle que $x = \rho(X_1)$ est un élément semi-simple régulier de G qui appartient à un tore maximal T et tel que $G_{\rho} = G_x$. Alors la variété $V_0 = S_x \times G^{n-1}$ est un slice de $R(F_n, G)$ en ρ .*

Démonstration du lemme 2.12. — Il est facile de voir que le morphisme algébrique

$$\begin{aligned} F : G \times_{G_{\rho}} V_0 &\longrightarrow (G \times_{G_x} S_x) \times G^{n-1} \\ [g, (t, y)] &\longmapsto ([g, t], g \cdot y) \end{aligned}$$

est un isomorphisme dont l'inverse F^{-1} est donné par $F^{-1}([g, t], z) = [g, (t, g^{-1} \cdot z)]$.

Notons par Φ le morphisme

$$\begin{aligned} \Phi : G \times_{G_{\rho}} V_0 &\longrightarrow G^n \cong R(F_n, G) \\ [g, v] &\longmapsto g \cdot v. \end{aligned}$$

Si ψ désigne le morphisme étale du lemme 2.11,

$$\begin{aligned} \psi : G \times_{G_x} S_x &\longrightarrow G \\ [g, t] &\longmapsto g \cdot t. \end{aligned}$$

alors $\Phi = (\psi \times id_{G^{n-1}}) \circ F$ et Φ est un morphisme étale d'image l'ouvert $\mathcal{U} = U \times G^{n-1}$ où U est l'ouvert du lemme 2.11. Pour conclure on applique de nouveau le lemme 6.2 de [P-V, II, §6.3].

Revenons à la démonstration du théorème 2.10. Considérons la présentation du groupe $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n | W_1, \dots, W_m \rangle$. Notons par $\tilde{\rho}_0$ la représentation de F_n dans G telle que $\tilde{\rho}_0(X_i) = \rho_0(X_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors l'orbite $G(\tilde{\rho}_0)$ est fermée dans $R(F_n, G)$ ([S, Chapitre II, §2.13, Corollaire 1 du Théorème 2]) et d'après le lemme 2.12, la variété $V_0 = S_{\rho_0(X_1)} \times G^{n-1}$

est un slice de $R(F_n, G)$ en $\tilde{\rho}_0$. D'autre part, $R(\Gamma, G)$ est une sous-variété G -invariante fermée de $R(F_n, G)$; donc d'après [P-V, II, §6.3] la variété $V = V_0 \cap R(\Gamma, G)$ est un slice de $R(\Gamma, G)$ en ρ_0 . \square

3. Exemple : Cas des noeuds toriques

Rappelons que, si p et q sont deux entiers premiers entre eux tels que $p, q \geq 2$ alors le groupe d'un noeud torique $K_{p,q}$ admet une présentation finie de la forme $\Gamma = \langle x, y | x^p = y^q \rangle$. Un élément de $K_{p,q}$ qui s'envoie sur 1 par abélianisation est donné par la formule $X_1 = x^m y^{-n}$ où m et n sont deux entiers naturels tels que $qm - pn = 1$ ([B-Z, Proposition 3.28]). Le polynôme d'Alexander de $K_{p,q}$ est $\Delta(t) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$ ([B-Z, Exercice 9.15]).

On se propose d'étudier la structure locale de la variété $R(\Gamma, G)$, où $G = SL_2(\mathbb{C})$, au voisinage d'une représentation abélienne ρ_0 telle que $\rho_0(X_1)$ est une matrice diagonale de la forme $\rho_0(X_1) = \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ et $e^{i\theta}$ est une $2pq$ -racine primitive de l'unité. Comme ρ_0 est abélienne, ceci implique que $\rho_0(x) = \text{diag}(e^{iq\theta}, e^{-iq\theta})$ et $\rho_0(y) = \text{diag}(e^{ip\theta}, e^{-ip\theta})$.

Notons par T le tore algébrique maximal de G : $T = \{\text{diag}(a, a^{-1}) | a \neq 0\}$. L'élément $\rho_0(x)$ est un élément régulier dans T (car $e^{iq\theta} \neq e^{-iq\theta}$) donc, d'après le théorème 2.10, il existe un ouvert $S_{\rho_0(x)}$ de T^{reg} contenant $\rho_0(x)$ et tel que la variété $V = (S_{\rho_0(x)} \times G) \cap R(\Gamma, G)$ est un slice étale de $R(\Gamma, G)$ au point ρ_0 . Donc pour étudier la structure locale de $R(\Gamma, G)$ au voisinage de ρ_0 , il suffit de décrire le slice V . On va montrer que la variété V admet deux composantes lisses qui passent par ρ_0 .

C'est un fait classique que $Ab(\Gamma, G)$ est une composante irréductible de $R(\Gamma, G)$ qui est lisse en ρ_0 ([L-M, Chapitre 3]). Comme V est un ouvert de $R(\Gamma, G)$, $V_0 = V \cap Ab(\Gamma, G)$ est une composante irréductible de V qui est lisse en ρ_0 .

D'autre part, il est facile de voir que

$$V_0 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) \in T^2 \mid \alpha \neq \pm 1 \text{ et } \alpha^p = a^q \right\}$$

et que V_0 est de dimension 1.

On s'intéresse aux autres composantes de V passant par ρ_0 . Soit $\rho \in V$; alors $\rho(x)$ est un élément régulier de T c'est-à-dire $\rho(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \pm 1$, $\rho(y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$ et $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^q$.

Un calcul simple montre que pour tout $A \in G$ et tout $n \geq 1$:

$$A^n = P_n(\text{tr}A)A - P_{n-1}(\text{tr}A)I$$

où les $P_n(X)$ désignent des polynômes qui vérifient la relation de récurrence $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$ et tels que $P_0(X) = 0$ et $P_1(X) = 1$. En fait, on a $P_{n+1}(X) = U_n(\frac{X}{2})$ où les $U_n(X)$ désignent les polynômes de Chebyshev de seconde espèce définis par $\sin x U_n(\cos x) = \sin(n+1)x$.

La condition $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^q$ est donc équivalente à

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha^p & = & P_q(a+d)a - P_{q-1}(a+d) \\ 0 & = & P_q(a+d)b \\ 0 & = & P_q(a+d)c \\ \alpha^{-p} & = & P_q(a+d)d - P_{q-1}(a+d). \end{cases}$$

Si $b = c = 0$, la représentation ρ est dans V_0 .

Supposons que $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ alors le système (S) est équivalent à

$$(\tilde{S}) \quad \begin{cases} P_q(a+d) & = & 0 \\ \alpha^p = \alpha^{-p} & = & -P_{q-1}(a+d). \end{cases}$$

Remarquons que la représentation abélienne ρ_0 vérifie ce système d'équations. En effet, $P_q(e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}) = U_{q-1}(\cos p\theta)$ et $\sin p\theta U_{q-1}(\cos p\theta) = 0$. Or $e^{i\theta}$ est une $2pq$ -racine primitive de l'unité, donc $\sin p\theta \neq 0$ et $U_{q-1}(\cos p\theta) = 0$. On vérifie de même que $e^{ipq\theta} = \cos pq\theta = -P_{q-1}(2 \cos p\theta)$.

Comme on s'intéresse aux représentations qui sont dans un voisinage assez petit de ρ_0 , la condition (\tilde{S}) est équivalente à $\alpha = e^{iq\theta}$ et $a + d = \text{tr} \rho_0(y) = e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}$. Autrement dit, c'est l'ensemble algébrique

$$V_1 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} e^{iq\theta} & 0 \\ 0 & e^{-iq\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \mid a + d = e^{ip\theta} + e^{-ip\theta} \text{ et } ad - bc = 1 \right\}.$$

Cette variété est isomorphe à l'hypersurface dans \mathbb{C}^3 définie par l'équation $a^2 + bc + 1 - a(e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}) = 0$ et elle est lisse en ρ_0 .

Il y a donc deux composantes lisses V_0 et V_1 de V passant par ρ_0 et de dimensions respectives 1 et 2.

LEMME 3.13. — *Les deux composantes V_0 et V_1 sont transverses.*

Démonstration du lemme 3.13. — Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, on note par $r(u)$ l'unique solution analytique définie au voisinage de 1 de l'équation $X^q = u^p$ telle que $r(1) = 1$ et par $f(v, w)$ l'unique solution analytique définie au voisinage de $(0, 0)$ de l'équation $X^2 + vw + 1 - X(e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}) = 0$ telle que $f(0, 0) = e^{ip\theta}$.

Considérons l'application analytique $\phi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \rightarrow T \times G$ donnée par $\phi(u, v, w)$

$$= \left(\begin{pmatrix} e^{iq\theta}u & 0 \\ 0 & e^{-iq\theta}u^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(v, w)r(u) & v \\ w & (e^{ip\theta} + e^{-ip\theta} - f(v, w))\frac{1}{r(u)} \end{pmatrix} \right)$$

et posons $W = \mathbb{C}^* \times \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{C}^2$, $W_0 = \mathbb{C}^* \times \{0\}$ et $W_1 = \{1\} \times \mathbb{C}^2$. Alors $\phi(W) = V$, $\phi(W_0) = V_0$ et $\phi(W_1) = V_1$.

Soit i le plongement naturel $T \times G \rightarrow \mathbb{C}^6$. La différentielle de l'application analytique $i \circ \phi$ au point $(1, 0, 0)$ est de rang maximum. On en déduit que ϕ est un isomorphisme local au voisinage de $(1, 0, 0)$ et que $\mathbb{C}^* \times \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{C}^2$ est un ensemble analytique isomorphe à V au voisinage de ρ_0 . Ceci implique que les deux composantes V_0 et V_1 sont transverses en ρ_0 dans V . \square

Comme V est un slice de $R(\Gamma, G)$ en ρ_0 , on déduit de ce qui précède qu'il y a exactement deux composantes dans $R(\Gamma, G)$ qui passent par ρ_0 de dimensions respectives 3 et 4 et qui s'intersectent transversalement en l'orbite de ρ_0 . En effet, un voisinage de ρ_0 dans $R(\Gamma, G)$ est décrit par $G(\rho_0) \times V$.

Le quotient algébrique $X(\Gamma, G)$ est localement isomorphe à $V//T$. En effet, $G_{\rho_0} = T$ car $\rho_0(x)$ est un élément régulier de G , (voir théorème 2.6). Etudions le quotient $V//T$.

L'action de T sur V_0 est triviale, donc $V_0//T \cong V_0$ et il est facile de voir que l'action de T sur V_1 est donnée par

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t^2b \\ t^{-2}c & d \end{pmatrix}.$$

Donc le point ρ_0 est fixe par T et il existe deux orbites dont l'adhérence contient ρ_0 qui correspondent aux représentations métabéliennes; elles sont données par $b = 0$ ou $c = 0$. Les autres orbites sont fermées.

Considérons l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ donnée par $t \cdot (u, v, w) = (u, t^2v, t^{-2}w)$ et notons par π le morphisme quotient $\pi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2)//\mathbb{C}^*$. Comme $\phi|_W$ est un isomorphisme au voisinage de ρ_0 qui est compatible avec l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et de T sur $T \times G$, la variété quotient $W//\mathbb{C}^*$ est localement isomorphe à $V//T$ en $[(1, 0, 0)]$.

On est donc ramené à étudier le quotient $W//\mathbb{C}^*$. La sous-variété algébrique W est fermée dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et \mathbb{C}^* -stable, donc $W//T$ est isomorphe à $\pi(W)$. D'autre part, le quotient $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2)//\mathbb{C}^*$ est isomorphe à $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2//\mathbb{C}^*)$ car l'action est triviale sur \mathbb{C}^* . De plus $\mathbb{C}^2//\mathbb{C}^*$ est isomorphe à \mathbb{C} et $\pi(W)$ s'identifie à $\mathbb{C}^* \times \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{C}$.

On en déduit que $X(\Gamma, G)$ est isomorphe au voisinage de $[\rho_0]$ à l'intersection transverse de deux droites dans \mathbb{C}^2 et que son espace tangent de Zariski $T_{[\rho_0]}^{Zar} X(\Gamma, G)$ est de dimension 2.

L'une des conséquences immédiates de ce résultat est que $T_{[\rho_0]}^{Zar} X(\Gamma, G)$ ne peut être isomorphe au premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ car $\dim H^1(\Gamma, \mathcal{G}) = 3$ ([BA]). Ceci montre qu'on ne peut pas toujours identifier l'espace tangent à la variété des caractères au premier groupe de cohomologie.

Remerciements

Cet article est issu de la thèse que j'ai préparée au Laboratoire de Topologie de l'Université de Bourgogne. Je tiens à remercier Daniel Lines qui a dirigé ce travail ainsi que Lucy Moser-Jauslin qui m'a initiée à la géométrie algébrique et à la notion de slice. Je remercie également Joan Porti qui a attiré mon attention sur la notion de représentations réduites au sens des schémas.

Bibliographie

- [BA] BEN ABDELGHANI (L.). — *Espace des représentations du groupe d'un noeud classique dans un groupe de Lie*, Ann. Inst. Fourier, 50, 4, 2000, 1297-1321.
- [B] BOREL (A.). — *Linear Algebraic Groups*, a second enlarged edition, Springer-Verlag New York Inc., 1991.
- [B-Z] BURDE (G.) et ZIESCHANG (H.). — *Knots*, de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [H-P-S] HEUSENER (M.), PORTI (J.) et SUÁREZ (E.). — *Regenerating Singular hyperbolic Structures from Sol*, preprint, 2000.
- [L] LUNA (D.). — *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire, 33, 1973, 81-105.
- [L-M] LUBOTZKY (A.) et MAGID (A.). — *Varieties of Representations of Finitely Generated Groups*, Memoirs of the A.M.S., 58, 1985, 336.
- [M] MUMFORD. — *Introduction to Algebraic Geometry*, The Red Book of Varieties and Schemes, L.N.M 1358, Berlin Springer-Verlag, 1988.
- [O-V] ONISHCHIK (A.L.) et VINBERG (E.B.). — *Lie Groups and Lie Algebras III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 41, Springer-Verlag, 1991.

- [P] PORTI (J.). — *Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques*, Memoirs A.M.S., Vol. 128, (612), A.M.S., Providence, 1997.
- [P-V] POPOV (V.L.) et VINBERG (E.B.). — *Invariant Theory, Algebraic Geometry IV*, A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.) Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 55, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [S] STEINBERG (R.). — *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*, L.N.M 366, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1974.