

MICHEL HICKEL

**Sur quelques aspects de la géométrie de l'espace
des arcs tracés sur un espace analytique**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 14,
n° 1 (2005), p. 1-50

http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_1_1_0

© Université Paul Sabatier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur quelques aspects de la géométrie de l'espace des arcs tracés sur un espace analytique^(*)

MICHEL HICKEL⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Soient (X, x) un germe d'espace analytique complexe ou réel et $\mathcal{A}_{(X,x)}$ l'espace des arcs tracés sur (X, x) . Considérons $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ un germe de morphisme et désignons par $\mathcal{F}_x : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(Y,y)}$ le morphisme induit au niveau des espaces des arcs. Dans cet article, nous tentons de souligner les analogies entre les propriétés topologiques locales ou métriques de F_x et celles de \mathcal{F}_x . Nous définissons ensuite les notions de suite de Nash des multiplicités, suite de Nash des fonctions de Hilbert-Samuel, suite de Nash des diagrammes des exposants initiaux de X le long d'un arc φ , et étudions leurs premières propriétés. Certains liens élémentaires avec la théorie de l'intégration motivique sont aussi établis.

ABSTRACT. — Let (X, x) be a germ of real or complex analytic space and $\mathcal{A}_{(X,x)}$ the space of germs of arcs on (X, x) . Let us consider $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ a germ of a morphism and denote by $\mathcal{F}_x : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(Y,y)}$ the induced morphism at the level of arcs. In this paper, we try to emphasize the analogies between the metric or local topological properties of F_x and those of \mathcal{F}_x . We then define the notions of Nash sequence of multiplicities, Nash sequence of Hilbert-Samuel functions and Nash sequence of diagram of initial exponents of X along an arc φ , and study some of their basic properties. Some elementary connections between these notions and motivic integration theory are also provided.

1. Introduction

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et (X, x) un germe de \mathbb{K} -espace analytique, d'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$. Nous noterons par $\mathcal{A}_{(X,x)}$ l'espace des arcs tracés sur (X, x) , c'est-à-dire l'ensemble des germes de morphismes analytiques φ de $(\mathbb{K}, 0)$ dans (X, x) , ou bien de façon équivalente l'ensemble des morphismes φ^* de

(*) Reçu le 26 février 2003, accepté le 25 mai 2004

(1) Université Bordeaux 1, Laboratoire d'analyse et géométrie, U.M.R. 5467 du C.N.R.S., 351 cours de la libération, F-33405 TALENCE Cedex.
E-mail : hickel@math.u-bordeaux.fr

\mathbb{K} -algèbre locale de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_1 = \mathbb{K}\{t\}$. De manière plus générale si X est un espace analytique et A un sous-ensemble de $|X|$, nous désignerons par $\mathcal{A}_{(X,A)}$ (resp. \mathcal{A}_X) l'union $\coprod_{x \in A} \mathcal{A}_{(X,x)}$ (resp. $\coprod_{x \in X} \mathcal{A}_{(X,x)}$). \mathcal{A}_X est naturellement munie d'une distance ultramétrique notée \mathcal{D}_X , définie de la manière suivante :

- $\forall \varphi \in \mathcal{A}_{(X,x)}, \forall \phi \in \mathcal{A}_{(X,x')}, x \neq x'$, on pose $\mathcal{D}_X(\varphi, \phi) = 1$;
- $\forall \varphi, \phi \in \mathcal{A}_{(X,x)}$, on pose $\mathcal{D}_X(\varphi, \phi) = e^{-ord(\varphi - \phi)}$, où $ord(\varphi - \phi)$ désigne la valuation ou l'ordre de l'idéal de \mathcal{O}_1 , $(\varphi^* - \phi^*)(\mathcal{M}_{X,x})$, et $\mathcal{M}_{X,x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

La topologie induite par \mathcal{D}_X sur \mathcal{A}_X sera dite la topologie de Krull sur \mathcal{A}_X . Soit maintenant un germe de morphisme analytique $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$. Celui-ci induit un morphisme $\mathcal{F}_x : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(Y,y)}$, où pour $\varphi \in \mathcal{A}_{(X,x)}$, $\mathcal{F}_x(\varphi)$ est l'arc $(\mathbb{K}, 0) \rightarrow (X, x) \rightarrow (Y, y)$ obtenu par composition de φ avec F_x . De façon plus générale si $F : X \rightarrow Y$ est un morphisme, nous noterons par $\mathcal{F} : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y$ le morphisme induit au niveau de l'espace des arcs.

Dans cet article nous abordons deux thèmes. Le premier consiste à tenter de souligner les analogies entre les propriétés topologiques locales d'un morphisme $F : X \rightarrow Y$, et celles du morphisme induit $\mathcal{F} : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y$.

Nous donnons deux illustrations de ce jeu de miroirs. La première concerne un résultat dû à J.C. Tougeron. Dans [T3], l'auteur précité donne des inégalités de Lojasiewicz, avec exposant uniforme, par rapport aux fibres d'un morphisme analytique. Plus précisément :

THÉORÈME 1.1 (J.C. TOUGERON). — *Soit F une application analytique d'un ouvert Ω_n de \mathbb{R}^n dans un ouvert Ω_p de \mathbb{R}^p . Pour toute paire de compacts $K \subset \Omega_n$ et $K' \subset \Omega_p$, il existe une constante $\alpha \geq 0$ satisfaisant :*

$$\forall y \in K', \exists C_y > 0 \forall x \in K, d_p(F(x), y) \geq C_y d_n(x, F^{-1}(y))^\alpha$$

où d_p (resp. d_n) désigne la distance euclidienne sur \mathbb{R}^p (resp. sur \mathbb{R}^n).

Le théorème résulte trivialement de l'assertion suivante :

ASSERTION 1.2. — *Pour toute paire de compacts $K \subset \Omega_n$, $K' \subset \Omega_p$, il existe une constante $\alpha \geq 0$ satisfaisant :*

$$\forall y \in K', \forall x_0 \in K, \exists C_{(x_0,y)} > 0 \text{ et } V_{x_0} \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que :}$$

$$\forall x \in V_{x_0}, d_p(F(x), y) \geq C_{(x_0,y)} d_n(x, F^{-1}(y))^\alpha$$

Nous allons voir que l'on a un résultat analogue, au niveau du morphisme induit au niveau des espaces des arcs, en remplaçant la distance euclidienne par la distance ultramétrique définie plus haut. Nous démontrerons en effet :

THÉORÈME 1.3. — *Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathbb{K} -espace analytique et $\mathcal{F} : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y$ le morphisme induit au niveau de l'espace des arcs. Alors pour toute paire de compacts $K \subset X$, $K' \subset Y$, il existe une constante α satisfaisant :*

$\forall \varphi \in \mathcal{A}_{(Y, K')}, \forall \phi_0 \in \mathcal{A}_{(X, K)}, \exists C_{(\phi_0, \varphi)} > 0$ et $\mathcal{V}\phi_0$ voisinage de ϕ_0 tel que :

$$\forall \phi \in \mathcal{V}\phi_0, \mathcal{D}_X(\mathcal{F}(\phi), \varphi) \geq C_{(\phi_0, \varphi)} \mathcal{D}_Y(\phi, \mathcal{F}^{-1}(\varphi))^\alpha.$$

De la même façon que l'existence d'une majoration affine pour la fonction d'Artin-Greenberg (cf. [Gr]) équivaut à des inégalités de Lojasiewicz au niveau de l'espace des arcs (cf. [H2]), le résultat ci-dessus s'interprète comme une version partiellement uniforme du théorème de Greenberg, l'espace des paramètres étant \mathcal{A}_Y (cf. section 3).

La seconde illustration des analogies précédemment évoquées concerne la condition de rang de A.M. Gabrielov. Pour le rôle joué par cette condition, nous renvoyons le lecteur à [B-M3], [Ga], [I1], [I2], [I3], [I4], [P] et plus particulièrement à [I4] et à sa bibliographie pour une historique. Si $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est un germe de morphisme entre germes d'espaces irréductibles, on définit le rang générique de F_x par :

$$grk(F_x) = \inf_U \left(\sup_{x'} rang(F_{x'}), x' \in Reg(X \cap U) \right)$$

où U parcourt une base de voisinage de x , $Reg(X \cap U)$ désigne l'ensemble des points réguliers de $X \cap U$, et $rang(F_{x'})$ est le rang de la matrice jacobienne de $F_{x'}$ en x' . On dit que F_x satisfait la condition de rang de A.M. Gabrielov si et seulement si :

$$grk(F_x) = dim_y Y.$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il est relativement élémentaire de vérifier que cette condition peut se caractériser topologiquement par l'équivalence des conditions suivantes :

- $grk(F_x) = dim_y Y$;
- $\forall U$ voisinage de x assez petit, $\forall V$ ouvert de $Reg(X \cap U)$, $F_x(V)$ contient un ouvert de $Reg(Y)$;
- $\forall U$ voisinage de x assez petit, $F_x(Reg(X \cap U))$ contient un ouvert de $Reg(Y)$.

Désignons maintenant par $(\text{Sing}(X), x)$ le germe en x de l'ensemble des points singuliers de (X, x) . Soit alors $\mathcal{R}_{(X,x)} = \mathcal{A}_{(X,x)} - \mathcal{A}_{(\text{Sing}(X), x)}$ l'ensemble des arcs tracés dans (X, x) , mais dont l'image n'est pas entièrement incluse dans $(\text{Sing}(X), x)$. $\mathcal{R}_{(X,x)}$ joue comme nous le verrons plus loin le rôle de l'ensemble des points réguliers de $\mathcal{A}_{(X,x)}$. Etant donné un morphisme $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, il semble naturel de se demander quand $\mathcal{F}_x(\mathcal{A}_{(X,x)})$ contient un ensemble représentatif de $\mathcal{A}_{(Y,y)}$, par exemple un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$. Là encore le phénomène est similaire au niveau du morphisme F_x et à celui de \mathcal{F}_x . On a en effet :

THÉORÈME 1.4. — *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soient $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ un morphisme entre deux germes irréductibles et $\mathcal{F}_x : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(Y,y)}$ le morphisme induit. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\text{grk}(F_x) = \dim_y Y$;
- 2) Pour tout ouvert \mathcal{V} de $\mathcal{R}_{(X,x)}$, $\mathcal{F}_x(\mathcal{V})$ contient un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$;
- 3) $\mathcal{F}_x(\mathcal{R}_{(X,x)})$ contient un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$.

Notre démonstration est élémentaire dans le sens où elle n'utilise pas l'existence de désingularisation, ni aucun des résultats concernant la condition de rang de A.M. Gabrielov mentionnés ci-dessus. Par contre on peut retrouver partiellement à partir de 1.4 certains de ces résultats (cf. section 6).

Le deuxième thème abordé dans cet article concerne la notion de suite des multiplicités de Nash le long d'un arc. En un certain sens, nous cherchons des notions convenables de multiplicité, de fonction de Hilbert-Samuel, et de diagramme des exposants initiaux de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ en un point φ . Dans [L-J], M. Lejeune-Jalabert introduisait de manière algorithmique, pour un germe d'hypersurface (H, x) , la notion de suite des multiplicités de Nash de (H, x) le long d'un arc. Dans notre travail [H1] également consacré aux hypersurfaces, cette notion apparaissait sous un point de vue plus géométrique. Nous généralisons ici ce point de vue, pour définir les notions de suite des multiplicités de Nash, suite de Nash des fonctions de Hilbert-Samuel et suite de Nash des diagrammes des exposants initiaux de (X, x) le long d'un arc φ , pour tout germe (X, x) .

Les définitions sont les suivantes. Considérons un plongement i_0 de (X, x) dans un $(\mathbb{K}^n, 0)$. Ceci induit un plongement de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ dans $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$. On pose :

Géométrie de l'espace des arcs tracés sur un espace analytique

- $(E_0, O_0) = (\mathbb{K}, 0) \times (\mathbb{K}^n, 0) = (\mathbb{K}^{n+1}, 0)$;
- $(Z_0, O_0) = (\mathbb{K}, 0) \times (X, x)$;
- $\Gamma_0 : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (E_0, O_0)$ le graphe de φ .

On considère alors le diagramme commutatif (D_1) suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & \dots & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) \\
 & \downarrow \Gamma_i & & \downarrow \Gamma_{i-1} & & & & \downarrow \Gamma_1 & & \downarrow \Gamma_0 \\
 \xrightarrow{\Pi_{i+1}} & (E_i, O_i) & \xrightarrow{\Pi_i} & (E_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\Pi_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{\Pi_2} & (E_1, O_1) & \xrightarrow{\Pi_1} & (E_0, O_0) \\
 & \uparrow J_i & & \uparrow J_{i-1} & & & & \uparrow J_1 & & \uparrow J_0 \\
 \xrightarrow{\omega_{i+1}} & (Z_i, O_i) & \xrightarrow{\omega_i} & (Z_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\omega_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{\omega_2} & (Z_1, O_1) & \xrightarrow{\omega_1} & (Z_0, O_0)
 \end{array}$$

où pour tout $i \geq 1$:

- Π_i est l'éclatement de E_{i-1} de centre O_{i-1} ;
- Γ_i est le relèvement de Γ_{i-1} à travers Π_i et $O_i = \Gamma_i(0)$;
- Z_i est le transformé strict de Z_{i-1} par Π_i et $\omega_i = \Pi_i|_{Z_i}$, J_i est le plongement induit (avec $J_0 = (id, i_0)$).

Soient pour $i \in \mathbb{N}$:

- $m_{i,\varphi}$ la multiplicité de Z_i au point O_i (bien entendu si $O_i \notin Z_i$, $m_{i,\varphi} = 0$) ;
- $H_{i,\varphi}$ la fonction de Hilbert-Samuel du germe (Z_i, O_i) (bien entendu si $O_i \notin Z_i$, $H_{i,\varphi} = 0$).

Soit maintenant $X = (X_1, \dots, X_n)$ un système de coordonnées à l'origine de \mathbb{K}^n . Écrivons :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cdot t^k, \quad A_k \in \mathbb{K}^n, \quad A_k = (a_k^1, \dots, a_k^n).$$

L'écriture en coordonnées locales des transformations quadratiques, comme on le fait usuellement, fournit une suite d'isomorphismes locaux $\theta_i : (\mathbb{K}, 0) \times (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (E_i, O_i)$ telle que le diagramme (D_2) suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & \cdots & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) \\
 \downarrow \Gamma'_i & & \downarrow \Gamma'_{i-1} & & & & \downarrow \Gamma'_1 & & \downarrow \Gamma'_0 \\
 (\mathbb{K}, O) \times (\mathbb{K}^n, O) & \xrightarrow{\Pi'_i} & (\mathbb{K}, O) \times (\mathbb{K}^n, O) & \xrightarrow{\Pi'_{i-1}} & \cdots & \xrightarrow{\Pi'_2} & (\mathbb{K}, O) \times (\mathbb{K}^n, O) & \xrightarrow{\Pi'_1} & (\mathbb{K}, O) \times (\mathbb{K}^n, O) \\
 \downarrow \theta_i & & \downarrow \theta_{i-1} & & & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \theta_0 = \text{id} \\
 (E_i, O_i) & \xrightarrow{\Pi_i} & (E_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\Pi_{i-1}} & \cdots & \xrightarrow{\Pi_2} & (E_1, O_1) & \xrightarrow{\Pi_1} & (E_0, O_0) \\
 \uparrow J_i & & \uparrow J_{i-1} & & & & \uparrow J_1 & & \uparrow J_0 \\
 (Z_i, O_i) & \xrightarrow{\omega_i} & (Z_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\omega_{i-1}} & \cdots & \xrightarrow{\omega_2} & (Z_1, O_1) & \xrightarrow{\omega_1} & (Z_0, O_0)
 \end{array}$$

Via ces isomorphismes on a :

- $\forall i \geq 1, \Pi'_i(t, X) = (t, t(A_i + X))$ où $X = (X_1, \dots, X_n)$;
- $\Gamma_i = \theta_i \circ \Gamma'_i, \Gamma'_i(t) = (t, \varphi_i(t))$ où $\varphi_i(t) = \sum_{k>i} A_k \cdot t^{k-i} \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$.

On notera de plus par :

- $(Z'_i, 0)$ le germe image de (Z_i, O_i) par $\theta_i^{-1} \circ J_i$;
- $I_{i, A^i} \subset \mathbb{K}\{t, X_1, \dots, X_n\}$ l'idéal définissant $(Z'_i, 0)$, où $A^i = (A_1, \dots, A_i) \in \mathbb{K}^{ni}$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note :

- $N_{i, \varphi} = N(I_{i, A^i}) \subset \mathbb{N}^{n+1}$ le diagramme des exposants initiaux de I_{i, A^i} pour le système de coordonnées (t, X) . (Bien entendu si $O_i \notin Z_i$ i.e. $I_{i, A^i} = \mathbb{K}\{t, X\}$, on pose $N_{i, \varphi} = \mathbb{N}^{n+1}$).

On fait alors la définition suivante :

DÉFINITION 1.5. — Soient (X, x) un germe de \mathbb{K} -espace analytique et un plongement $(X, x) \hookrightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$. Pour $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$, on appelle :

1) Suite des multiplicités de Nash de (X, x) le long de φ la suite :

$$\mathcal{M}_{X, \varphi} = (m_{0, \varphi}, m_{1, \varphi}, \dots, m_{i, \varphi}, \dots)$$

- 2) Suite de Nash des fonctions de Hilbert-Samuel de (X, x) le long de φ la suite :

$$\mathcal{H}_{X,\varphi} = (H_{0,\varphi}, H_{1,\varphi}, \dots, H_{i,\varphi}, \dots)$$

- 3) Suite de Nash des diagrammes des exposants initiaux de (X, x) le long de φ la suite :

$$\mathcal{N}_{X,\varphi} = (N_{0,\varphi}, N_{1,\varphi}, \dots, N_{i,\varphi}, \dots)$$

Pour le fait que le premier point de la définition précédente généralise la notion correspondante pour les hypersurfaces, nous renvoyons le lecteur à [H1] et [G-S-L-J] prop. 4.3 p. 18 et commentaires.

Ces définitions appellent quelques remarques. Tout d'abord pour $\varphi \in \mathcal{A}_{(X,x)}$, les deux premières notions précédentes ne dépendent en rien du plongement. En effet, dans ce cas pour les définir, il suffit de considérer les Γ_i comme des éléments de $\mathcal{A}_{(Z_i, O_i)}$ et de dire que les ω_i sont les éclatements de Z_{i-1} de centre O_{i-1} . D'autre part, pour un i donné, les tronqués jusqu'à l'ordre i , $\mathcal{M}_{X,\varphi^i}^i$, $\mathcal{H}_{X,\varphi^i}^i$, $\mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i$, des suites précédentes ne dépendent, que du tronqué φ^i à l'ordre i de φ . C'est-à-dire du morphisme de \mathbb{K} -algèbre locale $\varphi^{i*} : \mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \mathbb{K}\{t\}/(t)^{i+1}$ obtenu par passage au quotient. Finalement la motivation de la considération de tels diagrammes est la suivante. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$. Écrivons :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^i A_k t^k + t^i \varphi_i(t) \text{ avec } A_k \in \mathbb{K}^n, \varphi_i \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{A}_{(X,x)}$ si et seulement si l'arc $t \rightarrow (t, \varphi_i(t))$ est dans $\mathcal{A}_{(Z'_i, 0)} \simeq \mathcal{A}_{(Z_i, O_i)}$. Aussi nous semble-t-il naturel d'étudier de tels objets, puisqu'ils sont les premières mesures de la singularité des $(Z'_i, 0)$.

Nous donnons deux résultats dans cette direction. Le premier généralise en toute codimension le théorème 5 p. 154 de [L-J].

THÉORÈME 1.6. — Soient $(X, x) \hookrightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ et $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$.

- 1) La suite $\mathcal{M}_{X,\varphi}$ est décroissante et se stabilise à la valeur générique de la multiplicité de X , en un point $\varphi(t)$, $t \neq 0$, assez petit.
- 2) La suite $\mathcal{H}_{X,\varphi}$ est décroissante (i.e. $\forall i, k \in \mathbb{N}$, $H_{i+1,\varphi}(k) \leq H_{i,\varphi}(k)$) et se stabilise à la valeur générique de la fonction de Hilbert-Samuel de Z_0 , en un point $(t, \varphi(t))$, $t \neq 0$, assez petit.

Notons que la fonction de Hilbert-Samuel de Z_0 en un point (t, y) se calcule directement à partir de celle de X en y . Nous essayerons au cours de la preuve de cet énoncé de préciser l'ordre auquel ces suites se stabilisent.

Les propriétés de généralité et de semi-continuité des applications $\varphi \rightarrow \mathcal{M}_{X,\varphi}$, $\varphi \rightarrow \mathcal{H}_{X,\varphi}$, et $\varphi \rightarrow \mathcal{N}_{X,\varphi}$ sont ensuite étudiées.

Pour cela, soit $i \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathcal{A}_{(X,x)}^i$ l'ensemble des morphismes de \mathbb{K} -algèbre locale de $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{K}\{t\}/(t)^{i+1}$, et par $\Pi^i : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(X,x)}^i$ le morphisme induit par la surjection canonique de $\mathbb{K}\{t\} \rightarrow \mathbb{K}\{t\}/(t)^{i+1}$. Tout choix de système de coordonnées sur \mathbb{K}^n induit une identification de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i$ avec \mathbb{K}^{ni} . Ordonnons ensuite, l'ensemble des suites d'entiers (resp. l'ensemble des suites de fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) par l'ordre lexicographique. De même l'ensemble $\mathcal{D}(n+1)$ des parties N de \mathbb{N}^{n+1} satisfaisant $N + \mathbb{N}^{n+1} = N$ étant muni de son ordre total naturel (cf. section 2), on ordonne l'ensemble des suites d'éléments de $\mathcal{D}(n+1)$ par l'ordre lexicographique. On a alors :

THÉORÈME 1.7. — *Soient (X, x) et $i \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi^i \rightarrow \mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i$. C'est-à-dire, pour toute sous-variété algébrique irréductible V de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i$, il existe V' variété algébrique strictement incluse dans V telle que :*

- 1) $\forall \varphi^i, \theta^i \in V - V', \mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i = \mathcal{N}_{X,\theta^i}^i ;$
- 2) $\forall \varphi^i \in V - V', \forall \theta^i \in V', \mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i < \mathcal{N}_{X,\theta^i}^i .$

COROLLAIRE 1.8. — *Soient (X, x) et $i \in \mathbb{N}^*$. Il existe une partition :*

$$\overline{\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})} = \bigcup_{1 \leq j \leq l_i} S_{i,j}$$

où $S_{i,j} = U_{i,j} - W_{i,j}$, $U_{i,j}$ et $W_{i,j}$ sont des sous-variétés algébriques de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i$ et $\mathcal{M}_{X,\varphi^i}^i$, $\mathcal{H}_{X,\varphi^i}^i$, $\mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i$ sont constantes sur $S_{i,j}$. De plus pour $j \neq j'$ les valeurs de $\mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i$ sur $S_{i,j}$ et $S_{i,j'}$ sont distinctes.

Les constructibles $\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})$, dont l'étude fut initiée par J. Nash (cf. [N]), portent donc une stratification naturelle, nous espérons que celle-ci pourra s'avérer utile à une meilleure compréhension de leurs géométries. Comme première illustration de l'utilité de ces stratifications, nous définissons les notions de strates principales et de partie principale d'ordre i de $\mathcal{A}_{(X,x)}$

(c.f. section 5, def. 5.1). Nous montrons comme conséquence élémentaire du théorème de semi-continuité comment le volume motivique de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ (c.f. [D-L1]) se réalise comme « limite » des parties principales (c.f. th. 5.2). Nous traitons par cette technique quelques exemples.

Notre exposé est organisé comme suit. La section 2 rappelle quelques résultats et techniques que nous utiliserons par la suite. Ceux-ci sont issus de [B-M1], [B-M2], [T1], [T2]. Nous rappelons aussi quelques notations et définitions concernant la théorie de l'intégration motivique. Le paragraphe 3 prouve le Théorème 1.3. Notre schéma de preuve suit d'assez près celui de J.C. Tougeron dans le cas classique [T3]. La démonstration du Théorème 1.4 nécessitant quelques éléments sur la suite des multiplicités de Nash, les résultats et preuves concernant ces notions sont d'abord donnés dans la section 4. Les techniques de base proviennent du travail de E. Bierstone et P.D. Milman [B-M1]. La section 5 présente les notions de « strates principales et de partie principale d'ordre i » de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ et leur rapport avec le volume motivique tel que défini dans [D-L1]. Quelques exemples viennent illustrer cette technique. Le théorème 1.4 est démontré au paragraphe 6. L'existence de désingularisation peut servir ici de substitut aux éléments provenant de la section 4. On perd alors en élémentarité mais aussi beaucoup d'informations concernant le diamètre des ouverts dont il est question dans l'énoncé 1.4.

2. Rappels et notations

Nous ferons un usage répété du résultat suivant. Nous l'appellerons par commodité théorème des fonctions implicites de Tougeron (cf. [T2]).

THÉORÈME 2.1 (J.C. TOUGERON). — *Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$, $f = (f_1, \dots, f_q) \in \mathbb{K}\{x, y\}^q$ telle que $f(0, 0) = 0$. Soit I l'idéal engendré dans $\mathbb{K}\{x\}$ par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne $f'_y(x, 0) = ((\partial f_i / \partial y_j)(x, 0))$, et soit I' un idéal propre de $\mathbb{K}\{x\}$. Si $f(x, 0) \in \bigoplus_q I^2 \cdot I'$, il existe $y(x) \in \bigoplus_p I \cdot I'$ tel que $f(x, y(x)) = 0$.*

Le résultat est aussi valable en formel et en C^∞ .

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on notera : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. \mathbb{N}^n est totalement ordonné par l'ordre lexicographique sur les $n + 1$ upplets $(|\alpha|, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si A est un anneau commutatif unitaire intègre, et f un élément non nul de $A[[X]] = A[[X_1, \dots, X_n]]$, nous noterons par $\nu(f)$ son exposant initial. C'est-à-dire si :

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \cdot X^\alpha, \quad \nu(f) = \text{Min}\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\}.$$

Pour un idéal, $I \subset A[[X]]$, on notera N_I le diagramme des exposants initiaux de I , i.e. :

$$N_I = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \exists g \in I \text{ tel que } \nu(g) = \alpha\}.$$

On a : $N_I + \mathbb{N}^n = N_I$. Si $N \subset \mathbb{N}^n$ satisfait $N + \mathbb{N}^n = N$, le lemme de Dickson assure l'existence d'une partie finie unique de \mathbb{N}^n , $\{\alpha^1, \dots, \alpha^p\}$, telle que :

$$N = \cup_{1 \leq i \leq p} (\alpha^i + \mathbb{N}^n) \text{ et } \alpha^j \notin \cup_{i \neq j} (\alpha^i + \mathbb{N}^n)$$

Les α^i sont dits les sommets de N . L'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des parties de \mathbb{N}^n stables par translations (i.e. satisfaisant $N + \mathbb{N}^n = N$) est totalement ordonné comme suit. Soit $N_1, N_2 \in \mathcal{D}(n)$. Pour chaque $i = 1, 2$, soient $\beta_i^k, k = 1, \dots, t_i$ les sommets de N_i indexés dans l'ordre croissant. Après avoir éventuellement permuté N_1 et N_2 , il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta_1^k = \beta_2^k$, $1 \leq k \leq t$ et (1) $t_1 = t = t_2$, (2) $t_1 > t = t_2$ ou bien (3) $t_1, t_2 > t$ et $\beta_{t+1}^1 < \beta_{t+1}^2$. Dans le cas (1), $N_1 = N_2$. Dans les cas (2) et (3), $N_1 < N_2$. Il revient au même de dire que la suite $(\beta_1^1, \dots, \beta_1^{t_1}, \infty, \dots)$ est strictement plus petite que la suite $(\beta_2^1, \dots, \beta_2^{t_2}, \infty, \dots)$ pour l'ordre lexicographique, avec la convention $\beta < \infty$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$.

Si N est un élément de $\mathcal{D}(n)$, on notera H_N la fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par :

$$H_N(k) = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \alpha \notin N \text{ et } |\alpha| \leq k\}.$$

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[[X]]$ et g_1, \dots, g_p des éléments de I tels que $\nu(g_1), \dots, \nu(g_p)$ sont les sommets de $N(I)$. Nous disons que g_1, \dots, g_p est une base standard de I . Il existe par ailleurs une unique famille g_1, \dots, g_p telle que :

$$\text{InMon}(g_i) = X^{\beta^i}$$

$$\text{Supp}(X^{\beta^i} - g_i) \subset \mathbb{N}^n - N(I), \quad \forall 1 \leq i \leq p,$$

où β^1, \dots, β^p sont les sommets de $N(I)$, Supp désigne le support d'un élément de $\mathbb{K}[[X]]$, $\text{InMon}(f) = a_{\nu(f)} X^{\nu(f)}$. Une telle famille est appelée la base standard distinguée de I . Si :

$$H_I(k) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X]]}{I + \mathcal{M}^{k+1}}$$

désigne la fonction de Hilbert-Samuel de I , on a :

$$H_I(k) = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^n - N(I) \mid |\alpha| \leq k\} = H_{N(I)}(k).$$

Pour plus d'informations, nous renvoyons le lecteur à [B-M2]. Nous ferons par ailleurs un usage libre de la notion de transformé strict d'un idéal de

$\mathbb{K}[[X]]$. Rappelons simplement que si g_1, \dots, g_p est une base standard de I , alors leurs transformées strictes g'_1, \dots, g'_p , par l'éclatement de centre l'origine engendrent le transformé strict I' de I .

Dans le texte de l'article, nous considérons des anneaux de la forme $A[[t, X]]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$. Lorsque nous parlons de diagramme des exposants initiaux $\subset \mathbb{N}^{n+1}$ d'un idéal I de $A[[t, X]]$, nous considérons toujours des multi-indices $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où le premier indice α_0 correspond toujours à la variable t .

Si X est un espace analytique et $\varphi \in \mathcal{A}_X$, nous noterons par $\mathcal{B}_{X,i}(\varphi)$ la boule :

$$\mathcal{B}_{X,i}(\varphi) = \{\varphi' \in \mathcal{A}_X / \mathcal{D}_X(\varphi, \varphi') < e^{-i}\} = \{\varphi' \in \mathcal{A}_X / \text{ord}(\varphi - \varphi') > i\}.$$

Lorsque le contexte le permettra, nous omettrons l'indice X .

Rappelons que l'on désigne par $K_0(\mathcal{V}_{\mathbb{K}})$ l'anneau de Grothendieck des \mathbb{K} -variétés (i.e. les schémas réduits séparés de type fini sur \mathbb{K}). Par définition $K_0(\mathcal{V}_{\mathbb{K}})$ est l'anneau engendré par les symboles $[V]$, pour une \mathbb{K} -variété V , modulo les relations :

- $[V] = [V']$, si V et V' sont \mathbb{K} -isomorphes
- $[V] = [V'] + [V - V']$, si V' est fermé dans $[V]$
- $[V] \times [V'] = [V \times_{\mathbb{K}} V']$.

La classe de la droite affine $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$ sera notée \mathbb{L} . Suivant les notations de Looijenga [Lo], $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ désignera l'anneau $K_0(\mathcal{V}_{\mathbb{K}})[\mathbb{L}^{-1}]$ (ce qui correspond à la notation \mathcal{M}_{loc} de [D-L1]). Pour $m \in \mathbb{Z}$, on note $F^m \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ le sous-groupe engendré par les symboles $[S]\mathbb{L}^i$ où $i - \dim S \geq m$. On notera $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$ le complété de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ par rapport à cette filtration et $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$ l'image de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ par l'application naturelle de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$. Concernant les mesures motiviques de [D-L1], nous adoptons la convention de [Lo], i.e. les mesures de Denef-Loeser sont multipliées par \mathbb{L}^d , d désignant la dimension de la variété ou du germe que l'on considère.

3. Inégalités de Lojasiewicz fibrées au niveau de l'espace des arcs

Nous commençons d'abord par constater qu'il suffit d'obtenir le Théorème 1.3, lorsque X et Y sont respectivement des ouverts Ω_n et Ω_p de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^p .

En effet, étant donné un point $(x, y) \in X \times Y$, il suffit d'établir l'existence de voisinages V_x et V_y et d'un $\alpha \geq 0$ tels que la propriété de 1.3 soit valide pour tout $(\phi_0, \varphi) \in \mathcal{A}_{X, V_x} \times \mathcal{A}_{Y, V_y}$. On peut par conséquent supposer que

X et Y sont des modèles locaux, X défini par f_1, \dots, f_k , analytiques sur un ouvert Ω_n , et que le morphisme F est induit par des fonctions analytiques F_1, \dots, F_p sur Ω_n . Considérons alors le morphisme G :

$$G : \Omega_n \rightarrow \Omega_p \times \mathbb{K}^k$$

$$x \rightarrow (F_1(x), \dots, F_p(x), f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Si le Théorème 1.3 est valide pour le morphisme \mathcal{G} , il l'est pour \mathcal{F} . En effet, si $\varphi \in \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_{\Omega_p}$, considérons l'arc $\theta = (\varphi, 0) \in \mathcal{A}_{\Omega_p \times \mathbb{K}^k}$. On a pour tout $\phi \in \mathcal{A}_X \subset \mathcal{A}_{\Omega_n}$:

$$\mathcal{D}_Y(\mathcal{F}(\phi), \varphi) = \mathcal{D}_{\Omega_p \times \mathbb{K}^k}(\mathcal{G}(\phi), \theta)$$

$$\mathcal{D}_X(\phi, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = \mathcal{D}_{\Omega_n}(\phi, \mathcal{G}^{-1}(\theta)).$$

Nous établissons maintenant 1.3 dans la situation citée plus haut. Notre schéma de démonstration suit, tout en l'adaptant à notre cas, celui de J.C. Tougeron [T3]. Pour cela désignons par \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions \mathbb{K} -analytiques sur $\Omega_n \times \Omega_p$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ un sous-faisceau cohérent d'idéaux. Nous utiliserons les notations suivantes :

- $V(\mathcal{I})$ l'espace analytique de zéros de \mathcal{I} , i.e. $V(\mathcal{I}) = (|X|, (\mathcal{O}/\mathcal{I})||X|)$ où $|X| = \text{Support}(\mathcal{O}/\mathcal{I})$;
- $\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}_{V(\mathcal{I})}$;
- Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{\Omega_p}$, $\mathcal{V}(\varphi^*\mathcal{I}) = \{\phi \in \mathcal{A}_{\Omega_n} \mid (\phi, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})\}$;
- Si $(x_0, y_0) \in \Omega_n \times \Omega_p$, on désignera par $\mathcal{I}_{(x_0, y_0)}$ la fibre de \mathcal{I} en (x_0, y_0) et par $f_1(x, y), \dots, f_{k_0}(x, y)$ un système de générateurs de $\mathcal{I}_{(x_0, y_0)}$;
- Si $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in \mathcal{O}_1^s$, on pose : $|\theta| = |\theta_1| + \dots + |\theta_s|$, où $|\theta_j| = e^{-\text{ord}(\theta_j)}$.

Le Théorème 1.3 découle alors du résultat suivant, appliqué au sous-faisceau de \mathcal{O} engendré par $F_1(x) - y_1, \dots, F_p(x) - y_p$, où F_1, \dots, F_p sont les composantes du morphisme $F : \Omega_n \rightarrow \Omega_p$.

THÉORÈME 3.1. — *Soient $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$ et K, K' deux compacts comme précédemment. Il existe alors $\alpha \geq 0$ tel que :*

$\forall \varphi \in \mathcal{A}_{(\Omega_p, K')}, \forall \phi_0 \in \mathcal{A}_{(\Omega_n, K)}, \exists C_{(\phi_0, \varphi)} > 0$ et un voisinage \mathcal{V}_{ϕ_0} de ϕ_0 satisfaisant :

$$\forall \phi \in \mathcal{V}_{\phi_0}, \sum_{i=1}^{k_0} |f_i(\phi, \varphi)| \geq C_{(\phi_0, \varphi)} \mathcal{D}(\phi, \mathcal{V}(\varphi^*\mathcal{I}))^\alpha$$

où $f_1(x, y), \dots, f_{k_0}(x, y)$ engendrent $\mathcal{I}_{(\phi_0(0), \varphi(0))}$.

Preuve. — Pour prouver le résultat, il suffit de voir que pour un point $(x_0, y_0) \in \Omega_n \times \Omega_p$, il existe des voisinages V_{x_0}, W_{y_0} de x_0 et y_0 , et un $\alpha \geq 0$ tels que la propriété de 3.1 soit satisfaite pour $(\phi_0, \varphi) \in \mathcal{A}_{V_{x_0}} \times \mathcal{A}_{W_{y_0}}$. Si $(x_0, y_0) \notin V(\mathcal{I})$, ceci est trivialement satisfait avec $\alpha = 0$. Nous supposons donc $(x_0, y_0) = (0, 0) \in V(\mathcal{I})$. Pour prouver l'assertion précédente, il suffit de voir que :

(3.2) il existe un voisinage V_0 de 0 dans \mathbb{K}^p et un $\alpha \geq 0$ satisfaisant : $\forall \varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$ tel que $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$, $\exists C_\varphi > 0$ et un voisinage \mathcal{V}_0 de 0 dans $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ tel que :

$$\forall \phi \in \mathcal{V}_0, \sum_{i=1}^{k_0} |f_i(\phi, \varphi)| \geq C_\varphi \mathcal{D}(\phi, \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I}))^\alpha.$$

En effet supposons (3.2) prouvée pour tout faisceau cohérent d'idéaux. Partant d'un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} engendré par $f_1(x, y), \dots, f_{k_0}(x, y)$ sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$, on considère le faisceau d'idéaux \mathcal{J} engendré sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{n+p}$ par :

$$G_1(x, z, y) = f_1(x + z, y), \dots, G_{k_0}(x, z, y) = f_{k_0}(x + z, y).$$

L'application de (3.2) à \mathcal{J} fournit un voisinage $U_0 = V_0 \times W_0$ de 0 dans $\mathbb{K}^{n+p} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$ et un $\alpha \geq 0$ satisfaisant :

$$(3.3) \quad \forall (\phi_0, \varphi) \in \mathcal{A}_{U_0} = \mathcal{A}_{V_0} \times \mathcal{A}_{W_0} \text{ tel que } (0, \phi_0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J}),$$

$\exists C_{(\phi_0, \varphi)}$ et un voisinage \mathcal{V}_0 de 0 dans $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathcal{V}_0, \sum_{i=1}^{k_0} |G_i(\theta, \phi_0, \varphi)| \geq C_{\phi_0, \varphi} \mathcal{D}(\theta, \mathcal{V}((\phi_0, \varphi)^* \mathcal{J}))^\alpha.$$

Soient alors $\varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$ et $\phi_0 \in \mathcal{A}_{W_0}$. Si $(\phi_0, \varphi) \notin \mathcal{V}(\mathcal{I})$, posons :

$$s = \text{Min}(\text{ord} f_i(\phi_0, \varphi)) \quad C_{(\phi_0, \varphi)} = e^{-s} \text{ et } \mathcal{V}_{\phi_0} = \mathcal{B}(\phi_0, e^{-s}).$$

On a alors :

$$\forall \phi \in \mathcal{V}_{\phi_0}, \sum_{j=1}^{k_0} |f_j(\phi, \varphi)| \geq C_{(\phi_0, \varphi)} \geq C_{(\phi_0, \varphi)} \mathcal{D}(\phi, \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I}))^\alpha.$$

Si maintenant $(\phi_0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$, alors $(0, \phi_0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J})$. D'où l'existence d'un voisinage \mathcal{V}_0 de 0 dans $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ et d'une constante $C_{(\phi_0, \varphi)}$ comme dans (3.3).

Posons : $\mathcal{V}_{\phi_0} = \phi_0 + \mathcal{V}_0$. Puisque :

$$\sum_{i=1}^{k_0} |f_i(\phi, \varphi)| = \sum_{i=1}^{k_0} |G_i(\phi - \phi_0, \phi_0, \varphi)|;$$

$$\mathcal{D}(\phi, \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I})) = \mathcal{D}(\phi - \phi_0, \mathcal{V}((\phi_0, \varphi)^* \mathcal{J})).$$

On a :

$$\forall \phi \in \mathcal{V}_{\phi_0}, \sum_{i=1}^{k_0} |f_i(\phi, \varphi)| \geq C_{(\phi_0, \varphi)} \mathcal{D}(\phi, \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I}))^\alpha.$$

Ce qui est l'assertion désirée. Pour prouver (3.2) nous laissons le soin au lecteur de vérifier que celle-ci est équivalente à :

(3.4) $\exists V_0$ voisinage de 0 dans \mathbb{K}^p et un $\alpha \geq 0$ satisfaisant : $\forall \varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$ tel que $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$, il existe $a_\varphi, k_\varphi \in \mathbb{N}$ tels que l'implication suivante soit vérifiée :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}, (\text{ord}(\phi) > k_\varphi \text{ et } \text{Min}_{1 \leq j \leq k_0} \text{ord}(f_j(\phi, \varphi)) > a_\varphi + \alpha i)$$

$$\implies (\exists \phi' \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}, \phi' \in \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I}) \text{ et } \text{ord}(\phi - \phi') > i).$$

Nous allons à présent prouver (3.4) par récurrence descendante sur la hauteur de $\mathcal{I}_{(0,0)}$.

Si $\text{haut}(\mathcal{I}_{(0,0)}) = n + p$, quitte à nous restreindre à un voisinage assez petit de $(0, 0)$ dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$, on a $V(\mathcal{I}) = (0, 0)$ et $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)^m \subset \mathcal{I}_{(0,0)}$. Par suite (3.4) est satisfaite avec $\alpha = m$, $a_0 = k_0 = 0$.

Soit maintenant \mathcal{I} tel que $\text{haut}(\mathcal{I}_{(0,0)}) = r < n + p$. Il existe un entier m et $\mathcal{P}^1, \dots, \mathcal{P}^s$, des sous-faisceaux cohérents d'idéaux de \mathcal{O} dans un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\forall j, 1 \leq j \leq s, \mathcal{P}_{(0,0)}^j \text{ est premier de hauteur } \geq r;$$

$$\exists m \in \mathbb{N} | \left(\bigcap_{1 \leq j \leq s} \mathcal{P}^j \right)^m \subset \mathcal{I} \subset \bigcap_{1 \leq j \leq s} \mathcal{P}^j.$$

Supposons que pour tout $j, 1 \leq j \leq s$, (3.4) soit satisfaite pour \mathcal{P}^j avec une constante $\alpha_j \geq 0$. Il est alors aisé de vérifier que (3.4) est satisfaite pour \mathcal{I} avec $\alpha = m(\sum_{j=1}^s \alpha_j)$. En effet, soit $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$. Désignons par Δ_φ l'ensemble (nécessairement non vide) :

$$\Delta_\varphi = \{j \in \{1, \dots, s\} | (0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^j)\}.$$

Considérons aussi $\overline{\Delta}_\varphi = \{1, \dots, s\} - \Delta_\varphi$. On note alors :

- $a_\varphi^j = \text{ord}((0, \varphi)^* \mathcal{P}^j)$, si $j \in \overline{\Delta}_\varphi$;
- k_φ^j, a_φ^j les entiers associés à \mathcal{P}^j par (3.4), si $j \in \Delta_\varphi$.

Soient alors : $k_\varphi = \text{Max}(\text{Max}_{j \in \overline{\Delta}_\varphi} a_\varphi^j, \text{Max}_{j \in \Delta_\varphi} k_\varphi^j)$ et $a_\varphi = m(\sum_{j=1}^s a_\varphi^j)$. Si ϕ est tel que $\text{ord}(\phi) > k_\varphi$ et $\text{Min}_{1 \leq i \leq k_0} \text{ord}(f_i(\phi, \varphi)) > a_\varphi + \alpha i$, il existe $j \in \Delta_\varphi$ tel que $\text{ord}((\phi, \varphi)^* \mathcal{P}^j) > a_\varphi^j + \alpha_j i$. D'où l'assertion désirée pour \mathcal{I} .

Par suite, nous supposons que \mathcal{I} est tel que $\mathcal{I}_{(0,0)}$ est premier de hauteur $r < n + p$. Soit maintenant J l'idéal des éléments de $\mathbb{K}\{y_1, \dots, y_p\}$ nuls sur le germe en $(0, 0)$ de $V(\mathcal{I}) \cap (0 \times \mathbb{K}^p)$. On peut supposer $J \subset \mathcal{I}_{(0,0)}$. En effet, si ce n'était pas le cas, considérons $h \in J$, $h \notin \mathcal{I}_{(0,0)}$. Soit alors \mathcal{J} le sous-faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O} engendré sur un voisinage de $(0, 0)$ par h et $\mathcal{I}_{(0,0)}$. On a alors $\text{haut}(\mathcal{J}_{(0,0)}) > r$.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe un voisinage V_0 de 0 dans \mathbb{K}^p tel que (3.4) soit vérifiée pour \mathcal{J} . On peut toujours supposer que h est nul sur $V(\mathcal{I}) \cap (0 \times V_0)$. Mais alors pour $\varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$:

- $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I}) \iff (0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J})$;
- $\mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{I}) = \mathcal{V}(\varphi^* \mathcal{J})$, pour φ tel que $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$;
- $\forall \phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$ tel que $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$,

$$\text{Min}_{1 \leq j \leq k_0} (\text{ord}(f_j(\phi, \varphi))) = \text{Min}(\text{ord}(h(\varphi)), \text{ord}(f_j(\phi, \varphi)), 1 \leq j \leq k_0).$$

Il en résulte que (3.4) est aussi vérifiée pour \mathcal{I} avec le même $\alpha \geq 0$ et le même V_0 . Nous supposons donc que $J \subset \mathcal{I}_{(0,0)}$ et que cette inclusion est stricte (sans quoi (3.4) est triviale). On a alors le lemme suivant :

LEMME 3.2 ([T3], LEMME 2.4). — *Supposons $J \subsetneq \mathcal{I}_{(0,0)}$. Soit $r - l$ la hauteur de l'idéal premier J . Après une éventuelle permutation sur les coordonnées x_1, \dots, x_n , il existe $u_1(x, y), \dots, u_l(x, y) \in \mathcal{I}_{(0,0)}$ tels que :*

$$u(x, y) = \det\left(\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x_j}\right)_{1 \leq k, j \leq l} \notin \mathcal{I}_{(0,0)}.$$

Puisque $\text{haut}(J) = r - l$ et J est premier, il existe $u_{l+1}(y), \dots, u_r(y) \in J$ tels qu'après une éventuelle permutation sur les coordonnées y_1, \dots, y_p :

$$v(y) = \det\left(\frac{\partial u_{l+k}(y)}{\partial y_j}\right)_{1 \leq k, j \leq r-l} \notin J.$$

Par suite :

$$v(y)u(x, y) = \det\left(\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial z_j}\right)_{1 \leq k, j \leq r} \notin \mathcal{I}_{(0,0)},$$

où $z_j = x_j, 1 \leq j \leq l$ et $z_j = y_{j-l}, l+1 \leq j \leq r$. Par le critère jacobien des points simples, le localisé $(\mathcal{O}_{(0,0)})_{\mathcal{I}_{(0,0)}}$ est régulier de dimension r et son maximal est engendré par u_1, \dots, u_r . Par conséquent, il existe $w(x, y) \in \mathcal{O}_{(0,0)} \setminus \mathcal{I}_{(0,0)}$ tel que : $w \cdot \mathcal{I}_{(0,0)} \subset (u_1, \dots, u_r) \mathcal{O}_{(0,0)}$.

Soit $\Delta = u(x, y)v(y)w(x, y)$. Considérons maintenant \mathcal{J} le sous-faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O} engendré par \mathcal{I} et Δ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$, suffisamment petit pour que :

$$\Delta \cdot \mathcal{I} \subset (u_1, \dots, u_r) \cdot \mathcal{O}.$$

Puisque $\text{haut}(\mathcal{J}_{(0,0)}) \geq r+1$, l'hypothèse de récurrence nous assure l'existence d'un voisinage V_0 de 0 dans \mathbb{K}^p et d'un $\alpha \geq 0$ tel que (3.4) soit satisfaite pour \mathcal{J} . Nous allons montrer que (3.4) est valide pour \mathcal{I} avec le même voisinage V_0 et avec $\beta = \text{Max}(2\alpha, 1)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{V_0}$ tel que $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$. Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : $(0, \varphi) \notin \mathcal{V}(\mathcal{J})$.

Soit alors $k_\varphi = \text{ord}(\Delta(0, \varphi)) < +\infty$. Posons $a_\varphi = 2k_\varphi$. Considérons alors, $\phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ tel que $\text{ord}(\phi) > k_\varphi$ et $\text{Min}_{1 \leq j \leq k_0} \text{ord}(f_j(\phi, \varphi)) > a_\varphi + i$. On a :

- $\text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)) = \text{ord}(\Delta(0, \varphi)) = k_\varphi$, en particulier $\text{ord}(u(\phi, \varphi)) \leq k_\varphi$;
- $\text{Min}_{1 \leq j \leq r} \text{ord}(u_j(\phi, \varphi)) \geq \text{Min}_{1 \leq j \leq k_0} (\text{ord}(f_j(\phi, \varphi)) > 2k_\varphi + i$.

Considérons alors les l éléments $U_1(t, z_1, \dots, z_l), \dots, U_l(t, z_1, \dots, z_l)$ de $\mathbb{K}\{t, z_1, \dots, z_l\}$ suivants :

$$U_j(t, z_1, \dots, z_l) = u_j(\phi_1(t) + z_1, \dots, \phi_l(t) + z_l, \phi_{l+1}(t), \dots, \phi_n(t), \varphi(t)), 1 \leq j \leq l.$$

$$U_j(0, 0) = 0, 1 \leq j \leq l.$$

Alors :

$$\det\left(\frac{\partial U_k}{\partial z_j}(t, 0)\right)_{1 \leq k, j \leq l} = u(\phi(t), \varphi(t)).$$

Par suite :

$$U_j(t, 0) = u_j(\phi(t), \varphi(t)) \in \left(\det\left(\frac{\partial U_k}{\partial z_j}(t, 0)\right)^2 \cdot t^{i+1+2(k_\varphi - \text{valu}(\phi, \varphi))}\right).$$

Par conséquent le théorème des fonctions implicites de Tougeron donne l'existence de $\theta_1, \dots, \theta_l \in \mathbb{K}\{t\}$ tels que :

$$\begin{aligned} \theta_j(t) \in \det\left(\frac{\partial U_k}{\partial z_j}(t, 0)\right) \cdot (t)^{i+1+2(k_\varphi - \text{valu}(\phi, \varphi))} &\subset (t)^{i+1+k_\varphi+k_\varphi - \text{valu}(\phi, \varphi)} \\ &\subset (t)^{i+1+k_\varphi} \end{aligned}$$

$$U_j(t, \theta_1(t), \dots, \theta_l(t)) = 0, 1 \leq j \leq l.$$

Posons alors $\phi' = (\phi_1 + \theta_1, \dots, \phi_l + \theta_l, \phi_{l+1}, \dots, \phi_n)$.

On a :

$$\text{ord}(\phi' - \phi) > i + k_\varphi$$

$$u_j(\phi', \varphi) = 0, \quad 1 \leq j \leq r \quad (\text{pour } l+1 \leq j \leq r, u_j(\phi', \varphi) = u_j(\varphi) = 0).$$

Il en découle que $\text{ord}(\Delta(\phi', \varphi)) = \text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)) = k_\varphi$, donc en particulier $\Delta(\phi', \varphi) \neq 0$.

Mais sur $V_0 \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$, on a $\Delta \cdot \mathcal{I} \subset (u_1, \dots, u_r) \cdot \mathcal{O}$. Donc $(\phi', \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{I})$ et $\text{ord}(\phi' - \phi) > i$, ce que nous désirions.

2^{ieme} cas : $(0, \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J})$.

Il existe alors $k_\varphi, a_\varphi \in \mathbb{N}$ tels que $\forall \phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$, on ait :

$$\begin{aligned} (\text{ord}(\phi) > k_\varphi \text{ et } \text{Min}(\text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)), \text{Min}_{1 \leq j \leq k_0} \text{ord}(f_j(\phi, \varphi))) > a_\varphi + \alpha i) \\ \implies (\exists \phi' \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)} | \text{ord}(\phi' - \phi) > i \text{ et } (\phi', \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J})) \end{aligned}$$

Soit alors $\phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ tel que : $\text{ord}(\phi) > k_\varphi$ et $\text{Min}_{1 \leq j \leq k_0}(\text{ord}(f_j(\phi, \varphi))) > 2a_\varphi + 2\alpha i$.

Si $\text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)) > a_\varphi + \alpha i$, il existe $\phi' \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ avec $\text{ord}(\phi' - \phi) > i$ et $(\phi', \varphi) \in \mathcal{V}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{V}(\mathcal{I})$. Nous avons alors fini. On peut donc supposer que :

$$\text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)) \leq a_\varphi + \alpha i.$$

Donc en particulier : $\text{ord}(u(\phi, \varphi)) \leq a_\varphi + \alpha i$.

On procède alors comme dans le premier cas, en considérant le système d'équations implicites :

$$U_j(t, z) = u_j(\phi_1(t)+z_1, \dots, \phi_l(t)+z_l, \phi_{l+1}(t), \dots, \phi_n(t), \varphi(t)) = 0, \quad 1 \leq j \leq l.$$

On a :

$$U_j(t, 0) \in (\det(\frac{\partial U_k}{\partial z_j}(t, 0))^2 \cdot t^{2(a_\varphi + \alpha i - \text{ord}(u(\phi, \varphi)) + 1)}).$$

D'où l'existence de $\theta_1, \dots, \theta_l \in \mathbb{K}\{t\}$ tels que :

$$\text{ord}(\theta_s) \geq a_\varphi + \alpha i + 1 + (a_\varphi + \alpha i - \text{ord}(u(\phi, \varphi))) \geq a_\varphi + \alpha i + 1, \quad , 1 \leq s \leq l,$$

et $U_s(t, \theta_1(t), \dots, \theta_l(t)) = 0, 1 \leq s \leq l.$

Posons $\phi' = (\phi_1 + \theta_1, \dots, \phi_l + \theta_l, \phi_{l+1}, \dots, \phi_n)$. On a : $\text{ord}(\Delta(\phi', \varphi)) = \text{ord}(\Delta(\phi, \varphi)) \leq a_\varphi + \alpha i$. On conclut alors comme dans le premier cas. \square

4. Suite des multiplicités de Nash d'un espace analytique le long d'un arc

Les notions de suite des multiplicités de Nash (Resp. suite de Nash des fonctions de Hilbert-Samuel et suite de Nash des diagrammes des exposants initiaux) d'un espace analytique le long d'un arc ont été introduites dans la Définition 1.5. Pour les notations employées, nous prions le lecteur de se reporter à l'introduction.

Le Théorème 1.6 découle directement du résultat suivant. Celui-ci ne surprendra pas les « désingularisateurs ». On en trouve trace au moins dans le cas complexe, sous une forme un peu différente, dans [L-J-T] th. 2.13 p.242. Nous donnons ici une preuve valable en réel et complexe, qui procède par réduction au cas hypersurface. Cette preuve est nous semble-t-il plus effective que celle de [L-J-T].

Pour énoncer ce résultat, considérons un germe d'espace analytique $(X, x) \hookrightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$, et $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ un arc non trivial. Nous notons par $(C, 0)$ le germe de courbe image de $(\mathbb{K}, 0)$ par φ . Soit $H_{X, C}$ la valeur générique de la fonction de Hilbert-Samuel de X le long de la courbe C . C'est donc la valeur commune des $H_{X, \varphi(t)}$ pour $t \neq 0$ assez petit.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & \dots & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) & \xrightarrow{\text{id}} & (\mathbb{K}, O) \\
 & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i-1} & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\
 \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & (B_i, O_i) & \xrightarrow{\alpha_i} & (B_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_2} & (B_1, O_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & (B_0, O_0) \\
 & \uparrow k_i & & \uparrow k_{i-1} & & & & \uparrow k_1 & & \uparrow k_0 \\
 \xrightarrow{\rho_{i+1}} & (X_i, O_i) & \xrightarrow{\rho_i} & (X_{i-1}, O_{i-1}) & \xrightarrow{\rho_{i-1}} & \dots & \xrightarrow{\rho_2} & (X_1, O_1) & \xrightarrow{\rho_1} & (X_0, O_0)
 \end{array}$$

où :

- $(B_0, O_0) = (\mathbb{K}^n, 0)$ et $(X_0, O_0) = (X, x)$;
- α_i est l'éclatement de B_{i-1} de centre O_{i-1} ;
- φ_i relève φ_{i-1} à travers α_i , $O_i = \varphi_i(0)$;
- X_i est le transformé strict de X_{i-1} par α_i , $\rho_i = \alpha_i/X_i$ et les k_i sont les plongements induits.

THÉORÈME 4.1. — Soit $H_i = H_{X_i, O_i}$ la fonction de Hilbert-Samuel du germe (X_i, O_i) . La suite H_i est décroissante et il existe i_0 tel que $H_i = H_{X, C}, \forall i \geq i_0$. En particulier la suite des multiplicités m_i successives est décroissante et se stabilise à la multiplicité générique de X le long de C . Par suite, pour $\varphi \in \mathcal{R}_{(X, 0)}$, les germes (X_i, O_i) sont lisses pour $i \geq i_0$.

Avant de prouver 4.1, notons que celui-ci entraîne 1.6. En effet, partant d'un germe (X, x) et d'un arc $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$, on applique 4.1 à $Z_0 = (\mathbb{K}, 0) \times (X, x)$ et à l'arc Γ_0 . Ceci fournit le point 2) de 1.6. Pour le point 1), il suffit de remarquer que la multiplicité de X en y est la même que celle de Z_0 en (t, y) .

Preuve de 4.1. — Démontrons d'abord le cas où (X, x) est un germe d'hypersurface à l'origine de \mathbb{K}^n . Dans ce cas, la fonction d'Hilbert-Samuel est entièrement déterminée par la multiplicité. Il s'agit donc de voir que la suite des multiplicités successives m_i des (X_i, O_i) tend vers m'_0 , où m'_0 est la multiplicité générique de X le long de $(C, 0)$. Soit m'_i la multiplicité générique de (X_i, O_i) le long de (C_i, O_i) , où $(C_i, O_i) = \text{Im} \varphi_i$. On a :

- i) $m'_i \leq m_i$ par semi-continuité supérieure de la multiplicité.
- ii) $m'_i = m'_0$ car α_i est un isomorphisme de $B_i - \alpha_i^{-1}(O_{i-1}) \rightarrow B_i - \{O_{i-1}\}$.

Donc $m'_0 \leq m_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

D'autre part, soit $f \in \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathcal{O}_n$, un germe d'équation pour notre hypersurface.

$$f(x+y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} y^\alpha.$$

Considérons, pour $k \in \mathbb{N}$, J_k l'idéal de \mathcal{O}_n engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha}$ avec $|\alpha| \leq k$. Alors :

$$m'_0 = \text{Min}\{k \in \mathbb{N} / \varphi^* J_k \neq 0\}.$$

Posons $D = \text{ord} \varphi^*(J_{m'_0}) < +\infty$. On a alors : $\forall i \geq D, m_i = m'_0$.

En effet, si cela n'était pas le cas, on aurait, compte-tenu de la décroissance de la suite des multiplicités (cas particulier du théorème de Bennett [B]) :

$$(*) \quad m_i > m'_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq D.$$

Ceci est absurde, comme il va résulter du lemme suivant :

LEMME 4.2. — Soit $i \in \mathbb{N}$, notons $f_i \in \mathcal{O}_n$, la i -ème transformée stricte de f , et pour $k \in \mathbb{N}$, considérons $J_{i,k}$ l'idéal de \mathcal{O}_n engendré par les $\frac{\partial^{|\alpha|} f_i(x)}{\partial x^\alpha}$ avec $|\alpha| \leq k$. Alors si $k < m_i$, on a :

$$\text{ord} (\varphi_i^* J_{i,k}) \geq 1 + \text{ord} (\varphi_{i+1}^* J_{i+1,k}).$$

Appliquant successivement ceci, pour i variant de 0 à D , avec $k = m'_0$, on aurait alors par (*) :

$$\text{ord} (\varphi^* J_{m'_0}) \geq (D+1) + \text{ord} (\varphi_{D+1}^* J_{D+1, m'_0}).$$

Ce qui est absurde car $\text{ord} (\varphi^* J_{m'_0}) = D$. Il nous reste donc à prouver (4.2).

Preuve de 4.2. — On peut trouver un système de coordonnées et un isomorphisme local :

$$u_{i+1} : (B_{i+1}, O_{i+1}) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$$

tel que le germe d'éclatement

$$\alpha_{i+1} : (B_{i+1}, O_{i+1}) \simeq (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (B_i, O_i) \simeq (\mathbb{K}^n, 0)$$

soit représenté par :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_1(a_2 + x_2), \dots, x_1(a_n + x_n)), \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad i \geq 2.$$

On a alors :

$$f_i(x_1, x_1(a_2 + x_2), \dots, x_1(a_n + x_n)) = x_1^{m_i} u(x_1, \dots, x_n) f_{i+1}(x_1, \dots, x_n)$$

où u est un inversible de \mathcal{O}_n .

On vérifie par récurrence sur $k \leq m_i$, que pour $|\alpha| \leq k$, on a :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x_1, x_1(a_2 + x_2), \dots, x_1(a_n + x_n)) \in x_1^{m_i - k} J_{i+1, k}.$$

Composant ceci avec φ_{i+1} (écrite dans le système de coordonnées), on obtient :

$$\text{ord}(\varphi_i^* J_{i, k}) \geq (m_i - k) \text{ord}(\varphi_i) + \text{ord}(\varphi_{i+1}^* J_{i+1, k}) \geq 1 + \text{ord}(\varphi_{i+1}^* J_{i+1, k})$$

Ceci achève la preuve du cas où $(X, 0)$ est un germe d'hypersurface. Notons dans ce cas que pour $i \geq D$, X_i est équimultiple le long de $C_i = \text{Im}\varphi_i$.
□

Prouvons à présent le cas général. Soit H_{X_i, C_i} la valeur générique de la fonction de Hilbert-Samuel de X_i le long de $C_i = \text{Im}\varphi_i$.

Chaque α_i induisant un isomorphisme de $B_i - \alpha_i^{-1}(O_i)$ sur $B_{i-1} - \{O_{-1}\}$, on a :

- i) la suite H_{X_i, C_i} est constante et égale à $H_{X, C}$;
- ii) $H_{i+1} = H_{X_{i+1}, O_{i+1}} \leq H_i = H_{X_i, O_i}$ par le théorème de Bennett [B] ;
- iii) par semi-continuité de la fonction de Hilbert-Samuel (cf. [L-J-T]) :

$$H_{X, C} = H_{X, C_i} \leq H_i = H_{X_i, O_i}.$$

Par conséquent, montrer qu'il existe i_0 tel que, $\forall i \geq i_0$ on ait $H_i = H_{X, C}$, c'est montrer qu'il existe i_0 tel que $\forall i \geq i_0$ on ait $H_i = H_{X_i, C_i}$. Ce qui signifie qu'il s'agit de voir que $(C_i, O_i) \subset (S_i, O_i)$ où S_i est la strate de Hilbert-Samuel de X_i passant par O_i i.e. :

$$S_i = \{x \in X_i \mid H_{X_i, x} = H_{X_i, O_i}\}.$$

Plongeons (X_i, O_i) dans $(\mathbb{K}^n, 0)$ et choisissons un système de coordonnées quelconques, y_1, \dots, y_n , à l'origine de \mathbb{K}^n . Écrivons :

$$\mathcal{O}_{X_i, O_i} = \frac{\mathbb{K}\{y\}}{\mathfrak{a}_i}.$$

Si $f_{i,1}, \dots, f_{i,p_i}$ désigne la base standard distinguée de \mathfrak{a}_i dans ce système de coordonnées, on a :

$$S_i = \bigcap_{j=1}^{p_i} S_{i,j}.$$

Avec $S_{i,j} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid m_x(f_{i,j}) = m_{O_i}(f_{i,j})\}$, où m_x désigne la multiplicité ou l'ordre au point x (cf. [B-M2] Th. 5.3.1 p.821).

Notre problème revient donc à voir qu'il existe i_0 , tel que pour tout $i \geq i_0$, on puisse trouver un système de coordonnées à l'origine de $(\mathbb{K}^n, 0)$ tel que chaque élément de la base standard distinguée $f_{i,j}$, avec $1 \leq j \leq p_i$, relative à ce système de coordonnées, soit équimultiple le long de C_i . Nous allons prouver cette affirmation. Puisque pour tout i :

$$H_{i+1} \leq H_i,$$

par le théorème de stabilisation 5.2.2 p. 820 de [B-M2], on obtient l'existence d'un i_0 tel que $\forall i \geq i_0$:

$$H_i = H_{i_0}.$$

Fixons un tel entier i_0 , plongeons (X_{i_0}, O_{i_0}) dans $(\mathbb{K}^n, 0)$, et choisissons un système de coordonnées (à l'origine de \mathbb{K}^n) (w, z) avec $w = (w_1, \dots, w_{n-r})$, $z = (z_1, \dots, z_r)$ satisfaisant les conclusions du lemme 7.2 p.828 de [B-M2] (des variables essentielles dans la terminologie de [B-M2]).

Considérons maintenant $f_{i_0,1}, \dots, f_{i_0,p_{i_0}}$, la base standard distinguée de \mathfrak{a}_{i_0} relativement à ce système de coordonnées, où $\mathcal{O}_{X_{i_0}, O_{i_0}} = \frac{\mathbb{K}\{w,z\}}{\mathfrak{a}_{i_0}}$. D'après le théorème 7.3 p. 828 de [B-M2], il existe un système de coordonnées (w', z') dans un voisinage de $O_{i_0+1} = 0$ tel que :

- si $\mathfrak{a}_{i_0+1} \subset \mathbb{K}\{w', z'\}$ désigne le transformé strict de \mathfrak{a}_{i_0} (donc $\mathcal{O}_{X_{i_0+1}, O_{i_0+1}} \simeq \mathbb{K}\{w', z'\}/\mathfrak{a}_{i_0+1}$), la base standard distinguée de \mathfrak{a}_{i_0+1} est constituée par les transformées strictes $f_{i_0+1,j}$ des $f_{i_0,j}$, $1 \leq j \leq p_{i_0}$.
- le système de coordonnées (w', z') satisfait les conclusions du lemme 7.2 p.828 de [B-M2].

On peut donc itérer ce qui précède. D'après le cas hypersurface, au bout d'un nombre fini d'étapes D , les $f_{i_0+k,j}$, $1 \leq j \leq p_{i_0}$, $k \geq D$ deviennent équimultiples le long de C_{i_0+k} . Le théorème en résulte comme nous l'avons vu plus haut. \square

Remarque 4.3. — Soit $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,0)}$. Supposons que $(X, 0)$ soit réduit et équidimensionnel de dimension d . Soit $I \subset \mathcal{O}_n$ tel que $\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_n/I$. Si J désigne l'idéal engendré par I et tous les jacobiens d'ordre $n-d$ des $n-d$ upplets d'éléments de I , et si $D = \text{ord}(\varphi^*(J))$, on a (X_i, O_i) lisse pour $i \geq D$. Il suffit pour le constater de reprendre le calcul du Lemme 4.2.

Le Théorème 4.1 et la Remarque 4.3 nous permettent de décrire une base de voisinage d'un élément de $\mathcal{R}_{(X,0)}$. Pour cela, plongeons $(X, 0)$ dans $(\mathbb{K}^n, 0)$ et notons par d la dimension en 0 de $(X, 0)$. Soit $z = (z', z'')$, $z' = (z_1, \dots, z_d)$, $z'' = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ un système de coordonnées à l'origine de \mathbb{K}^n . Pour $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,0)}$, notons comme précédemment :

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cdot t^k.$$

Soit $\xi \in B_{\mathbb{K}^n, i}(\varphi)$. Posons : $\xi(t) = \sum_{k=0}^i A_k \cdot t^k + t^i r_i(\xi)(t)$, où $r_i(\xi) \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$. Notons : $r_i(\xi) = (r'_i(\xi), r''_i(\xi))$, $r'_i(\xi) = (r_{i,1}(\xi), \dots, r_{i,d}(\xi)) \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d, 0)}$, $r''_i(\xi) = (r_{i,d+1}(\xi), \dots, r_{i,n}(\xi)) \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^{n-d}, 0)}$.

COROLLAIRE 4.4. — *Soit $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cdot t^k$, $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,0)}$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall i \geq i_0$, après une éventuelle permutation des coordonnées dans \mathbb{K}^n , il existe des germes de fonctions analytiques nulles à l'origine dans \mathbb{K}^{d+1} , $u_{i,j}(z', t)$, $d+1 \leq j \leq n$, tels que pour $\xi \in B_{(\mathbb{K}^n, i)}(\varphi)$ on ait :*

$$\xi \in B_{X, i}(\varphi) \iff r''_i(\xi)(t) = (u_{i,d+1}(r'_i(\xi)(t), t), \dots, u_n(r'_i(\xi)(t), t))$$

Preuve. — Conservant les notations qui suivent (D_2) , on a $\xi \in B_{X, i}(\varphi)$ si et seulement si l'arc $t \rightarrow (t, r_i(\xi)(t)) \in \mathcal{A}_{(Z'_i, 0)}$. Il ne nous reste plus qu'à décrire $\mathcal{A}_{(Z'_i, 0)}$. Fixons i_0 de telle sorte que pour $i \geq i_0$, $(Z'_i, 0)$ soit lisse. Comme $\dim_0(Z'_i, 0) = d+1$, celui-ci peut être défini par :

$$(Z'_i, 0) = \{(t, z) \in (\mathbb{K}, 0) \times (\mathbb{K}^n, 0) \mid f_{d+1}(t, z) = \dots = f_n(t, z) = 0\},$$

où le rang en 0 de la matrice jacobienne des f_j , $d+1 \leq j \leq n$, est $n-d$. Pour conclure, il nous suffit de voir, par le théorème des fonctions implicites ordinaires, qu'il existe $i_{d+1}, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ tels que :

$$\det\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_{i_l}}\right)_{d+1 \leq k, l \leq n}(0) \neq 0.$$

Ceci est nécessairement satisfait. En effet, si cela n'était pas le cas, puisque le rang de la matrice jacobienne des f_j est tout de même $n-d$, cela signifierait que l'on peut définir (après une éventuelle permutation des z_j) $(Z'_i, 0)$ comme :

$$\begin{aligned} (Z'_i, 0) &= \{(t, z) \in (\mathbb{K}, 0) \times (\mathbb{K}^n, 0) / t - u_1(z_1, \dots, z_{d+1}) \\ &= z_{d+2} - u_2(z_1, \dots, z_{d+1}) \\ &= \dots = z_n - u_{n-d}(z_1, \dots, z_{d+1}) = 0\} \end{aligned}$$

avec $u_j(0) = 0$, $1 \leq j \leq n - d$ et $\partial u_1 / \partial z_1(0) = \partial u_1 / \partial z_2(0) = \dots = \partial u_1 / \partial z_{d+1}(0) = 0$.

Mais ceci est absurde puisque l'arc $t \rightarrow (t, r_i(\varphi)(t))$ est à valeurs dans $(Z'_i, 0)$. Or celui-ci ne peut satisfaire l'équation :

$$t - u_1(r_{i,1}(\varphi)(t), \dots, r_{i,d+1}(\varphi)(t)) = 0,$$

car $\text{ord}(u_1(r_i(\varphi))) \geq 2$. \square

Remarque 4.5 . — 1) Soit $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,0)}$. Fixons i_0 satisfaisant les conditions de 4.4. Soit $i \geq i_0$, alors l'application Θ_i :

$$\begin{aligned} B_{X,i}(\varphi) &\rightarrow \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^a,0)} \\ \xi &\rightarrow r'_i(\xi) \end{aligned}$$

est un "isomorphisme analytique" puisque sa réciproque Θ_i^{-1} est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^a,0)} &\rightarrow B_{X,i}(\varphi) \\ \alpha &\rightarrow \Theta_i^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

où $\Theta_i^{-1}(\alpha)(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_d(t), u_{i,d+1}(\alpha(t), t), \dots, u_{i,n}(\alpha(t), t))$. On peut d'autre part considérer que la notion naturelle de morphisme analytique entre $\mathcal{A}_{(X,0)}$ et $\mathcal{A}_{(Y,0)}$ est celle des morphismes induits par les applications analytiques :

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}, 0) \times (X, 0) &\rightarrow (\mathbb{K}, 0) \times (Y, 0) \\ (t, x) &\rightarrow (t, a(t, x)). \end{aligned}$$

Pour ces raisons, il nous semble justifié de dire que de ce point de vue $\mathcal{R}_{(X,x)}$ est l'ensemble des points réguliers de $\mathcal{A}_{(X,x)}$.

2) Si $(X, 0)$ est réduit et équidimensionnel, l'entier i_0 est précisé par 4.3.

3) Spécifier la dépendance des $u_{i,j}(z', t)$ par rapport aux A_k , $k \leq i$, est la notion de stabilité de [D-L1]. Ceci découlera du Théorème 4.10. L'entier i_0 de 4.3 est plus précis que celui fourni par la preuve du Lemme 4.1 de [D-L1]. Il est utile de préciser cet entier i_0 si on cherche à obtenir des informations précises sur la série de Poincaré considérée dans [D-L1].

En général $\mathcal{R}_{(X,0)}$ n'est pas dense dans $\mathcal{A}_{(X,0)}$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.6 . — Considérons le germe en 0 du parapluie de Whitney :

$$(X, 0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^3, 0) \mid z_1^2 - z_2 z_3^2 = 0\}$$

$(\text{Sing}(X), 0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^3, 0) \mid z_1 = z_3 = 0\}$. Soit l'arc $\varphi, t \rightarrow (0, t, 0)$. Il est facile de vérifier que $\forall i \geq 1, B_{X,i}(\varphi) \subset \mathcal{A}_{(\text{Sing}(X),0)}$. Par conséquent $B_{X,i}(\varphi) \cap \mathcal{R}_{(X,0)} = \emptyset$.

Cependant ce genre de pathologie peut toujours être évité par un changement de paramétrisation. Plus précisément on a :

LEMME 4.7. — Soient $(X, 0)$ un germe d'espace analytique complexe réduit et $\varphi \in \mathcal{A}_{(X,0)}$. Alors il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, désignant par θ l'arc $t \rightarrow \varphi(t^p)$, on ait, $\forall (Y, 0)$ sous-ensemble analytique propre de $(X, 0)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}, B_{X,i}(\theta) \cap (\mathcal{A}_{(X,0)} - \mathcal{A}_{(Y,0)}) \neq \emptyset.$$

Preuve. — Fixons un représentant de $(X, 0)$ dans un voisinage de 0 assez petit. Soit alors $\Pi : Z \rightarrow X$, avec Z lisse dénombrable à l'infini, Π propre et surjectif (un tel Π existe en vertu des résultats sur la désingularisation). Soit maintenant C la courbe image de φ . Posons $A' = \Pi^{-1}(C)$. Considérons la décomposition de A' en composantes irréductibles $A' = \cup_{\alpha \in \Lambda} A'_\alpha$ (Λ est dénombrable). Pour chaque $\alpha \in \Lambda$, puisque Π est propre, $\Pi(A'_\alpha)$ est un sous-ensemble analytique irréductible inclus dans C . C'est donc un point ou C tout entier. Comme Λ est dénombrable, il existe α tel que $\Pi(A'_\alpha) = C$. Fixons un tel α , disons $\alpha = 1$. $\Pi^{-1}(0) \cap A'_1$ est un sous-ensemble analytique de A'_1 tel que pour tout $p \in A'_1, \dim_p \Pi^{-1}(0) \cap A'_1 < \dim_p A'_1$. Soit $p \in \Pi^{-1}(0) \cap A'_1$, considérons un arc $\rho : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (A'_1, p)$ tel que $\rho \in \mathcal{A}_{(A'_1, p)} - \mathcal{A}_{(\Pi^{-1}(0) \cap A'_1, p)}$. On peut supposer que ρ définit la normalisation de son image (C_0, p) . On a alors un diagramme commutatif induit par Π :

$$\begin{array}{ccccc} (C_0, p) & \xrightarrow{\Pi} & (C, 0) & & \\ \uparrow \rho & & \uparrow n & & \\ (C, 0) & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & (C, 0) & \xleftarrow{a} & (C, 0) \end{array}$$

où $\varphi = n \circ a$, n est la normalisation de $(C, 0)$, $\tilde{\Pi}$ le relèvement de Π à la normalisation. Par un choix convenable de coordonnée dans le $(C, 0)$ source de $\tilde{\Pi}$, on peut écrire $\tilde{\Pi}(t) = t^p$. Ainsi $\Pi(\rho(t)) = n(t^p)$. Écrivons maintenant

$a(t) = t^k u(t)$, $u(0) \neq 0$. Puis soit $\alpha \in \mathcal{O}_1$ tel que $\alpha(t)^p = u(t^p)$. On a :

$$\varphi(t^p) = n(t^{kp}u(t^p)) = n((t^k\alpha(t))^p) = \Pi(\rho(t\alpha(t))).$$

Si $\tilde{\rho}$ désigne l'arc $t \rightarrow \rho(t\alpha(t)) \in \mathcal{A}_{(Z,p)}$, on a donc $\Pi(\tilde{\rho}(t)) = \varphi(t^p) = \theta(t)$. Soit maintenant $(Y, 0)$ un sous-ensemble analytique propre de $(X, 0)$. Notons $Y' = \Pi^{-1}(Y)$, (Y', p) est un sous-ensemble analytique propre de (Z, p) . Soit $i \in \mathbb{N}$, il existe en vertu du lemme 4.9 ci-dessous $\tilde{\xi} \in B_{Z,i}(\tilde{\rho})$ tel que $\tilde{\xi} \notin \mathcal{A}_{(Y',p)}$. Par suite l'arc $\xi = \Pi(\tilde{\xi}) \in B_{X,i}(\theta)$ et $\xi \notin \mathcal{A}_{(Y,0)}$. \square

Remarque 4.8 . — Le Lemme 4.7 ne sera pas utilisé par la suite. C'est le seul endroit où nous utilisons l'existence de désingularisation. Il a été motivé par une affirmation dans l'article de J. Becker référencé dans [I5].

Le lemme 4.9 est une version effective du second point du Lemme 1.4 de [T4]. Cette effectivité sera utilisée à la section suivante.

LEMME 4.9. —

Soient $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ et $i \in \mathbb{N}$. Pour $f \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$, $f \neq 0$ on a :

$$m_0(f) \leq \text{Min}_{\theta \in B_{\mathbb{K}^n, i}(\varphi)} \text{ord}(f \circ \theta) \leq m_0(f)(i+1)$$

où $m_0(f)$ désigne la multiplicité ou l'ordre de f .

Preuve. — Soient $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ et $i \in \mathbb{N}$. Pour prouver 4.9, on peut supposer $\text{ord}(\varphi) \leq i$. En effet sinon, soit (a_1, \dots, a_n) ne figurant pas dans les zéros de la forme initiale de f . Alors l'arc $t \rightarrow \theta(t) = (a_1 t^{i+1}, \dots, a_n t^{i+1})$ est dans $B_{\mathbb{K}^n, i}(\varphi)$ et $\text{ord}(f \circ \theta) = m_0(f)(i+1)$. Nous supposons donc $\text{ord}(\varphi) \leq i$. On peut par ailleurs supposer que $f \in \mathcal{O}_n$. Soit $(Z_0, 0) = (\mathbb{K}, 0) \times (X, x)$, où (X, x) est le germe défini par f . Posons : $f_0 \in \mathbb{K}\{t, X\}$, $f_0 = f$. Puis soit $f_j(t, x) \in \mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{K}\{t, X\}$, la transformée stricte de f_{j-1} par Π'_j (les notations sont celles de (D_2)). Un calcul élémentaire en coordonnées locales montre que :

$$t^{m_0(f_0)+m_0(f_1)+\dots+m_0(f_{i-1})} f_i(t, X) = f\left(\sum_{k=1}^i A_k t^k + t^i X\right)$$

pour (t, X) voisin de $(0, 0)$.

Soit alors un point $(1, a_1, \dots, a_n)$ qui n'est pas dans les zéros de la forme initiale de f_i . On a alors :

$$t^{m_0(f_0)+m_0(f_1)+\dots+m_0(f_{i-1})} f_i(t, a_1 t, \dots, a_n t) = f\left(\sum_{k=1}^i A_k t^k + t^{i+1} A\right)$$

avec $A = (a_1, \dots, a_n)$. D'où :

$$\text{ord}\left(f\left(\sum_{k=1}^i A_k t^k + t^{i+1} A\right)\right) = m_0(f_0) + m_0(f_1) + \dots + m_0(f_{i-1}) + m_0(f_i).$$

Or c'est un cas extrêmement simple (vérifiable à la « main ») du théorème de Benett [B] de voir que :

$$m_0(f_i) \leq m_0(f_{i-1}) \leq \dots \leq m_0(f_0).$$

Par suite $\text{ord}\left(f\left(\sum_{k=1}^i A_k t^k + t^{i+1} A\right)\right) \leq m_0(f)(i+1)$. \square

Nous allons à présent prouver le théorème de semi-continuité 1.7.

Preuve de 1.7. — Considérons une sous-variété algébrique affine irréductible $V \subset \mathbb{K}^l$. Notons $\mathbb{K}[V]$ la \mathbb{K} -algèbre de type fini qui la définit. Soient $F_1(t, X), \dots, F_s(t, X)$ des éléments de $\mathbb{K}[V][[t, X]]$. Posons :

$$F_j(t, x) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \alpha}^j t^{\alpha_1} X^\alpha, \quad a_{\alpha_1, \alpha}^j \in \mathbb{K}[V].$$

Soient $R = \sum_{j=1}^s \mathbb{K}[V][[t, X]] F_j(t, X)$ et $N(R)$ le diagramme des exposants initiaux de R . Pour chaque $v \in V$, il y a un morphisme « d'évaluation des coefficients en v » :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[V][[t, X]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[t, X]] \\ F(t, X) &\longrightarrow F(v, t, X) \end{aligned}$$

où si $F(t, x) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \alpha} t^{\alpha_1} X^\alpha$, $a_{\alpha_1, \alpha} \in \mathbb{K}[V]$,

$$F(v, t, x) = \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \alpha}(v) t^{\alpha_1} X^\alpha, \quad a_{\alpha_1, \alpha}(v) \in \mathbb{K}.$$

On notera par R_v l'idéal de $\mathbb{K}[[t, X]]$ engendré par les $F_j(v, t, X)$ et par $N(R_v)$ son diagramme des exposants initiaux. On a alors :

LEMME 4.10. — *Sous les notations précédentes :*

- 1) $\forall v \in V, N(R) \leq N(R_v)$;
- 2) *Il existe V' sous-variété algébrique propre de V telle que :*
 - $\forall v \in V - V', N(R) = N(R_v)$;
 - *pour tout sommet β de $N(R)$, il existe $G \in R$ tel que $\nu(G) = \beta$ et $\forall v \in V - V', \nu(G(v, t, X)) = \nu(G) = \beta$.*

Preuve. — Il suffit de répéter dans nos notations la preuve des lemmes 7.1 et 7.2 de E. Bierstone et P.D. Milman dans [B-M1]. \square

LEMME 4.11. — Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}^i = \mathbb{K}^{ni}$, il existe une sous-variété propre V' de V telle que :

$$1) \forall \varphi^i, \theta^i \in V - V', \mathcal{H}_{X, \varphi^i}^i = \mathcal{H}_{X, \theta^i}^i ;$$

$$2) \forall \varphi^i, \theta^i \in V - V', \mathcal{N}_{X, \varphi^i}^i = \mathcal{N}_{X, \theta^i}^i .$$

Preuve. — Nous tentons d'abord d'alléger les notations. Soit φ^i un élément de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}^i$, c'est donc un morphisme de \mathbb{K} -algèbres locales de $\mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \mathbb{K}\{t\}/(t)^{i+1}$. La donnée de φ^i est donc équivalente à la donnée d'un élément :

$$\varphi^i = \sum_{k=1}^i A_k t^k, \text{ avec } A_k \in \mathbb{K}^n .$$

Les notations étant celles de (D_1) et (D_2) , nous noterons par $H_{A^j} = H_{A_1, \dots, A_j}$, $A^j = (A_1, \dots, A_j)$, la fonction de Hilbert-Samuel de $(Z'_j, 0)$. C'est donc la fonction de Hilbert-Samuel de l'anneau local $\mathbb{K}\{t, X\}/I_{j, A^j}$. Dans ces notations, la suite $\mathcal{H}_{X, \varphi^i}^i$ est la suite $(H_0, H_{A_1}, \dots, H_{A_1, \dots, A_i})$, où H_0 est la fonction de Hilbert-Samuel de $(Z'_0, 0) = (\mathbb{K}, 0) \times (X, 0)$. Soit j , $1 \leq j \leq i$. Désignons par V_j l'adhérence de Zariski de $P_j(V) \subset \mathbb{K}^{nj}$, où $P_j : \mathbb{K}^{ni} \rightarrow \mathbb{K}^{nj}$ désigne la projection oublie des $n(i-j)$ derniers termes. V_j est donc une sous-variété irréductible de \mathbb{K}^{nj} . Considérons maintenant une base standard, $f_1(X), \dots, f_{p_0}(X) \in \mathbb{K}[[X]]$ de I_0 , où I_0 est l'idéal définissant $\mathcal{O}_{X,0}$ comme $\mathbb{K}\{X\}/I_0$. Puis posons :

$$F_{k,0}(t, X) = f_k(X) \in \mathbb{K}[[X]], \quad 1 \leq k \leq p_0 .$$

Soit alors :

$$F_{k,1}(t, X) = \frac{F_{k,0}(t, t(Y_1 + X))}{t^{|\nu(F_{k,0})|}} \in \mathbb{K}[Y_1][[t, X]], \quad 1 \leq k \leq p_0 .$$

Prenant la classe des coefficients des $F_{k,1}$ dans $\mathbb{K}[V_1]$, on obtient des éléments $\bar{F}_{k,1}(t, X) \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$. On notera R_1 l'idéal de $\mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ engendré par les $\bar{F}_{k,1}(t, X)$ et soit $N(R_1)$ son diagramme des exposants initiaux. Désignons par $\beta_{1,1}, \dots, \beta_{p_1,1}$ les sommets de $N(R_1)$. D'après le lemme précédent il existe une sous-variété propre V'_1 de V_1 et des éléments $G_{1,1}, \dots, G_{p_1,1} \in R_1 \subset \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ tels que :

- $\forall A^1 \in V_1 - V'_1, N(R_1) = N(R_{1, A^1}) ;$
- $\forall A^1 \in V_1 - V'_1, \forall k, 1 \leq k \leq p_1, \beta_{k,1} = \nu(G_{k,1}) = \nu(G_{k,1}(A^1, t, X)).$

Posons ensuite :

$$F_{k,2}(t, X) = \frac{G_{k,1}(t, t(Y_2 + X))}{t^{\nu(G_{k,1})}} \in \mathbb{K}[V_1][Y_2][[t, X]], 1 \leq k \leq p_1.$$

Prenant la classe des coefficients des $F_{k,2}$ dans $\mathbb{K}[V_2]$, on obtient des éléments $\overline{F}_{k,2}(t, X) \in \mathbb{K}[V_2][[t, X]]$. On notera R_2 l'idéal de $\mathbb{K}[V_2][[t, X]]$ engendré par les $\overline{F}_{k,2}(t, X)$ et soit $N(R_2)$ son diagramme des exposants initiaux. Désignons par $\beta_{1,2}, \dots, \beta_{p_2,2}$ les sommets de $N(R_2)$. À nouveau le lemme 4.10 assure l'existence d'une sous-variété propre V'_2 de V_2 et d'éléments $G_{1,2}, \dots, G_{p_2,2} \in R_2 \subset \mathbb{K}[V_2][[t, X]]$ tels que :

- $\forall A^2 = (A_1, A_2) \in V_2 - V'_2, N(R_2) = N(R_{2,A^2})$;
- $\forall A^2 = (A_1, A_2) \in V_2 - V'_2, \forall k, 1 \leq k \leq p_2, \beta_{k,2} = \nu(G_{k,2}) = \nu(G_{k,2}(A^2, t, X))$.

On continue le procédé par récurrence. Soit $j < i$. Ayant déterminé une sous-variété propre V'_j de V_j et des éléments $\overline{F}_{k,j}(t, X) \in \mathbb{K}[V_j][[t, X]]$, $1 \leq k \leq p_{j-1}$, engendrant un idéal R_j , il existe des éléments $G_{1,j}, \dots, G_{p_j,j} \in R_j \subset \mathbb{K}[V_j][[t, X]]$ tels que :

- $\forall A^j = (A_1, \dots, A_j) \in V_j - V'_j, N(R_j) = N(R_{j,A^j})$;
- $\forall A^j = (A_1, \dots, A_j) \in V_j - V'_j, \forall k, 1 \leq k \leq p_j, \beta_{k,j} = \nu(G_{k,j}) = \nu(G_{k,j}(A^j, t, X))$,

où les $\beta_{k,j}$ sont les sommets de $N(R_j)$.

On pose alors :

$$F_{k,j+1}(t, X) = \frac{G_{k,j}(t, t(Y_{j+1} + X))}{t^{\nu(G_{k,j})}} \in \mathbb{K}[V_j][Y_{j+1}][[t, X]], 1 \leq k \leq p_j.$$

On note $\overline{F}_{k,j+1}(t, X)$ $1 \leq k \leq p_j$, les éléments de $\mathbb{K}[V_{j+1}][[t, X]]$ obtenus en prenant les classes des coefficients. Soient R_{j+1} l'idéal de $\mathbb{K}[V_{j+1}][[t, X]]$ engendré par les $\overline{F}_{k,j+1}(t, X)$ et $N(R_{j+1})$ son diagramme des exposants initiaux. Le Lemme 4.10 assure l'existence d'éléments $G_{k,j+1} \in R_{j+1}$, $1 \leq k \leq p_{j+1}$ et d'une sous-variété propre V'_{j+1} de V_j tels que :

- $\forall A^{j+1} = (A_1, \dots, A_{j+1}) \in V_{j+1} - V'_{j+1}, N(R_{j+1}) = N(R_{j+1,A^{j+1}})$;
- $\forall A^{j+1} = (A_1, \dots, A_{j+1}) \in V_{j+1} - V'_{j+1}, \forall k, 1 \leq k \leq p_{j+1}, \beta_{k,j+1} = \nu(G_{k,j+1}) = \nu(G_{k,j+1}(A^{j+1}, t, X))$,

où les $\beta_{k,j+1}$ sont les sommets de $N(R_{j+1})$.

On pose alors :

$$V' = \bigcup_{1 \leq j \leq i} ((V'_j \times \mathbb{K}^{n(i-j)}) \cap V).$$

Alors V' est une sous-variété propre de V . Soient alors $A^i = (A_1, \dots, A_i)$ (resp. $B^i = (B_1, \dots, B_i)$) $\in V - V'$. Puisque le diagramme des exposants initiaux détermine la fonction de Hilbert-Samuel, il nous suffit pour conclure de voir que :

$$N(I_{j,A^j}) = N(I_{j,B^j}), \quad 1 \leq j \leq i.$$

Pour cela du fait que les $F_{k,0}$ sont une base standard de I_0 , leurs transformées strictes engendrent I_{1,A^1} pour tout $A^1 \in V_1$. Par conséquent pour tout $A^1 \in V_1$, I_{1,A^1} est engendré par les $\bar{F}_{k,1}(A^1, t, X)$, $1 \leq k \leq p_0$. Maintenant si $A^1 \in V_1 - V'_1$, par construction même les $G_{k,1}(A^1, t, X)$ sont une base standard de $I_{1,A^1} = R_{1,A^1}$. Par suite $N(I_{1,A^1}) = N(I_{1,B^1}) = N(R_1)$ et donc $H_{A^1} = H_{B^1}$. De plus, les transformées strictes des $G_{k,1}(A^1, t, X)$ engendrent I_{2,A_1,A_2} , $\forall A_1 \in V_1 - V'_1, A_2 \in \mathbb{K}^n$. Par conséquent les $\bar{F}_{k,2}(A_1, A_2, t, X)$, $1 \leq k \leq p_1$, engendrent I_{2,A_1,A_2} , $\forall A^1 \in V_1 - V'_1, A^2 \in \mathbb{K}^n$. Par suite, $\forall A_1 \in V_1 - V'_1, A_2 \in \mathbb{K}^n$, $R_{2,A_1,A_2} = I_{2,A_1,A_2}$. Par conséquent :

$$N(I_{2,A_1,A_2}) = N(I_{2,B_1,B_2}) = N(R_2), \text{ et } H_{A_1,A_2} = H_{B_1,B_2}.$$

Par construction, $\forall (A_1, A_2) \in V_2 - V'_2$, les $G_{k,2}(A_1, A_2, t, X)$ sont une base standard de I_{2,A_1,A_2} . Leurs transformées strictes engendrent donc I_{3,A^3} , $\forall A^3 \in (V_2 - V'_2) \times \mathbb{K}^n$. Par suite, les $F_{k,3}(A^3, t, X)$ engendrent I_{3,A^3} , $\forall A^3 \in (V_2 - V'_2) \times \mathbb{K}^n$. Donc $\forall A^3 \in V_3 - V'_3$, $N(I_{3,A^3}) = N(R_3) = N(R_{3,A^3})$. D'où :

$$H_{A^3} = H_{B^3}.$$

On continue ainsi par récurrence jusqu'à l'ordre i . Notons que pour tout $\varphi^i \in V - V'$,

$$\mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i = (N(I_{1,A_1}), \dots, N(I_{i,A^i})) = (N(R_1), \dots, N(R_i)) \quad \square$$

LEMME 4.12. — Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i = \mathbb{K}^{ni}$. Soit V' comme dans le Lemme 4.11. On a :

$$\forall \varphi^i \in V - V', \quad \forall \theta^i \in V', \quad \mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i \leq \mathcal{N}_{X,\theta^i}^i.$$

Preuve. — On procède par récurrence sur i . Pour $i = 1$, la propriété résulte du Lemme 4.10 puisque pour tout $A_1 \in V$, $I_{1,A_1} = R_{1,A_1}$. Nous

supposons donc $i > 1$ et la propriété établie pour $i - 1$. Pour établir la propriété au rang i , on raisonne par récurrence sur m la dimension de V . Si $m = 0$, le résultat est évident. On peut donc supposer $m > 0$ et la propriété établie pour toute sous-variété irréductible de \mathbb{K}^{ni} de dimension $\leq m - 1$. Soient V, V' comme dans 4.11. Considérons la décomposition en composantes irréductibles de V' :

$$V' = \bigcup_{1 \leq l \leq t} V'^l.$$

Le Lemme 4.11 fournit pour chaque l une sous-variété propre V'^l telle que :

$$\forall \varphi'^i, \forall \theta'^i \in V'^l - V'^m, \mathcal{N}_{X, \varphi'^i}^i = \mathcal{N}_{X, \theta'^i}^i.$$

Notre hypothèse de récurrence sur la dimension nous dit que :

$$\forall \varphi'^i \in V'^l - V'^m, \forall \theta'^i \in V'^m, \mathcal{N}_{X, \varphi'^i}^i \leq \mathcal{N}_{X, \theta'^i}^i.$$

Par conséquent pour établir la propriété au rang i , on peut supposer que V' est irréductible et qu'il existe une sous-variété propre V'' de V' comme dans 4.11. Il s'agit alors de voir que :

$$\forall \varphi^i \in V - V', \forall \theta^i \in V' - V'', \mathcal{N}_{X, \varphi^i}^i \leq \mathcal{N}_{X, \theta^i}^i.$$

Maintenant par hypothèse de récurrence sur i , notant φ^{i-1} et θ^{i-1} les tronqués à l'ordre $i - 1$ de φ^i et θ^i , on a :

$$\mathcal{N}_{X, \varphi^{i-1}}^{i-1} \leq \mathcal{N}_{X, \theta^{i-1}}^{i-1}.$$

Si l'inégalité ci-dessus est stricte, par définition de l'ordre lexicographique on a alors aussi une inégalité stricte au rang i . On peut donc supposer que :

$$\mathcal{N}_{X, \varphi^{i-1}}^{i-1} = \mathcal{N}_{X, \theta^{i-1}}^{i-1}.$$

La preuve du Lemme 4.11, appliquée à V' , nous dit qu'il existe des sous-variétés propres V_j'' de V_j' , $1 \leq j \leq i$, des éléments $\overline{F}_{k,j}' \in \mathbb{K}[V_j'][[t, X]]$, $1 \leq k \leq p'_{j-1}$, engendrant un idéal R_j' dont le diagramme des exposants initiaux est noté $N(R_j')$, et des éléments $G'_{k,j} \in R_j'$ tels que :

- $\forall B^j = (B_1, \dots, B_j) \in V_j' - V_j''$, $N(R_j') = N(R'_{j, B^j})$;
- $\forall B^j = (B_1, \dots, B_j) \in V_j' - V_j''$, $\nu(G'_{k,j}) = \nu(G'_{k,j}(B^j, t, X))$, $1 \leq k \leq p'_j$, où les $\beta'_{k,j}$ sont les sommets de $N(R_j')$.

On a de plus :

$$F'_{k,j+1}(t, X) = \frac{G'_{k,j}(t, t(Y_{j+1} + X))}{t^{|\nu(G'_{k,j})|}} \in \mathbb{K}[V'_j][Y_{j+1}][[t, X]].$$

Dont les classes donnent les $\overline{F}'_{k,j+1} \in \mathbb{K}[V'_{j+1}][[t, X]]$. Par hypothèse, on a $p'_{j-1} = p_{j-1}$ et $\beta'_{k,j} = \beta_{k,j}$, $j \leq i-1$. Pour conclure il suffit d'établir la propriété suivante :

SOUS-LEMME 4.13. —

Il existe des éléments $\tilde{F}'_{k,i} \in \mathbb{K}[V][[t, X]]$, $1 \leq k \leq p_{i-1}$, tels que :

- 1) L'idéal de $\mathbb{K}[[t, X]]$ engendré par les $\tilde{F}'_{k,i}(B_1, \dots, B_i, t, X)$ est le même que celui engendré par les $\overline{F}'_{k,i}(B_1, \dots, B_i, t, X)$, $\forall B^i = (B_1, \dots, B_i) \in V' - W''$, où W'' est une sous-variété propre de V' ;
- 2) $\tilde{F}'_{k,i}(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, t, X) \in I_{i,A_1, \dots, A_{i-1}, A_i}$, $\forall A^i = (A_1, \dots, A_i) \in V$.

En effet supposons (4.13) établie. Notons \tilde{R}_i l'idéal de $\mathbb{K}[V][[t, X]]$ engendré par les $\tilde{F}'_{k,i}$ et par $N(\tilde{R}_i)$ son diagramme des exposants initiaux. Par le second point de (4.13), on a pour tout $A^i \in V$, $\tilde{R}_{i,A^i} \subset I_{i,A^i}$. Donc $N(I_{i,A^i}) \leq N(\tilde{R}_{i,A^i})$. Maintenant par le Lemme 4.10, il existe une sous variété propre W' de V telle que $\forall A^i \in V - W'$, $N(\tilde{R}_{i,A^i}) = N(\tilde{R}_i)$. Par irréductibilité de V , $V' \cup W' \subsetneq V$. Considérant un point $A^i \in V - (V' \cup W')$ on a donc :

$$N(R_i) = N(I_{i,A^i}) \leq N(\tilde{R}_{i,A^i}) = N(\tilde{R}_i)$$

Maintenant par le premier point de (4.13), considérons un point B^i de $V' - (V'' \cup W'')$ (qui est nécessairement non vide par irréductibilité de V'), on a :

$$N(R'_i) = N(I_{i,B^i}) = N(\tilde{R}_{i,B^i}).$$

Par suite par le Lemme 4.10, $N(\tilde{R}_i) \leq N(R'_i)$. D'où $N(R_i) \leq N(R'_i)$, ce que nous cherchions à démontrer . Il nous reste donc à prouver (4.13).

Nous allons à nouveau procéder par récurrence sur i . Les notations étant celles de la preuve du Lemme 4.11 on a :

$$F_{k,1}(t, X) = \frac{F_{k,0}(t, t(Y_1 + X))}{t^{|\nu(F_{k,0})|}} \in \mathbb{K}[Y_1][[t, X]], 1 \leq k \leq p_0.$$

Les $\overline{F}'_{k,1}$ sont les classes dans $\mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ des $F_{k,1}$. Posons : $\tilde{F}'_{k,1}(t, X) = \overline{F}_{k,1}(t, X) \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$. (4.13) est alors claire pour $i = 1$. D'autre part, il existe des $\overline{U}^1_{k,l} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ tels que :

$$G'_{k,1} = \sum_{l=1}^{p_0} \overline{U}^1_{k,l} \overline{F}'_{l,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]].$$

Posons :

$$G''_{k,1} = \sum_{l=1}^{p_0} U^1_{k,l} \tilde{F}'_{l,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$$

où les $U^1_{k,l}$ représentent les $\overline{U}^1_{k,l}$. Nous allons construire des $\tilde{G}'_{k,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$, $1 \leq k \leq p_1$, tels que :

- $\tilde{G}'_{k,1} \in R_1$;
- $\nu(\tilde{G}'_{k,1}) = \beta_{k,1}$;
- $\forall B_1 \in V'_1 - V''_1$, $\nu(\tilde{G}'_{k,1}(B_1, t, X)) = \nu(G'_{k,1}(B_1, t, X)) = \beta_{k,1}$;
- $\forall B_1 \in V'_1 - V''_1$, $\tilde{G}'_{k,1}(B_1, t, X) = G'_{k,1}(B_1, t, X)$ modulo un élément de \mathbb{K}^* .

On procède par récurrence sur k . On a d'abord :

$$\nu(G''_{1,1}) \leq \nu(G'_{1,1}) = \beta_{1,1}.$$

Mais $\nu(G''_{1,1}) \in N(R_1)$. Donc $\nu(G''_{1,1}) \geq \beta_{1,1}$. Par suite $\nu(G''_{1,1}) = \nu(G'_{1,1})$. Posons $\tilde{G}'_{1,1} = G''_{1,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$. Soit k , $1 \leq k < p_1$, supposons avoir construit $\tilde{G}'_{1,1}, \dots, \tilde{G}'_{k,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ satisfaisant les propriétés ci-dessus. On a : $\nu(G''_{k+1,1}) \leq \nu(G'_{k+1,1}) = \beta_{k+1,1}$. Mais $\nu(G''_{k+1,1}) \in N(R_1)$. Donc :

$$\nu(G''_{k+1,1}) \in \cup_{k+1 \leq s \leq p_1} (\beta_{s,1} + \mathbb{N}^{n+1}),$$

ou bien

$$\nu(G''_{k+1,1}) \in \cup_{1 \leq s \leq k} (\beta_{s,1} + \mathbb{N}^{n+1}).$$

Dans le premier cas on a $\nu(G''_{k+1,1}) \geq \beta_{k+1,1}$ et donc $\nu(G''_{k+1,1}) = \beta_{k+1,1}$. On pose alors $\tilde{G}'_{k+1,1} = G''_{k+1,1}$. Dans le second cas si $\nu(G''_{k+1,1}) < \nu(G'_{k+1,1})$, on écrit :

$$\nu(G''_{k+1,1}) = \beta_{l,1} + \gamma, \text{ avec } 1 \leq l \leq k \text{ et } \gamma \in \mathbb{N}^{n+1}.$$

On considère alors :

$$G''_{k+1,1}(t, X) = \tilde{g}'_{\beta_{l,1}, l, 1}(Y_1)G''_{k+1,1}(t, X) - g''_{\beta_{l,1}+\gamma, k+1, 1}(Y_1)t^{\gamma_1}X^{\gamma'}\tilde{G}'_{l,1}(t, X).$$

Où $\gamma = (\gamma_1, \gamma')$ et $\tilde{g}'_{\beta_{l,1}, l, 1}(Y_1)$ est le coefficient dans le développement de $\tilde{G}'_{l,1}$ correspondant au monôme $t^{\beta_{l,1,1}}X^{\beta'_{l,1}}$ avec $\beta_{l,1} = (\beta_{l,1,1}, \beta'_{l,1})$ et $g''_{\beta_{l,1}+\gamma, k+1, 1}(Y_1)$ est celui correspondant au monôme $t^{\beta_{l,1,1}+\gamma_1}X^{\beta'_{l,1}+\gamma'}$ dans le développement de $G''_{k+1,1}$. On a alors :

$$(**) \quad \nu(G''_{k+1,1}) < \nu(G'''_{k+1,1}) \leq \nu(G'_{k+1,1}) = \beta_{k+1,1}.$$

De plus :

- $\forall B_1 \in V'_1 - V''_1, G'''_{k+1,1}(B_1, t, X) = G'_{k+1,1}(B_1, t, X)$ à la multiplication près par un élément de \mathbb{K}^* ;
- $\forall B_1 \in V'_1 - V''_1, \nu(G'''_{k+1,1}(B_1, t, X)) = \beta_{k+1,1}$;
- $G'''_{k+1,1} \in R_1$.

On recommence alors le même raisonnement avec $G'''_{k+1,1}$ au lieu de $G'_{k,1}$. Puisque la première inégalité de (**) est stricte, au bout d'un nombre fini d'étapes, on aura construit un élément $\tilde{G}'_{k+1,1} \in \mathbb{K}[V_1][[t, X]]$ possédant les propriétés désirées.

Maintenant ayant construit $\tilde{G}'_{1,1}, \dots, \tilde{G}'_{p_1,1}$, on pose :

$$\tilde{F}'_{k,2}(t, X) = \frac{\tilde{G}'_{k,1}(t, t(Y_2 + X))}{t^{|\beta_{k,1}|}} \in \mathbb{K}[V_1][Y_2][[t, X]], 1 \leq k \leq p_1,$$

et on note encore $\tilde{F}'_{k,2}$ les éléments de $\mathbb{K}[V_2][[t, X]]$ obtenus en prenant la classe des coefficients dans $\mathbb{K}[V_2]$. Par construction même $\tilde{F}'_{k,2}(B_1, B_2, t, X)$ et $\overline{F}'_{k,2}(B_1, B_2, t, X)$ diffèrent au plus multiplicativement d'une constante non nulle pour tout $(B_1, B_2) \in V'_2 - V''_2$. Le premier point de (4.13) en découle pour $i = 2$. Concernant le second point, pour tout $A_1 \in V_1, \tilde{G}'_{k,1}(A_1, t, X) \in R_{1,A_1} = I_{1,A_1}$. Donc pour tout $A_2 \in \mathbb{K}^n$, leurs transformées strictes :

$$\frac{\tilde{G}'_{k,1}(A_1, t, t(A_2 + X))}{t^{|\tilde{G}'_{k,1}(A_1, t, X)|}}$$

sont des éléments de I_{2,A_1,A_2} . Mais :

$$|\nu(\tilde{G}'_{k,1}(A_1, t, X))| \geq |\nu(\tilde{G}'_{k,1}(t, X))| = |\beta_{k,1}|.$$

Donc les $\tilde{F}'_{k,2}(A_1, A_2, t, X)$ sont des multiples de ces transformées strictes et sont par suite des éléments de I_{2,A_1,A_2} . Donc (4.13) est établie pour $i = 2$.

Maintenant pour passer du rang $i - 1$ au rang i , on raisonne exactement comme nous venons de le faire pour le passage du rang 1 au rang 2. On considère l'idéal \tilde{R}_{i-1} de $\mathbb{K}[V_{i-1}][[t, X]]$ engendré par les $\tilde{F}'_{k,i-1}$, ainsi que l'idéal \tilde{R}'_{i-1} de $\mathbb{K}[V'_{i-1}][[t, X]]$ engendré par les classes des $\tilde{F}'_{k,i-1}$. On applique le Lemme 4.10 à \tilde{R}'_{i-1} , ce qui fournit des éléments $\hat{G}'_{k,i-1}$ analogues des $G'_{k,1}$. Ceux-ci permettent de construire par le même procédé que dans le passage du rang 1 au rang 2 des $\tilde{G}'_{k,i-1} \in \mathbb{K}[V_{i-1}][[t, X]]$, $1 \leq k \leq p_{i-1}$, tels que :

- $\nu(\tilde{G}'_{k,i-1}) = \beta_{k,i-1}$;
- $\nu(\tilde{G}'_{k,i-1}(B_1, \dots, B_{i-1}, t, X)) = \beta_{k,i-1}$ pour tout (B_1, \dots, B_{i-1}) dans un ouvert de Zariski non vide de V'_{i-1} ;
- $\tilde{G}'_{k,i-1}(B_1, \dots, B_{i-1}, t, X) = \hat{G}'_{k,i-1}(B_1, \dots, B_{i-1}, t, X)$ à la multiplication près par un élément de \mathbb{K}^* , pour tout (B_1, \dots, B_{i-1}) dans un ouvert de Zariski non vide de V'_{i-1} ;
- $\tilde{G}'_{k,i-1} \in \tilde{R}_{i-1}$.

Ceux-ci permettent de définir les $\tilde{F}'_{k,i}$ par la formule :

$$\tilde{F}'_{k,i}(t, X) = \frac{\tilde{G}'_{k,i-1}(t, t(Y_i + X))}{t^{|\beta_{k,i-1}|}} \in \mathbb{K}[V_i][[t, X]], 1 \leq k \leq p_{i-1}.$$

On vérifie alors les propriétés de (4.13) comme plus haut. \square

Pour finir la preuve du théorème de semi-continuité, il nous suffit de dire que celui-ci résulte des Lemmes 4.11 et 4.12. \square

Preuve de 1.8. — La semi-continuité pour la topologie de Zariski d'une fonction \mathcal{F}^i de $\mathcal{A}^i_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ dans un ensemble ordonné Λ entraîne que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'ensemble :

$$S^i_\lambda = \{\varphi^i \in \mathcal{A}^i_{(\mathbb{K}^n, 0)} \mid \mathcal{F}^i(\varphi^i) \geq \lambda\}$$

est une sous-variété algébrique de $\mathcal{A}^i_{(\mathbb{K}^n, 0)}$. D'autre part d'après le théorème de semi-continuité $\varphi^i \rightarrow \mathcal{N}^i_{X, \varphi^i}$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\mathcal{N}_{i,j}$, $1 \leq j \leq l_i$, sur $\overline{\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})}$. On pose alors :

$$U_{i,j} = \{\varphi^i \in \overline{\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})} \mid \mathcal{N}_{X, \varphi^i} \geq \mathcal{N}_{i,j}\} \text{ et } W_{i,j} = \cup_{j' \neq j} U_{i,j'}.$$

Les propriétés de 1.8 sont alors claires puisque le diagramme des exposants initiaux détermine la fonction de Hilbert-Samuel ainsi que la multiplicité. \square

Remarque 4.14 . — 1) Il est naturel de se demander aussi si les fonctions $\varphi^i \rightarrow \mathcal{M}_{X,\varphi^i}^i$, et $\varphi^i \rightarrow \mathcal{H}_{X,\varphi^i}^i$ sont semi-continues supérieurement pour la topologie de Zariski sur $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n,0)}^i$. Ceci est au moins le cas pour les hypersurfaces. Cependant l'auteur n'a pas réussi pour le moment à le prouver dans le cas général.

2) On peut raffiner la partition $S_{i,j}$ ci-dessus en écrivant $S_{i,j} = \cup_{1 \leq k \leq t_{i,j}} U_{i,j,k} - W_{i,j,k}$, où $U_{i,j,k}$ et $W_{i,j,k}$ sont des variétés algébriques. De telle sorte que pour chaque k , il existe des $F_{k,l}(t, X) \in R(U_{i,j,k}, W_{i,j,k})[[t, X]]$, $R(U_{i,j,k}, W_{i,j,k})$ désignant les fonctions régulières sur $U_{i,j,k}$ à pôles dans $W_{i,j,k}$, telles que $\forall A^i \in U_{i,j,k} - W_{i,j,k}$ les $F_{k,l}(A^i, t, X)$ soient la base standard distinguée de I_{i,A^i} .

5. Strates Principales et volume motivique

Soient (X, x) un germe de \mathbb{K} -espace analytique et $i \geq 1$ un entier. D'après les résultats de la section précédente, on dispose d'une partition :

$$\mathbb{K}^{ni} = \bigcup_{1 \leq l \leq k_i} S_{i,l}$$

où les $S_{i,l}$ sont des sous-ensembles constructibles de \mathbb{K}^{ni} tels que :

– sur chaque $S_{i,l}$, $\mathcal{N}_{X,\varphi^i}^i = (N_{0,\varphi^i}, \dots, N_{i,\varphi^i})$ est constante égale à $\mathcal{N}_{X,l}^i = (N_0^l, \dots, N_i^l)$

– Si $l \neq l'$, $\mathcal{N}_{X,l}^i \neq \mathcal{N}_{X,l'}^i$

Par voie de conséquences $\mathcal{M}_{X,\varphi^i}^i$ et $\mathcal{H}_{X,\varphi^i}^i$ sont constantes sur chaque $S_{i,l}$.

On notera respectivement $\mathcal{M}_{X,l}^i = (m_0^l, \dots, m_i^l)$ et $\mathcal{H}_{X,l}^i = (H_0^l, \dots, H_i^l)$ la valeur de ces constantes.

DÉFINITION 5.1. — *Soient (X, x) un germe de \mathbb{K} -espace analytique et $i \geq 1$ un entier donné. On dit qu'une strate $S_{i,l}$ de la stratification de \mathbb{K}^{ni} par les suites de Nash des diagrammes des exposants initiaux est principale si et seulement si :*

1) $\forall m \in \mathbb{N}, (m, 0, \dots, 0) \notin N_i^l$

2) $m_i^l = 1$

On appelle i^{ieme} partie principale de la stratification de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ par les suites de Nash des diagrammes initiaux et on note $P_{(X,x)}^i$ la réunion (disjointe) des $S_{i,l}$ qui sont des strates principales.

Soient $m \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $|\alpha| = m$. On a $\alpha \leq (m, 0, \dots, 0)$. Ainsi pour $f \in \mathbb{K}[[t, X]]$, dire que son exposant initial $\nu(f)$ est égal à $(m, 0, \dots, 0)$ équivaut à dire que sa forme initiale $Ini(f)$ vaut $a_m t^m$ avec $a_m \neq 0$. Par conséquent dire qu'un multi-indice $(m, 0, \dots, 0)$ figure dans le diagramme des exposants initiaux de I_{i,A^i} pour un point A^i de \mathbb{K}^{n_i} équivaut à dire que t^m appartient à l'idéal initial $Ini(I_{i,A^i})$ de I_{i,A^i} . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'existence d'un tel m équivaut au fait que le réduit du cône tangent de $(Z'_i, 0)$, noté $(C(Z'_i, 0))_{red}$, est inclus dans $\{t = 0\}$ (cette dernière équation est celle du diviseur exceptionnel par la suite déclarations définie par A^i). La seconde condition correspond évidemment au fait que $(Z'_i, 0)$ est lisse. Ces deux remarques montrent en particulier que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $P_{(X,x)}^i$ est indépendant du système de coordonnées choisi sur \mathbb{K}^n .

THÉORÈME 5.2. — Soit (X, x) un germe de \mathbb{K} -espace analytique \mathbb{K} -réduit et équidimensionnel de dimension d .

- 1) La suite $[P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di}$ converge vers une limite non nulle dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$.
- 2) La suite $[\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})] \mathbb{L}^{-di} - [P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di}$ converge vers zéro dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$.
Ainsi :

$$\text{Lim}_{i \rightarrow +\infty} [P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di} = \text{Lim}_{i \rightarrow +\infty} [\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})] \mathbb{L}^{-di}.$$

Par conséquent :

$$\text{Lim}_{i \rightarrow +\infty} [P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di} = \mu(\mathcal{A}_{(X,x)})$$

où μ désigne la mesure motivique.

Preuve. — Nous commençons par constater que $P_{(X,x)}^i \subset \Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)})$. En effet, soit $A^i \in P_{(X,x)}^i$. Par le second point de 5.1 le germe correspondant $(Z'_i, 0) \subset (\mathbb{K}^{n+1}, 0)$ est lisse de dimension $d + 1$. Par conséquent $N(I_{i,A^i}) = \cup_{1 \leq k \leq n-d} (\alpha_{i_k} + \mathbb{N}^{n+1})$ avec $|\alpha_{i_k}| = 1$. Par la première condition de 5.1 $\alpha_{i_k} \neq (1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq k \leq n - d$. Ceci implique que la base standard distinguée de I_{i,A^i} est de la forme $X_{i_k} - U_{i_k}(t, X'')$, $1 \leq k \leq n - d$, où X'' désigne les d coordonnées parmi X_1, \dots, X_n , autres que $X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-d}}$. Par définition du diagramme (D_2) , ceci implique l'inclusion souhaitée. Montrons maintenant que la suite des $[P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di}$ est de Cauchy dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$. Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$, par le second point de la Remarque 4.14 et la description ci-dessus, l'application :

$$P_{(X,x)}^{i+k} \cap \Pi_{i+k,i}^{-1}(P_{(X,x)}^i) \longrightarrow P_{(X,x)}^i$$

déduite de la projection oublie des « k derniers termes » de $\mathbb{K}^{n(i+k)}$ dans \mathbb{K}^{ni} est une fibration localement triviale de fibre \mathbb{L}^{dk} . Ainsi $[P_{(X,x)}^{i+k} \cap \Pi_{i+k,i}^{-1}(P_{(X,x)}^i)] = [P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{dk}$ et donc :

$$\begin{aligned} [P^{i+k}] \mathbb{L}^{-d(k+i)} - [P^i] \mathbb{L}^{-di} &= [P^{i+k}] \mathbb{L}^{-d(k+i)} - [P^{i+k} \cap \Pi_{i+k,i}^{-1}(P^i)] \mathbb{L}^{-d(i+k)} \\ &= [P^{i+k} - P^{i+k} \cap \Pi_{i+k,i}^{-1}(P^i)] \mathbb{L}^{-d(i+k)} \end{aligned}$$

À un point $A^{i+k} = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_{i+k})$ de $P^{i+k} - P^{i+k} \cap \Pi_{i+k,i}^{-1}(P^i)$ correspond une suite des multiplicités de Nash $m_0, \dots, m_i, \dots, m_{i+k}$ avec $m_i \geq 2$ et $m_{i+k} = 1$. Soit $p = n - d$ et $J_{p,0}$ (resp. J_{p,A^i}) l'idéal de $\mathbb{K}[[t, X]]$ engendré par I_0 et tous les déterminants mineurs d'ordre p des jacobiniennes de p éléments de I_0 (resp. engendré par I_{i,A^i} et les déterminants mineurs d'ordre p des jacobiniennes de p éléments de I_{i,A^i}). Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)}$ tel que $\varphi^i = A^i$. Puisque la suite des multiplicités de Nash est décroissante, on a $m_l \leq 2$, $0 \leq l \leq i$. Un calcul élémentaire montre alors que :

$$\text{ord}_t(\Gamma_0^*(J_{p,0})) \geq i + \text{ord}_t(\Gamma_i^*(J_{p,A^i})) \geq i + 1.$$

Soit β' la fonction d'Artin-Greenberg de $\mathbb{K}[[t, X]]/J_{p,0}$ et $c \geq 1$ tel que $\beta'(i) \leq ci$. Notons $j = [i/c]$ la partie entière de i/c . Par définition de β' , on a donc $A^j \in \Pi^j(\mathcal{A}_{(\text{sing}(X), x)})$. Il en découle que :

$$d_{i+k} = \dim(P^{i+k} - P^{i+k} \cap \Pi_{i+k}^{-1}(P^i)) \leq (d-1)j + d(i+k-j) = d(i+k) - j$$

Par suite $\text{Lim}_{i \rightarrow +\infty} d(i+k) - d_{i+k} = +\infty$. Ce qui assure que la suite $[P^i] \mathbb{L}^{-di}$ est de Cauchy dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$ et donc convergente.

Soit maintenant $A^i \in \Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)}) - P_{(X,x)}^i$. Soit $\varphi(t) = \sum_{k=1}^i A_k t^k + t^i \varphi_i(t)$ avec $\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_{i+k} t^k$ un élément de $\mathcal{A}_{(X,x)}$ qui relève A^i . Par construction du diagramme (D_2) , l'arc $\Gamma_i(t) = (t, \varphi_i(t))$ est tracé dans $(Z'_i, 0)$. Ainsi le point $(1, A_{i+1})$ est dans l'ensemble des zéros de l'idéal initial $\text{In}(I_{i,A^i})$ de I_{i,A^i} . Ceci implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(m, 0, \dots, 0) \notin N_{i,A^i}$. Par conséquent puisque $A^i \notin P^i$, la suite des multiplicités de Nash (m_0, \dots, m_i) de A^i est telle que $m_i \geq 2$. Procédant comme plus haut en posant $j = [i/c]$, ceci implique que :

$$\text{ord}_t(\phi^* J_{p,0}) \geq i + 1, \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^n, 0)} | \phi^i = A^i$$

Par conséquent $A^j \in \Pi^j(\mathcal{A}_{(\text{sing}(X), x)})$. Il en résulte que :

$$l_i = \dim(\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)}) - P_{(X,x)}^i) \leq (d-1)j + d(i-j) = di - j$$

Par suite $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} di - l_i = +\infty$ et $[\Pi^i(\mathcal{A}_{(X,x)}) - P_{(X,x)}^i] \mathbb{L}^{-di}$ converge vers zéro dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$. Il en découle la convergence des deux suites considérées et la

coïncidence de leurs limites. Le fait que cette limite soit égale à $\mu(\mathcal{A}_{(X,x)})$ est conséquence de 7.1 p.229 dans [D-L1] (ou bien peut être considéré comme une définition du volume motivique c.f. [D-L2]). \square

Récemment S. Ishii et J. Kollár ont considéré l'hypersurface de \mathbb{C}^5 définie par $X_1^3 + X_2^3 + X_3^5 + X_4^5 + X_5^6 = 0$ et montré qu'elle fournissait un contre exemple en dimension 4 au « problème de Nash » (c.f. [N], [I.K], [R1], [R2] par exemple, pour la formulation de celui-ci). Nous nous proposons ici, pour illustrer ce qui précède et voir le rôle jouer par les suites de Nash, de calculer par les méthodes ci-dessus le volume motivique de telles hypersurfaces. On peut bien entendu faire le calcul de manière indépendante en déterminant une résolution des singularités et utiliser « les formules de changement de variables » de l'intégration motivique de [D-L1] ou [S].

Exemple 5.3 . — $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $n \geq 3$, $k \geq 2$ et $(H_{n,k}, 0)$ le germe d'hypersurface à l'origine de \mathbb{K}^{n+1} défini par :

$$X_1^k + \dots + X_n^k + Y^{2k} = 0,$$

(Le contre-exemple d'Ishii-Kollár est le cas $n = 4$, $k = 3$)

Posons pour $p \geq 1$, $V_{p,k} = \{(X_1, \dots, X_p) \in \mathbb{K}^p / 1 + X_1^k + \dots + X_p^k = 0\}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{A}_{(H_{n,k},0)}) &= ([V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k) \mathbb{L} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^n - 1} + [V_{n,k}] \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{2n-1} - 1} \\ &\quad + ([V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k) \frac{(\mathbb{L} - 1)^2}{(\mathbb{L}^{n-1} - 1)(\mathbb{L}^{2n-1} - 1)} \end{aligned}$$

Nous indiquons brièvement les principales étapes des calculs. Pour cela, désignons par C_k et W_k les constructibles :

$$\begin{aligned} C_k &= \{X \in \mathbb{K}^n / X \neq 0 \text{ et } X_1^k + \dots + X_n^k = 0\} \\ W_k &= \{(X, Y) \in \mathbb{K}^{n+1} / Y \neq 0 \text{ et } X_1^k + \dots + X_n^k + Y^{2k} = 0\}. \end{aligned}$$

Il est élémentaire de vérifier que dans $K_0(\mathcal{V}_{\mathbb{K}})$ on a :

$$[C_k] = ([V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k)(\mathbb{L} - 1) \text{ et } [W_k] = [V_{n,k}](\mathbb{L} - 1).$$

Soit maintenant $\varphi^i = A^i = (A_1, \dots, A_i) \in \mathbb{K}^{(n+1)i}$, $A_l = (B_l, Y_l) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $B_l = (b_{l,1}, \dots, b_{l,n})$. Posons $v = \text{Min}\{l / A_l \neq 0\}$. Si $A^i \in P^i$ alors on a $v \leq i$, sans quoi $m_i = k$. L'équation locale de $(Z'_v, 0)$ est :

$$(X_1 + b_{v,1})^k + \dots + (X_n + b_{v,n})^k + t^{kv}(Y + Y_v)^{2k} = 0.$$

Deux éventualités peuvent se présenter :

- $B_v \neq$ et alors $m_v > 0$ si et seulement si $B_v \in C_k$. On alors $m_v = 1$. Ainsi les éléments A^i de P^i au dessus de tels points sont une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{L}^{n(i-v)}$ et de base $C_k \times \mathbb{L}$. Ainsi leur contribution à $[P^i]\mathbb{L}^{-ni}$ est $[C_k]\mathbb{L}\mathbb{L}^{-nv}$. Faisant la somme pour v variant de 1 à i , et prenant la limite dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{K}}$ lorsque i tend vers $+\infty$ on obtient :

$$[C_k]\mathbb{L} \times \frac{1}{\mathbb{L}^{n-1}} = ([V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k)\mathbb{L} \frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{n-1}}$$

Ceci est la contribution des strates principales correspondant au suites de Nash $(k, \dots, k, 1, \dots, 1)$, le premier 1 en position v et $\text{ord}_t(\varphi^i) = v$. Le découpage de $[C_k]$ en $[V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k$ correspond aux différentes possibilités pour $N^v = \alpha + \mathbb{N}^{n+1}$, avec $\alpha = (0, \beta)$ et $|\beta| = 1$.

- $B_v = 0$ et donc $Y_v \neq 0$. On considère le premier l avec $v + l \leq i$ tel que $B_{v+l} \neq 0$. Si $A^i \in P^i$, on a certainement $l \leq v$. Sinon l'équation locale de $(Z'_{2v}, 0)$ est :

$$X_1^k + \dots + X_n^k + (t^v Y + t^v Y_{2v} + \dots + Y_v)^{2k} = 0$$

et l'on a $m_{2v} = 0$. On a alors deux sous-cas.

– a) $l = v$. L'équation locale de $(Z'_{2v}, 0)$ est alors :

$$(X_1 + b_{2v,1})^k + \dots + (X_1 + b_{2v,1})^k + (t^v Y + t^v Y_{2v} + \dots + Y_v)^{2k} = 0.$$

On a $m_{2v} > 0$ si et seulement si $(B_{2v}, Y_v) \in W_k$ et alors $m_{2v} = 1$. Les éléments de P^i au dessus de tels points sont une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{L}^{n(i-2v)}$ et de base $W_k \times \mathbb{L}^v$. Leur contribution a $[P^i]\mathbb{L}^{-ni}$ est donc $[W_k]\mathbb{L}^{-(2n-1)v}$. Prenant la somme pour v variant de 1 à $[i/2]$ et passant à la limite on obtient :

$$[W_k] \times \frac{1}{\mathbb{L}^{2n-1}-1} = [V_{n,k}] \frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{2n-1}-1}$$

Ces points correspondent aux suites de Nash $(k, \dots, k, 1, \dots, 1)$, le premier 1 en position $2v$ et $\text{ord}_t(\varphi^i) = v$.

– b) $1 \leq l < v$ et $l + v \leq i$. On a en particulier $v \geq 2$. L'équation locale de $(Z'_{v+l}, 0)$ est

$$(X_1 + b_{1,v+l})^k + \dots + (X_n + b_{n,v+l})^k + t^{k(v-l)}(t^l Y + t^l Y_{l+v} + \dots + Y_v)^{2k} = 0$$

On alors $m_{v+l} > 0$ si et seulement si $B_{v+l} \in C_k$ et alors $m_{v+l} = 1$. Ainsi les éléments de P^i au dessus de tels points sont une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{L}^{n(i-v-l)}$ et de base $(\mathbb{L}-1)[C_k]\mathbb{L}^l$. Ainsi la contribution

à $[P^i]\mathbb{L}^{-ni}$ est $(\mathbb{L} - 1)[C_k]\mathbb{L}^{-n(v+l)}\mathbb{L}^l$. Faisant varier v de 2 à i et l de 1 à $i_v = \text{Min}(v - 1, i - v)$, on obtient :

$$[C_k](\mathbb{L} - 1) \sum_{v=2}^i \mathbb{L}^{-nv} \sum_{l=1}^{i_v} \mathbb{L}^{-(n-1)l} = [C_k](\mathbb{L} - 1) \sum_{v=2}^i \mathbb{L}^{-nv} \frac{1 - \mathbb{L}^{-(n-1)i_v}}{\mathbb{L}^{n-1} - 1}$$

Posons $j = [(i + 1)/2]$. Nous obtenons :

$$[C_k](\mathbb{L} - 1) \frac{1}{\mathbb{L}^{n-1} - 1} \left(\sum_{v=2}^i \mathbb{L}^{-nv} - \mathbb{L}^{n-1} \sum_{v=2}^j \mathbb{L}^{-(2n-1)v} - \sum_{v=j+1}^i \mathbb{L}^{-(n-1)i} \mathbb{L}^{-v} \right)$$

La troisième somme est de limite nulle. La limite de la différence des deux premières sommes vaut :

$$\frac{\mathbb{L}^{n-1} - 1}{(\mathbb{L}^n - 1)(\mathbb{L}^{2n-1} - 1)}$$

Il vient donc (après simplification par $\mathbb{L}^{n-1} - 1$) :

$$[C_k] \frac{\mathbb{L} - 1}{(\mathbb{L}^n - 1)(\mathbb{L}^{2n-1} - 1)} = ([V_{n-1,k}] + [V_{n-2,k}] + \dots + k) \frac{(\mathbb{L} - 1)^2}{(\mathbb{L}^n - 1)(\mathbb{L}^{2n-1} - 1)}$$

6. Condition de rang de Gabrielov et espace des arcs

Dans cette section, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ un germe de morphisme entre deux germes irréductibles. Notons $\mathcal{F}_x : \mathcal{A}_{(X,x)} \rightarrow \mathcal{A}_{(Y,y)}$ le morphisme induit. Rappelons que nous désignons par rang générique de F_x le nombre :

$$r_1(F_x) = \text{grk}(F_x) = \text{Inf}_U(\text{Sup}_{x'} \text{Rang}(F_{x'}))$$

où $x' \in \text{Reg}(X \cap U)$ et U parcourt une base de voisinage x . Nous cherchons à établir :

THÉORÈME 6.1. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\text{grk}(F_x) = \dim_y Y$;
- 2) Pour tout ouvert \mathcal{V} de $\mathcal{R}_{(X,x)}$, $\mathcal{F}_x(\mathcal{V})$ contient un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$;
- 3) $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,x)})$ contient un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$.

Preuve. —

1) \Rightarrow 2)

Soient $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,x)}$ et $i \in \mathbb{N}$, nous allons prouver que : $\mathcal{F}_x(B_i(\varphi))$ contient un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,y)}$. Nous commençons d'abord par nous ramener au cas où (X, x) est lisse.

Réduction au cas où (X, x) est lisse :

Considérons un plongement $(X, x) \rightarrow (\mathbb{K}^m, 0)$. Soient $I \subset \mathbb{K}\{x_1, \dots, x_m\}$ l'idéal définissant (X, x) , $l = \text{haut}(I)$. Notons J_l l'idéal engendré par I et tous les déterminants jacobiens d'ordre l des l -upplets d'éléments de I . Puisque $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,x)}$, $\text{ord}(\varphi^* J_l) = u < +\infty$. Par le procédé utilisé au Théorème 4.1, on peut trouver un germe (Z, z) lisse, un germe de morphisme : $\Pi_z : (Z, z) \rightarrow (X, x)$ obtenu par une succession de u éclatements ponctuels et $\phi \in \mathcal{A}_{(Z,z)}$ qui relève φ à travers Π_z . Soit alors $G_z : (Z, z) \xrightarrow{\Pi_z} (X, x) \xrightarrow{F_x} (Y, y)$. Il est alors élémentaire de vérifier que $\text{grk}(G_z) = \text{grk}(F_x)$. Si l'assertion 2) est prouvée pour \mathcal{G}_z , elle le sera pour \mathcal{F}_x . En effet, soit $i \in \mathbb{N}$, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathcal{R}_{(Y,y)}$ telle que :

$$B_j(\theta) \subset \mathcal{G}_z(B_i(\phi)),$$

on aura :

$$B_j(\theta) \subset \mathcal{G}_z(B_i(\phi)) = \mathcal{F}_x(\Pi_z(B_i(\phi))) \subset \mathcal{F}_x(B_i(\varphi)).$$

Nous supposons donc désormais que $(X, x) = (\mathbb{K}^m, 0)$. Soit alors $d = \dim_y Y$. Plongeons (Y, y) dans $(\mathbb{K}^n, 0)$. Nous noterons $F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m)$ les composantes de F_x , et par F un représentant de F_x . Pour un choix générique de coordonnées linéaires à l'origine de $(\mathbb{K}^n, 0)$, on peut supposer être dans la situation qui suit.

Soit $P_0 : (Y, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^d, 0)$, le germe de morphisme induit par la projection :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^d \\ (z_1, \dots, z_n) &\rightarrow (z_1, \dots, z_d) \end{aligned}$$

Le morphisme :

$$P_0^* : \mathcal{O}_d = \mathbb{K}\{z_1, \dots, z_d\} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,0} = \mathcal{O}_n/J$$

est injectif et fini.

Si k est la dimension du corps de fractions de $\mathcal{O}_{Y,0}$ sur le corps des fractions de \mathcal{O}_d , le polynôme minimal de \bar{z}_{d+1} est un polynôme distingué, $P(Z) = Z^k + \sum_{l=1}^k a_l Z^{k-l}$ à coefficients dans \mathcal{O}_d .

Le discriminant $\Delta(z_1, \dots, z_d)$ de ce polynôme est non nul et :

$$\bar{\Delta} \cdot \mathcal{O}_{Y,0} \subset \mathcal{O}_d + \mathcal{O}_d \cdot \bar{z}_{d+1} + \dots + \mathcal{O}_d \cdot \bar{z}_{d+1}^{k-1}.$$

En particulier, $z_{d+1}^k + \sum_{l=1}^k a_l z_{d+1}^{k-l} \in J$, et pour $2 \leq j \leq n-d$, il existe des $a_{l,j} \in \mathcal{O}_d$ tels que :

$$\Delta z_{d+j} - \sum_{l=1}^{k-1} a_{l,j} z_{d+1}^l \in J.$$

D'autre part, le choix de la projection linéaire P_0 étant générique et $grk(F_x) = d$, on peut supposer quitte à renuméroter les coordonnées dans \mathbb{K}^m que :

$$J_1(x_1, \dots, x_m) = \det\left(\frac{\partial F_l}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m)\right)_{1 \leq l \leq d, 1 \leq j \leq d}$$

est non identiquement nul.

Notons $(D, 0) \subset (\mathbb{K}^d, 0)$ le germe en 0 des zéros de Δ . On a $\Delta \circ F_x \neq 0$, sans quoi $F_x((\mathbb{K}^m, 0)) \subset P_0^{-1}(D, 0)$ d'où $grk(F_x) \leq \dim m_0 P_0^{-1}(D, 0) = d-1 < d$.

De la même façon $(V, 0) = F_x^{-1}(Sing(Y), 0) \subset (\mathbb{K}^m, 0)$ est un sous-ensemble analytique propre de $(\mathbb{K}^m, 0)$. Soit I_V l'idéal réduit définissant $(V, 0)$ et $h \in I_V$, $h \neq 0$. Posons $k_1 = m_0(h)$, $k_2 = m_0(J_1)$, $k_3 = m_0(\Delta \circ F_x)$, où $m_0(\)$ désigne la multiplicité ou l'ordre à l'origine.

Soient $\phi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^m, 0)}$ et $i \in \mathbb{N}$, en vertu du Lemme 4.9, il existe $\alpha \in B_i(\phi)$ telle que :

$$ord(h(\alpha(t))) \cdot J_1(\alpha(t)) \cdot \Delta(F(\alpha(t))) \leq (k_1 + k_2 + k_3)(i+1) = s.$$

Posons $\theta(t) = F(\alpha(t))$. Nous allons voir que :

- $B_{2s+1}(\theta) \subset \mathcal{F}_x(B_i(\phi)) = \mathcal{F}_x(B_i(\alpha))$;
- $B_{2s+1}(\theta) \subset \mathcal{R}_{(Y,0)}$.

Soit $\theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_d, \theta'_{d+1}, \dots, \theta'_n) \in B_{2s+1}(\theta) \subset \mathcal{A}_{(Y,0)}$. Considérons le système d'équations implicites :

$$G_1(t, y_1, \dots, y_m) = F_1(\alpha_1(t) + y_1, \dots, \alpha_m(t) + y_m) - \theta'_1(t) = 0$$

⋮

$$G_d(t, y_1, \dots, y_m) = F_d(\alpha_1(t) + y_1, \dots, \alpha_m(t) + y_m) - \theta'_d(t) = 0.$$

Soit I l'idéal de \mathcal{O}_1 engendré par les mineurs d'ordre d de la jacobienne $G'_y(t, 0)$. On a $J_1(\alpha(t)) \in I$. Soit $l = \text{ord}(I) \leq \text{ord}(J_1(\alpha(t))) \leq s$.

Par hypothèse, $G(t, 0) \in (t)^{2s+1} \cdot \mathcal{O}_1^d$. Donc $G(t, 0) \in \oplus_d(t)^{2(s-l)+1} \cdot \mathcal{I}^2$. Par le théorème des fonctions implicites de J.C. Tougeron, il existe $y_1(t), \dots, y_m(t) \in (t)^{2(s-l)+1} \cdot (t)^l \subset (t)^{s+1}$ telles que :

$$F_j(\alpha(t) + y(t)) = \theta'_j(t), \quad 1 \leq j \leq d.$$

Posons $\rho(t) = \alpha(t) + y(t)$. On a donc $\rho \in B_s(\alpha) \subset B_i(\alpha)$.

Pour conclure, il nous reste à voir que pour $d+1 \leq j \leq n$, on a : $F_j(\rho(t)) = \theta'_j(t)$.

Pour cela remarquons que, puisque $\theta' \in B_{2s+1}(\theta) \subset \mathcal{A}_{(Y,0)}$, $\Delta(\theta')$ et $\Delta(\theta)$ coïncident jusqu'à l'ordre $2s$. Mais $\text{ord}(\Delta(\theta)) \leq s$, donc $\text{ord}(\Delta(\theta')) \leq s$.

Posons : $\tilde{\theta}'(t) = (\theta'_1(t), \dots, \theta'_d(t))$. Maintenant, puisque F est à valeur dans $(Y, 0)$ et $(F_1(\rho(t)), \dots, F_d(\rho(t))) = \tilde{\theta}'(t)$.

On a :

$$F_{d+1}(\rho(t))^k + \sum_{l=1}^k a_l(\tilde{\theta}'(t)) F_{d+1}^{k-l}(\rho(t)) = 0$$

$$\theta'_{d+1}(t)^k + \sum_{l=1}^k a_l(\tilde{\theta}'(t)) (\theta'_{d+1})^{k-l}(t) = 0$$

Par suite $F_{d+1}(\rho(t))$ et $\theta'_{d+1}(t)$ sont donc deux racines du polynôme $P(U) = U^k + \sum_{l=1}^k a_l(\tilde{\theta}'(t)) U^{k-l}$. D'après le théorème de Puiseux, il existe, $u_1(t^{1/k!}), \dots, u_k(t^{1/k!})$ analytiques complexes en $t^{1/k!}$ solutions de $P(U) = 0$. Supposons que $F_{d+1}(\rho(t)) \neq \theta'_{d+1}(t)$, alors :

$$(F_{d+1}(\rho(t^{k!})) - \theta'_{d+1}(t^{k!}))^2 \text{ divise } \prod_{l < j} (u_l(t) - u_j(t))^2 = \Delta(\tilde{\theta}'(t^{k!})).$$

Par suite :

$$\text{ord}(F_{d+1}(\rho(t)) - \theta'_{d+1}(t))k! \leq \text{ord}(\Delta(\tilde{\theta}'(t)))k! \leq sk!.$$

Or ceci est absurde car :

$$\text{ord}(F_{d+1}(\rho(t)) - F_{d+1}(\alpha(t))) \geq s + 1 \text{ et } \text{ord}(\theta'_{d+1}(t) - F_{d+1}(\alpha(t))) \geq 2s + 1.$$

Par suite $F_{d+1}(\rho(t)) = \theta'_{d+1}(t)$. Ensuite, pour $j \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\theta}'(t))F_{d+j}(\rho(t)) &= \sum_{l=0}^{k-1} a_{l,j}(\tilde{\theta}'(t))F_{d+1}^l(\rho(t)) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} a_{l,j}(\tilde{\theta}'(t))(\theta'_{d+1})^l(t) = \Delta(\tilde{\theta}'(t))\theta'_{d+j}(t). \end{aligned}$$

Par suite, $F_{d+j}(\rho(t)) = \theta'_{d+j}(t)$, $j \geq 2$. Donc ρ relève θ' par F . Enfin notons que $h(\rho(t)) \neq 0$ car $\text{ord}(h(\rho(t)) - h(\alpha(t))) \geq s + 1$ et $\text{ord}(h(\alpha(t))) \leq s$. Par conséquent, $\rho(t)$ n'est pas tracée dans $F^{-1}(\text{Sing}(Y), 0)$. Donc à fortiori $F(\rho(t)) = \theta'(t)$ n'est pas tracée dans $(\text{Sing}(Y), 0)$.

Nous prouvons à présent l'implication 3) \Rightarrow 1).

Considérons $F_x : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ tel que $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,0)})$ contienne un ouvert de $\mathcal{R}_{(Y,0)}$. Posons $d = \dim_0 Y$ et $P_0 : (Y, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^d, 0)$ une projection linéaire générique. D'après l'implication 1) \Rightarrow 2), puisque $\text{grk}(P_0) = d$, pour tout ouvert \mathcal{V} de $\mathcal{R}_{(Y,0)}$, $\mathcal{P}_0(\mathcal{V})$ contient un ouvert de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d,0)}$. Par suite, posant $F' = P_0 \circ F$, $\mathcal{F}'(\mathcal{R}_{(X,0)})$ contient un ouvert de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d,0)}$. Mais $\text{grk}(F') \leq \text{grk}(F)$. L'implication 3) \Rightarrow 1) sera donc prouvée si l'on montre que $\text{grk}(F') = d$. Autrement dit, on peut supposer que notre germe d'application $F : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^d, 0)$ est telle que $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,0)})$ contient un ouvert de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d,0)}$.

Considérons une boule de rayon r suffisamment petit, $B(0, r) \subset \mathbb{K}^m$ pour que :

$$X \cap B(0, r) = \{z \in B(0, r) / f_1(z) = \dots = f_p(z) = 0\},$$

avec f_1, \dots, f_p analytiques sur $B(0, r)$.

$$\text{Sing}(X) \cap B(0, r) = \{z \in B(0, r) / f_1(z) = \dots = f_p(z) = 0,$$

$$\det\left(\frac{\partial f_{i_l}}{\partial z_{j_k}}\right)_{1 \leq l \leq s, 1 \leq k \leq s}(z) = 0, \forall \underline{i} = (i_1, \dots, i_s), \underline{j} = (j_1, \dots, j_s)\}$$

où $m - s = \dim(X, 0)$.

Soit r_n une suite croissante telle que $0 < r_n < r$ et $r_n \rightarrow r$. Posons :

$$R_{n,l} = \left\{ z \in \mathbb{K}^m / |z| \leq r_n, z \in X \cap B(0,r), \sum_{i,j} \left| \det \left(\frac{\partial f_{i_j}}{\partial z_{j_k}} \right)_{1 \leq j,k \leq s}(z) \right| \geq \frac{1}{l} \right\}.$$

On a évidemment : $Reg(X) \cap B(0,r) = \cup_{l,n \in \mathbb{N}^*} R_{n,l}$. Par suite $F(Reg(X) \cap B(0,r)) = \cup_{n,l} F(R_{n,l})$ est réunion dénombrable de compacts de \mathbb{K}^d . Donc l'ensemble $F(Reg(X) \cap B(0,r))$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{K}^d . Supposons $grk(F) < d$. Écrivons $Reg(X) \cap B(0,r) = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ où chaque D_n est un domaine de carte. Posons $F_n = F/D_n$. En tout point de D_n le rang de la jacobienne complexe de F_n est strictement inférieur à d . Donc le rang de la jacobienne réelle de F_n est strictement inférieur à $2d$. Tout point de $F_n(D_n)$ est donc valeur critique réelle de F_n . Par le théorème de Sard, $F_n(D_n)$ est donc de mesure nulle. Il en est donc de même de $F(Reg(X) \cap B(0,r)) = \cup F_n(D_n)$. Nous allons voir que ceci est contradictoire avec le fait que $\mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,0)})$ contienne un ouvert de $\mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d,0)}$.

Soient $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{K}^d,0)}$ et $i \in \mathbb{N}$ tel que $B_i(\varphi) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,0)})$. Posons $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k t^k$, $A_k = (a_k^1, \dots, a_k^d) \in \mathbb{K}^d$. Considérons alors l'application :

$$A : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^d \longrightarrow \mathbb{K}^d$$

$$(t, x) \longrightarrow A(t, x) = \sum_{k=1}^i A_k t^k + x \cdot t^{i+1}.$$

$F(Reg(X) \cap B(0,r))$ est réunion dénombrable de compacts, donc de fermés. Il en est donc de même de $V = A^{-1}(F(Reg(X) \cap B(0,r)))$. Soient $l \geq 1$ et $C_l = \{z \in \mathbb{K} / |z| = 1/l\}$ le cercle de centre l'origine et de rayon $1/l$. Considérons :

$$V_l = V \cap (C_l \times \mathbb{K}^d).$$

V_l est donc réunion dénombrable de compacts. Soit $X_l = P(V_l)$, où $P : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^d \rightarrow \mathbb{K}^d$ est la projection canonique. X_l est donc mesurable. Maintenant, le fait que $B_i(\varphi) \subset \mathcal{F}(\mathcal{R}_{(X,0)})$ implique que :

$$\mathbb{K}^d = \cup_{l \geq 1} X_l \quad (*)$$

En effet, soit $x \in \mathbb{K}^d$, l'arc $t \rightarrow \alpha(t) = A(t, x)$ est un élément de $B_i(\varphi)$. Il se relève donc par F en un arc $\rho \in \mathcal{R}_{(X,0)}$. Donc pour $|t| = 1/l$ assez petit, $\alpha(t) = A(t, x) \in F(Reg(X) \cap B(0,r))$ et donc $x \in X_l$. Maintenant par (*), l'un des X_l , disons X_{l_0} est de mesure non nulle. Il en découle que l'ensemble :

$$Z_{l_0} = \left\{ z \in \mathbb{K}^d / z = \sum_{k=1}^i A_k \left(\frac{1}{l_0} \right)^k + u \left(\frac{1}{l_0} \right)^{i+1}, u \in X_{l_0} \right\}$$

est de mesure non nulle. Mais par définition, $Z_{l_0} \subset F(\text{Reg}(X) \cap B(0, r))$. Ce dernier ne peut donc être de mesure nulle. \square

Nous terminons cette section par quelques remarques et commentaires. Pour cela si (X, x) est un germe d'espace analytique, nous noterons par $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le complété $\mathcal{M}_{X,x}$ addique de $\mathcal{O}_{X,x}$. De la même façon si $F_x : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est un germe de morphisme, on notera $\widehat{F}_x^* : \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le morphisme induit par F_x . On a alors le corollaire suivant qui est un cas particulier des théorèmes de A.M. Gabrielov et S. Izumi (cf. [I4]).

COROLLAIRE 6.2. — *Soit (X, x) un germe d'espace réduit et $F_x : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ tel que $\text{grk}(F_x) = d$. Alors :*

- 1) *Si $S \in \widehat{\mathcal{O}}_d$ est tel que $\widehat{F}_x^*(S) \in \mathcal{O}_{X,x}$, alors $S \in \mathcal{O}_d$;*
- 2) *$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ / \forall S \in \widehat{\mathcal{O}}_d, m(\widehat{F}_x^*(S)) \leq am(S) + b$ où "m" désigne la multiplicité ou l'ordre.*

Preuve. — Puisque le rang générique de F_x est le maximum des rangs génériques des restrictions de F_x aux composantes irréductibles de (X, x) , on peut supposer que celui-ci est irréductible. Mais alors d'après le Théorème 1.4, il existe $\varphi \in \mathcal{A}_{(\mathbb{C}^d, 0)}$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que $B_i(\varphi) \subset \mathcal{F}_x(\mathcal{R}_{(X,x)}) \subset \mathcal{F}_x(\mathcal{A}_{(X,x)})$. Soit alors $S \in \widehat{\mathcal{O}}_d$, tel que $\widehat{F}_x^*(S) \in \mathcal{O}_{(X,x)}$. Par suite, pour tout $\theta \in \mathcal{A}_{(X,x)}$, $\widehat{F}_x^*(S)(\theta) \in \mathcal{O}_1$, c'est à dire $S(\varphi') \in \mathcal{O}_1, \forall \varphi' \in \mathcal{F}_x(\mathcal{A}_{(X,x)})$. Donc $S(\varphi') \in \mathcal{O}_1, \forall \varphi' \in B_i(\varphi)$. Or ceci implique que $S \in \mathcal{O}_d$ par le lemme 1.4 p.121 de [T4]. De la même façon, soit $k = m(\widehat{F}_x^*(S))$. Pour tout $\theta \in \mathcal{A}_{(X,x)}$, on a : $\text{ord}(\widehat{F}_x^*(S)(\theta)) \geq k$. Par suite, $\text{Min}_{\varphi' \in B_i(\varphi)} \text{ord}(S(\varphi')) \geq k$. Mais d'après le Lemme 4.9 de la section précédente, ce minimum est inférieur ou égal à $m(S)(i + 1)$. Donc $m(\widehat{F}_x^*(S)) \leq \frac{1}{i+1}m(S)$. On notera donc que les constantes a, b de 2) sont déterminées par le diamètre d'une boule incluse dans $\mathcal{F}_x(\mathcal{A}_{(X,x)})$. La preuve de 1) \Rightarrow 2) dans 1.4 fournit un moyen effectif de déterminer un tel diamètre. \square

Remarque 6.3. — Les théorèmes de A.M. Gabrielov et S. Izumi, qui sont respectivement les assertions de 1) et 2) dans le cas où (Y, y) est un irréductible quelconque, sont beaucoup plus profonds. L'assertion 1) dans le cadre général fût d'abord prouvée par A.M. Gabrielov. Puis S. Izumi donna une preuve de 1) notablement simplifiée dans [I4]. L'assertion 2) dans le cas général est due à S. Izumi [I1][I2][I3]. Le cas que nous traitons dans 5.2.1 a été obtenu indépendamment des façons précédentes et de manière disjointes par P.M. Eakin–J.Harris, B. Malgrange, R. Moussu–J.C. Tougeron.

On se ramène, en général, au cas où (X, x) est lisse en utilisant la résolution des singularités. Nous renvoyons le lecteur à [I4] pour une vision générale historique.

Soit maintenant (X, x) un germe irréductible, $\varphi \in \mathcal{R}_{(X,x)}$ et $i \in \mathbb{N}$. Considérons les deux assertions suivantes :

$$(1) (T) \quad \forall S \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, (\forall \varphi' \in B_{X,i}(\varphi), S(\varphi') \in \mathcal{O}_1 \Rightarrow S \in \mathcal{O}_{X,x})$$

$$(2) (I) \quad \exists a, b \in \mathbb{R}^+, \forall S \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, \text{Min}_{\varphi' \in B_{X,i}(\varphi)}(\text{ord}(S(\varphi'))) \leq am(S) + b.$$

Les assertions (T) et (I) sont des conséquences très faciles de l'existence de la résolution des singularités et des théorèmes de A.M. Gabrielov et S. Izumi. Elles signifient grossièrement que le comportement d'un élément de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ sur un ouvert de $\mathcal{R}_{(X,x)}$ décrit son comportement général. C'est pourquoi on peut considérer que de tels ouverts sont représentatifs de $\mathcal{A}_{(X,x)}$. D'autre part, une preuve directe de ces assertions (T) et (I) impliquerait les théorèmes de A.M. Gabrielov et S. Izumi via 1.4 comme en 5.2. Pour prouver (T) et (I) directement, il suffirait d'établir les propriétés 1) et 2) de 5.2 pour $\Pi : (Z, p) \rightarrow (X, x)$ l'éclatement de (X, x) de centre x . Donc les théorèmes de A.M. Gabrielov et S. Izumi se réduisent au cas apparemment simple ci-dessus. Contrairement aux apparences, ce cas est sans doute aussi compliqué que le cas général. Cependant, une détermination « effective » de a et b comme dans 5.2 dans le cas de l'éclatement $\Pi : (Z, p) \rightarrow (X, x)$ de centre x conduirait à des « estimations de Chevalley linéaires uniformes » comme demandées dans [B-M3] (question 1.28 p. 743).

Bibliographie

- [A1] ARTIN (M.), Algebraic approximation of structures over complete local rings, Pub. Math. I.H.E.S. 36, p. 23-58 (1969).
 [B] BENNETT (B.M.), On the characteristic function of a local ring, Ann. of Math. (2) 91, p. 25-87 (1970).
 [B-M1] BIERSTONE (E.), MILMAN (P.D.), Relations among analytic functions I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), (1) 37, p. 187-239 (1987).
 [B-M2] BIERSTONE (E.), MILMAN (P.D.), Uniformization of analytic spaces, Jour. A.M.S. 2, p. 801-836 (1989).

⁽¹⁾ (T) fût conjecturée par J.C. Tougeron dans [T4] avant qu'il n'ait connaissance du théorème de A.M. Gabrielov.

⁽²⁾ (I) est du à S. Izumi [I5] utilisant la résolution des singularités et son théorème mentionné plus haut.

- [B-M3] BIERSTONE (E.), MILMAN (P.D.), Geometric and differential properties of subanalytic sets, *Ann. of Math.* 147, p. 731-785 (1998).
- [D-L1] DENEFF (J.), LOESER (F.), Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, *Invent. Math.* 135, p. 201-232 (1999).
- [D-L2] DENEFF (J.), LOESER (F.), Geometry on arc spaces of algebraic varieties, in *European Congress of Mathematics, vol I (Barcelona, 2000)*, *Prog. Math.*, vol. 201, Birkhäuser, p. 327-348 (2001).
- [Ga] GABRIELOV (A.M.), Formal relations between analytic functions, *Izv. Akad. Nauk. SSSR.* 37, p. 1056-1088 (1973).
- [Gr] GREENBERG (M.), Rational points in henselian discrete valuation rings, *Pub. Math. I.H.E.S.* 31, p. 59-64 (1966).
- [G-S-L-J] GONZALEZ-SPRINGER (G.), LEJEUNE-JALABERT (M.), Sur l'espace des courbes tracées sur une singularité, *Prog. Math.* 134, p. 8-32 (1996).
- [H1] HICKEL (M.), Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, *Amer. J. Math.* 115, p. 1299-1334 (1993).
- [H2] HICKEL (M.), Calcul de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane, *Pacific Journal of math.* 213, p.37-47 (2004), et Preprint Université Bordeaux I N°145 (Avril 2002).
- [I-K] ISHII (S.) and KOLLÁR (J.), The Nash problem on arc families of singularities, *Duke Math. J.* 120, p. 601-620 (2003).
- [I1] IZUMI (S.), Linear complementary inequalities for orders of germs of analytic functions, *Invent. Math.* 65, p. 459-471 (1982).
- [I2] IZUMI (S.), A measure of integrity for local analytic algebras, *Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ.* 21, p. 719-735 (1985).
- [I3] IZUMI (S.), Gabrielov's Rang Condition is equivalent to an inequality of reduced orders, *Math. Ann.* 276, p. 81-89 (1986).
- [I4] IZUMI (S.), The rank condition and convergence of formal functions, *Duke Math. J.* 59, p. 241-264 (1989).
- [I5] IZUMI (S.), Note on convergence and orders of vanishing along curves, *Manuscripta math.* 66, p. 261-275 (1990).
- [L-J] LEJEUNE-JALABERT (M.), Courbes tracées sur un germe d'hypersurface, *Amer. J. Math.* 112, p. 525-568 (1990).
- [L-J-T] LEJEUNE-JALABERT (M.), TEISSIER (B.), Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton, thèse université Paris VII (1973).
- [Lo] LOOIJENGA (E.), Motivic Measures, *Séminaire Bourbaki 1999/2000* 874, *Astérisque* 276, p. 267-297 (2002).
- [N] NASH JR (J.F.), Arc structure of singularities, *Duke Math. Journ.* 81, p. 31-38 (1995).
- [P] PAWLUCKI (W.), On Gabrielov's regularity condition for analytic mappings, *Duke Math. J.* 65, p. 299-311 (1992).
- [R1] REGUERA (A.J.), Families of arcs on rational surface singularities, *Manuscripta Math.* 88, p. 321-333 (1995).
- [R2] REGUERA (A.J.), Image of the Nash map in terms of wedges, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338, p. 385-390 (2004).
- [S] SEBAG (J.), Intégration motivique sur les schémas formels, à paraître au *Bull. S.M.F.* (2004).
- [T1] TOUGERON (J.C.), Idéaux de fonctions différentiables, *Ann. Inst. Fourier* 18, p. 177-240 (1968).

- [T2] TOUGERON (J.C.), Idéaux de fonctions différentiables, *Ergeb. der Mathematik* 71, Springer Verlag (1972).
- [T3] TOUGERON (J.C.), An extension of Whitney's spectral theorem, *Pub. Math. I.H.E.S.* 40, p. 139-148 (1971).
- [T4] TOUGERON (J.C.), Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Ann. Inst. Fourier* 26, p. 117-131 (1976).